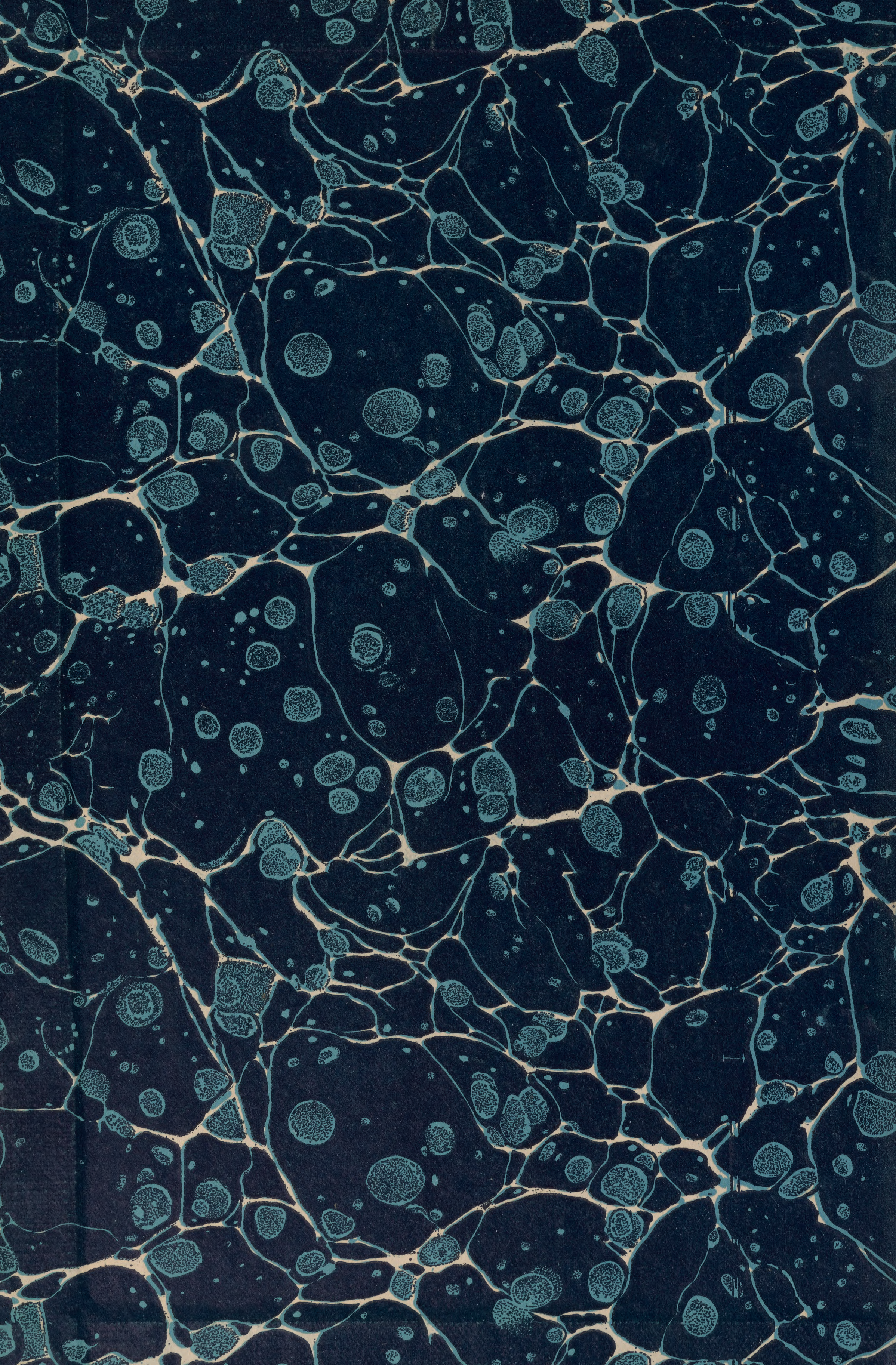
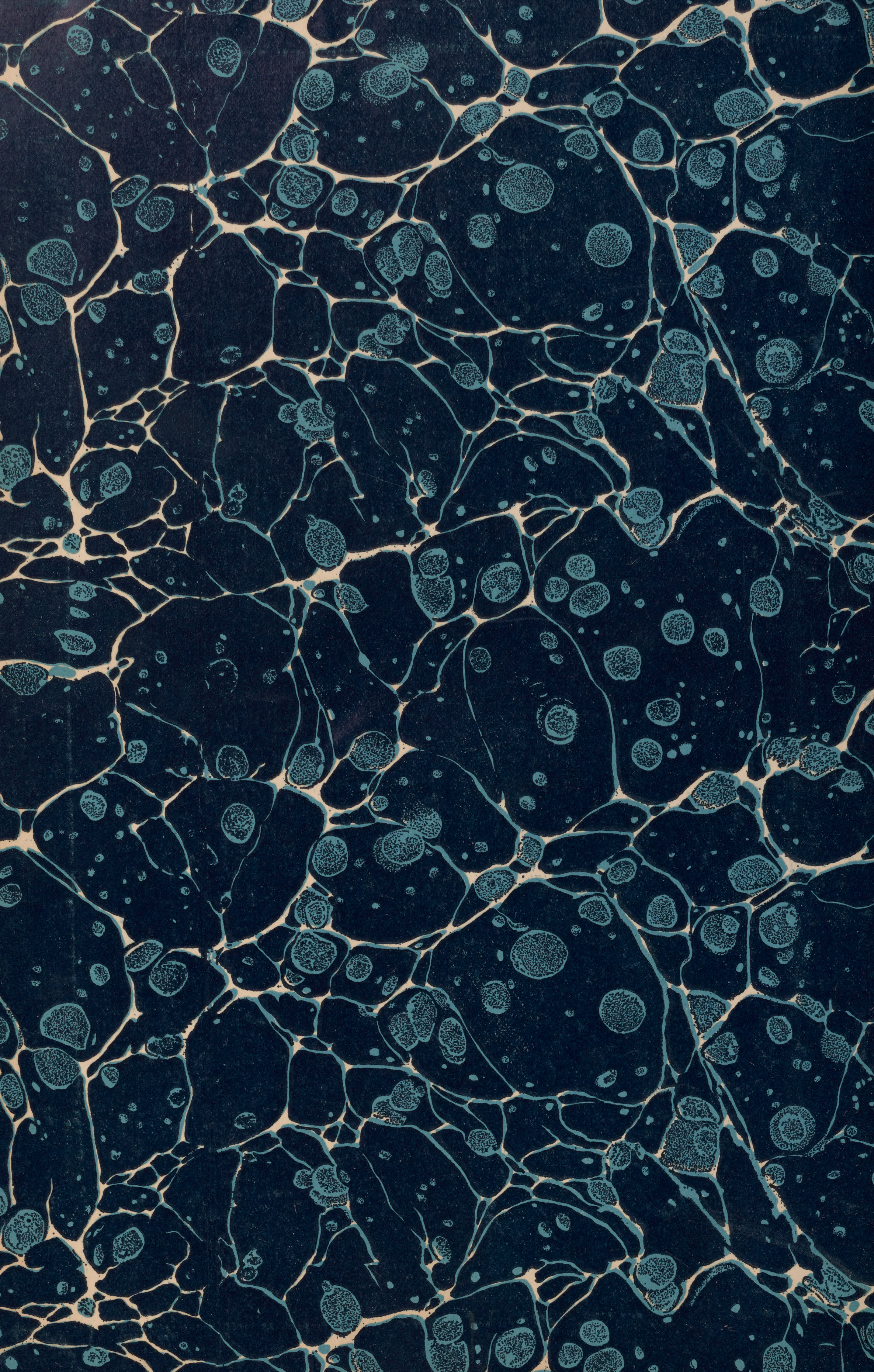




AS142
.C437

Bureau of Standards
AUG 10 1926
D
8
63941
Com

ACADÉMIE TCHÈQUE DES SCIENCES.

(ČESKÁ AKADEMIE VĚD A UMĚNÍ.)

BULLETIN INTERNATIONAL.

RÉSUMÉS DES TRAVAUX PRÉSENTÉS.

33

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, NATURELLES ET DE LA MÉDICINE.

XXV^e ANNÉE.

(1925.)

CANCELLED
LIBRARY

PRAGUE.
PUBLIÉ PAR L'ACADÉMIE TCHÈQUE DES SCIENCES.
1925.

ПЕВНИЦА

506.437
.C42

ACADÉMIE TCHÈQUE DES SCIENCES.

(ČESKÁ AKADEMIE VĚD A UMĚNÍ.)

BULLETIN INTERNATIONAL.

RÉSUMÉS DES TRAVAUX PRÉSENTÉS.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, NATURELLES ET DE LA MÉDECINE.

SMITHSONIAN INSTITUTION
302398
OCT 26 1936
E
NATIONAL MUSEUM

XXV^e ANNÉE.

(1925.)

U.S. BUREAU OF STANDARDS
CANCELLED
LIBRARY

PRAGUE.
PUBLIÉ PAR L'ACADÉMIE TCHÈQUE DES SCIENCES.
1925.

Bureau of Standards
JUN 2 7 1927
CANCELED
345

By Transfer
Bureau of Standards
JAN 25 1932

UNIVERSITY OF CALIFORNIA

ALOIS WIESNER, PRAGUE.

06.437
C423

Table des Auteurs:

Page

Dr. *A. Přecechtěl,* The Brain Stem of the Elephas Indicus 1
B. Němec, Dispersion des spores chez quelques Hyménomycetes ... 3
Č. Mrázek, Sur la biologie et la physiologie des mousses formant de tufs 6
J. Sobotka, Sur des relations métriques concernant les projections parallèles des quadriques 8
Odolen Kodym, Les failles inverses longitudinales du Barrandien ... 17
Dr. *Václav Hlavatý,* Les courbes sur les surfaces dans l'espace de Riemann V_3 47
E. Čech, Formes algébriques à coefficients variables 49
E. Čech, Géometrie projective des surfaces réglées dans les espaces à un nombre quelconque de dimensions. I..... 51
Jar. Petrbok, The stratigraphy of the Bohemian localities of the holocene Molluska..... 57
Dr. *Miloslav Hampl,* The Polarisation of the Limiting Lines of the Total Reflexion. II. 67
J. Sobotka, Sur les rapports entre la représentation des quadriques de Pelz et l'axonometrie clinogonale..... 80
Jar. Petrbok, La stratigraphie et les mollusques de la terasse pleistocène du Danube près de Parkaň 99
Odolen Kodym, Remarques sur quelques dislocations transversales dans le paléozoïque de la Bohème centrale 108
Dr. *Miloslav Hampl,* The Polarisation of the Limiting Lines of the Total Reflexion. I. 114
Dr. *Al. Wangler,* Analyse des isothermes inférieures à la critique... 124
Odolen Kodym et *Alois Matějka,* Le mésozoïque de Belá, dans la région bordière Est du bassin du Turiec en Slovaquie..... 148
B. Procházka, Note sur les qualités polaires d'un système des quadriques 154
Dr. *Joseph Klíma,* Sur les surfaces gauches déterminées par des coniques se coupant en deux points 155
Radim Kettner et *Ota Hynie,* Etudes tectoniques dans les environs de Motyčky et de Jelence en Slovaquie 161

Page

K. Petr, La fonction génératrice pour le nombre d'invariants de troits formes quadratiques ternaires et le système complet de ces invariants 164
B. Bydžovský, Sur des quartiques elliptiques planes, spéciales au point de vue projectif 200
J. Hanuš, A. Jílek et *J. Lukas,* La benzoylméthylglyoxime, précipitant spécifique des sels de palladium 206
J. Sobotka, Note sur la construction de la conique osculatrice d'une courbe plane 209
Karel Domin, Saponaria ocimoides L., a new and noteworthy plant of the Czechoslovakian Flora..... 215
V. Hlavatý, Les complexes des vecteurs normaux d'une V_2 dans R_4 219
B. Kladivo, Calcul des déviations de la verticale par rapport à l'isostasie 220
Odolen Kodym and *Alois Matějka,* Preliminary report on the Neogene of the Basin of Turiec in Slovakia 223
František Ulrich, Cristallographie de la vivianite de Rodna vecche.. 234
J. Sobotka, Droites conjuguées du complexe tétraédral 242
Ladislav Urbánek, Terrain crétacé dans la partie Sud des environs de Kolín 253
V. Hlavatý, Note sur la théorie des courbes dans les espaces de Riemann 261
Václav Dolejšek, Sur les lignes d'éticelles dans la serie K 264
Zdenko Frankenberger, Sur le développement de l'oeuf de la souris blanche 272
Dr. *Boh. Ježek,* Iron meteorite from Teplá in Bohemia 275
A. V. Starkov, Les nerfs du coeur 277
J. Jarušek, Les semiinvariants du troisième degré 335
J. Jarušek, Sur les semiinvariants 338
Vojtěch Jarník, Sur les points à coordonnées antières dans le plan 341
V. Šusta, Lépidodendron et la chute des coussinets de son écorse . 353
J. Sobotka, Sur une certaine expression paramétrique des coniques et son application à la déduction de quelques théorèmes et constructions rapportants aux coniques et aux courbes rationelles du quatrième ordre 355
Ant. Vimmer, Нѣсколько добавленій къ морфологіи трахейной системы у личинокъ Diptera 370

The Brain Stem of the Elephas Indicus.

By **Dr. A. PŘECECHTĚL.**

From the Central Institute for Brain Research at Amsterdam.
Director Dr. C. U. Ariens Kappers.

Presented the 11. January 1924.

Subjoined is a brief summary of the observations made by studiyng the brain-stem of the Elephas indicus which particularly from a phylo- and ontogenetical point of view deserve our attention. The cells constituting the *nucleus accessorii* pass almost imperceptibly into the dorsal nucleus of the vagus as is the case with lower animals (e g. the Hexanchus); among mammals we have still the Ungulata where the transition is moderately defined. The primitive deposition of that nucleus in the Elephas, as compared with other mammals in whom it lies more ventrally, can possibly be explained so that part of the musculature innervated by the n. accessorius is subservient to the original visceral function, respiration and movements of the jaws, while in other mammals it performs the somatic function (movements of the scapula).

The gray substance of the nuclei cerebelli is connected by strips of the gray matter with the vestibular nuclei that again are continued in the patches and strips of the gray matter, that in the processus cerebelli ad pontem extend to the nuclei pontis, and in the *corpus restiforme* to the oliva inferior. This observation is a proof of the genetical uniformity of above structures, a proof that in no other mammal has been so convincing.

Before the nucleus oculomotorii is large nucleus depressing the anterior pole of the former. The latter nucleus is oval in shape extends forwards up to the caudal pol of the thalamus, and is flattened at sides; ventrolaterally and dorsomedially it is well defined, dorsolaterally it passes into the central gray substance, no distinct transition being perceptible. The fornix of the Elephas indicus does not bodily enter the corpus mammilare but extends beyond in a caudal direction and supplies fibers to said nucleus which according to its shape and relation to the surrounding region can be homologized with the nucleus deposited in the same spot in the

Focaena and described by Hatschek and Schlesinger under the name of *nucleus ellipticus*. The relation of this nucleus to the oculomotorius on one hand, and to the olfactory paths on the other, seems to be an evidence that we have to do with a correlative centre of the olfactory and optical sensations that serve for the location and reception of food.

In the striatum the nucleus caudatus pertaining to the neostriatum is well separated from the substantia caudata palaeostriatica by a distinct neopalaeostriatical fissure.

Dispersion des spores chez quelques Hyménomycetes.

Par

B. NĚMEC.

Présenté le 21 mars 1924.

Les Hyménomycetes (les champignons) ne croissent pas plus rapidement que les phanérogames. L'accroissement maximum du chapeau de Boletus bulbosus était — d'après mes observations — 45 *mm* en 24 heures. L'accroissement a une periode maxima qui peut varier sous l'influence des circonstances externes. En général l'accroissement du pied de champignon prend fin un peu plus tôt que l'accroissement du chapeau en largeur. Le développement du champignon dans le genre Boletus dure au moins 14 jours.

Nous avons observé le moment de la dissémination des spores pendant l'accroissement du champignon, la durée et l'arrêt de la production des spores. Nous avons aussi rechérché la quantité de spores liberées; pour cela nous avons placé au-dessous du chapeau des boîtes de Petri avec une couche de gélatine sur laquelle les spores tombaient. Nous avons constaté combien de spores tombaient pendant un certain temp sur la surface donnée. Il faut placer les boîtes même au-dessus des chapeaux, parceque les spores tombent aussi par là ainsi qu'à une certaine distance autour du chapeau. De cette manière nous avons constaté que le Boletus versipellis produit pendant sa vie à peu près 13.104 millions de spores. Chez le Boletus bulbosus nous avons calculé le nombre de spores par addition des basides dans un petit jeun champignon; ce nombre était dans un cas 3.516 millions, dans un autre 2.963. Mais comme l'hyphe peut former successivement plusieurs basides, il faut multiplier ce nombre par 3 et même par 4.

En comparant l'accroissement du chapeau et le dégagement des spores, nous voyons que celles-ci commencent à disséminer bien avant que le chapeau n'ait atteint son diamètre maximum. Chez le Boletus rufus les spores commencent a se dégager à l'époque, où le chapeau n'a pas encore atteint la moitié de son diamètre, chez le Boletus bulbosus et le Boletus versipellis un peu plus tard. Mais après le dégagement se

continue sans cesse pendant quelques jours (chez B. rufus 10 jours, chez B. versipellis 7 jours, chez B. bulbosus 9 jours). La quantité de spores dégagées pendant un certain temps augmente — quoique assèz irregullièrement — atteint son maximum avant ou au moment de l'arrêt de l'accroissement du chapeau; après cela le dégagement diminue et s'arrête completement, bien qu'on puisse constater à l'aide de microscope que les tubes de l'hymenium contiennent ordinairement encore beaucoup de spores. Mais le dégagement s'arrête toute de suite quand le chapeau prend une position telle, que les tubes hymeniens sont obliques par rapport à la direction de la gravité. Dans tous ces cas aucune spore ne sort de l'hymenium. L'hymenium de Boletus erythropus cesse de dégager des spores quand le champignon commence à se dessécher. Les parois des tubes hymeniens se gonflent et rendent le dégagement impossible. Nous avons pu constater le même phenomène chez le Boletus bulbosus.

L'augmentation et la diminution de la quantité des spores dégagées est probablement un phénomène vital — analogue à la grande période de l'accroissement. La regularité de ce phénomène dépend des conditions météorologiques; pendant une periode de pluie et de pluvial froid le dégagement diminue. Il est maximum par un temps ensoleillé, chaud et calme.

Les spores tombent des tubes en partie audessous du chapeau, en partie des distances assez grandes du chapeau dans toutes les directions même malgré un faible vent. Sauf cela les spores tombent même sur la face supérieure du chapeau ou elles séjournent. Cela se fait dans un espace libre ou fermé (sous les cloches de verre).

Les spores sont entraînées par le vent. Nous pouvons l'observer en placent les boîtes en avant ou en arrière du champignon suivant la direction du vent. Derrière le pied du champignon on trouve beaucoup plus de spores qu'avant.

D'après les observations citées précedemment, nous voyons qu'une partie de spores est entraînée par le vent, une autre tombe par terre sous le chapeau et autour de lui, et une autre partie encore vole au-dessus du chapeau; elle peut ou tomber sur sa surface ou être entraînée par le vent. Si la spore de Boletus tombe sur un substratum solide, elle s'y accole et ne se détache plus-tout au plus après une periode de grande sécheresse. Mais par la pluie, les spores sont détachées de leur substratum et sont entraînées par capillarité dans le sol. Il semble que la surface des spores est gluante.

Brefeld indique que pour le Coprinus au moment de dégagement de la spore un peu du contenu de la basidie sort et recouvre la spore. C'est la viscosité des spores qui les fait s'attacher même sur une lame sèche; c'est à cause de cela aussi qu'elles restent attachées l'une à l'autre comme un essaim d'abeilles même sur un plan verticale. Sur les lames verticales, couvertes de gélatine ou de la glycerine les spores du Boletus

versipellis s'attachent toujours en position verticale. On peut en conclure qu'elles se mouvaient même dans l'air dans une position verticale. Cela repond à leur forme qui rappelle un peu celle du grain de seigle. Pendant le mouvement des spores dans l'air la partie plus large, où se trouve le centre de gravité est orientée en bas, la partie plus étroite en haut.

On peut juger d'après l'observation suivante, que les spores une fois accolées ne peuvent plus se détacher; à savoir dans une cloche alors que le champignon était débout, beaucoup de spores volait dans l'air, mais quand il est tombé, pas une seule spore ne s'est attachée sur la gélatine.

Falck a remarqué que la chaleur produite par le champignon cause des courants d'air qui accentue le mouvement des spores. Si nous imaginons que le champignon échauffe l'air qui est tout autour, nous pouvons juger qu'à sa proximité se forme un courant d'air, qui sur la terre se dirige vers le pied, monte le long de lui et de l'hymenium, jusqu'au bord du chapeau; de là une partie monte encore tout droit en haut, l'autre se dirige vers le centre de la surface du chapeau et monte plus haut; l'air chauffé par l'hymenium monte le long du bord de chapeau; l'air ainsi qui s'échappe est remplacé par l'air froid qui afflue vers le pied. La couche verticale de la surface du chapeau agit comme isolant contre la chaleur produite par l'hymenium, de sorte que l'air audessus du chapeau ne s'échauffe guère. Il se fait tout au plus un courant d'air trop faible pour pouvoir emporter les spores. Il est possible ainsi que les spores emportées audessus de bord du chapeau tombent sur sa surface; elles sont entrainées par des légers courant d'air superficiels qui se forment le long de la surface des corps solides, ainsi Falck l'à observé.

Si la température de l'atmosphère n'est pas trop élevée, on peut constater à l'aide du thérmomètre que le champignon est plus chaud que l'air. Au contraire, si la température est audessus de 18^0 C, le champignon est un peu plus froid. La cause de cela est l'évaporation d'eau, ainsi que chez les feuilles et les fruits juteux. Dans ce cas les differences de la temperature provoquent aussi des petits courants d'air, qui emportent les spores. Il faudrait étudier en detail les directions de ces courants d'air. Voilà pourquoi nous ne donnons aucun schema, pour le cas où le champignon est plus chaud que l'air. Il est aussi possible que la charge électrique des spores n'est pas sans importance pour leurs mouvement — c'est une chose qui serait à rechercher.

Laboratoire de Physiologie végétale
de l'Université Charles, Prague (II, 433).

Sur la biologie et la physiologie des mousses formant des tufs.

Par

Č. MRÁZEK.

Présenté le 21 mars 1924.

Dans les eaux calcaires végètent des mousses amphibies qui précipitent abondamment au fond du gazon le carbonate de calcium et forment ainsi des couches de tuf. Reichardt (1860) et Unger (1861) ont éxpliqué la formation de ces tufs par le chauffage et par l'évaporation de l'eau. On admet encore aujourd'hui cette éxplication.

Nous avons obsérvé ce phénomène dans la nature et nous avons été amené à douter de cette éxplication. Le milieu le plus favorable pour l'étude de ces mousses est la région où les sources ne sont pas complètement saturées par le carbonate de calcium ; là les tufs se forment seulement dans le gazon de mousse. Seulement certaines muscinées participent à la formation du tuf ; celles-ci vivent exclusivement dans les eaux calcaires. Ce sont: *Hypnum commutatum* Hedw., *Eucladium verticillatum* Br. et Sch., *Pellia calycina* Nees. Les autres — en général les ubiquistes — forment de l'humus et ne s'incrustent pas de sels calcaires comme *Bryum pseudotriquetrum* Schwgr. Dans un autre endroit on a trouvé *Aneura pinquis* Dum. non incrustée et *Pellia calycina* Nees et *Chara* incrustée.

Dans les gazons de la mousse amphibie *Hypnum commutatum*, qui forme beaucoup de tufs, ce sont seulement les tiges lavées par l'eau qui s'incrustent. Les parties aériennes, bien qu'elles soient mouillées par l'eau, et bien qu'elles en évaporent beaucoup, ne s'incrustent pas. Les parties incrustées forment au-dessous du gazon comme une éponge, dont les orifices se remplissent peu à peu par l'épaississement de l'incrustation calcaire ; seulement aux endroits où l'eau coule dans le gazon le sable aussi bouche ces orifices. Sur la surface du tuf les tiges sont encore vivantes (vertes et plasmolysables). On peut trouver les restes des tiges jusqu'au fond de la couche du tuf. L'incrustation calcaire est pércée par les rhizoides qui pénètrent jusqu'à sa surface.

Nous avons fait quelques expériences avec *Pellia calycina* Nees, l'hépatique formant de petits tufs indépendants. Elle s'incrustait dans les

liquides nutritifs contenant les sels solubles du calcium suivants: $Ca(HCO_3)_2$, $Ca(H_2PO_4)_2$, $Ca(NO_3)_2$, $CaCl_2$. Seulement dans le premier milieu il n'était pas possible de trouver la cause de l'incrustation. Dans les autres milieux, l'incrustation était accompagnée et causée, peut-être, par la sécrétion alcaline de la plante. *Pellia* sécrète des matières alcalines même dans l'eau distillée ainsi que dans les milieux sans calcium. Les incrustations calcaires se sont formées seulement sur les vieilles parties du thalle: sur les parois supérieures et au-dessous — parmi les rhizoides; il y en avait très peu au-dessus du nerf central.

Pellia a absolument besoin du calcium pour son développement. Dans les cultures sans calcium une maladie caractéristique apparaît toujours: l'impossibilité de former des rhizoides, des taches brunes, enfin la mort de la plante qui devient tout a fait brune. Au contraire tous les composés du calcium que nous avons employés, ont favorisé le développement des rhizoides et l'accroissement du thalle. La croissance la plus normale était causée par le bicarbonate de calcium; dans ce cas les parties d'accroissement étaient courtes et larges, tandisque sous l'influence des autres composés elles étaient longues et étroites. L'accroissement a diminué (graduellement) dans ces milieux: $Ca(H_2PO_4)_2$, $CaHPO_4$, $Ca_3(PO_4)_2$, $CaCO_3$, $CaSO_4$, $Ca(NO_3)_2$, $CaCl_2$. Les phosphates du calcium ont causé non seulement l'accroissement, mais aussi la formation de la chlorophylle. Au contraire l'abondance de $CaCO_3$ a causé la chlorose, parce qu'elle a rendu difficille l'absorption de l'acide phosphorique. La chlorose pouvait être guérie par la solution fraîche contenant une quantité plus élévée du KH_2PO_4. $Ca(NO_3)_2$ et $CaCl_2$ ont causé un faible accroissement et une chlorose grave.

Si nous admettons que les autres mousses formant du tuf ont la même propriété que *Pellia calycina*, nous pourrions éxpliquer qu'elles peuvent vivre dans les eaux calcaires, qu'elles y demeurent vertes et rigoureuses et pourquoi elles peuvent concurrencer avec d'autres mousses. La résistance au carbonate de calcium et la faculté d' absorber beaucoup de substances alimentaires de l'eau calcaire et courante leur rend le milieu favorable. Le pouvoir de précipiter le carbonate de calcium et peut-être les autres carbonates est une disposition protectrice; à savoir l'eau suintante sur les tiges aux bourgeons terminaux est ainsi privée de carbonate de calcium. Malgré une évaporation importante, le gazon protège les pousses vertes contre les incrustations et peut assimiler abondamment. Ainsi les mousses douées de ces propriétés sont en état de supprimer toutes les autres plantes ubiquistes dans les sources calcaires, même celles qui sont très résistantes.

Sur des relations métriques concernant les projections parallèles des quadriques.

(Résumé du texte original tchèque.)

Par

J. SOBOTKA.

Présenté le 11 Janvier 1924.

1. Soit k une conique centrale au centre O; A, B soient les extrémités de deux demi-diamètres conjugués. Posons $OA = \overline{a}$, $OB = \overline{b}$. Pour l'ellipse, les points d'intersection avec les deux droites (OA), (OB) sont réels, pour l'hyperbole un seul est réel, pour une conique imaginaire tous les deux sont imaginaires. Bornons-nous, dans ce qui suit, à des coniques définies par des polarités réelles dans le plan. Donc, les longueurs absolues de ces demi-diamètres sont, dans le premier cas, $\overline{a}$, $\overline{b}$, dans le deuxième, soit $i\,\overline{a}$, $\overline{b}$, soit $\overline{a}$, $i\,\overline{b}$, dans le troisième $i\,\overline{a}$, $i\,\overline{b}$. Pour éviter la nécessité de distinguer ces trois cas différents, désignons ces longueurs toujours par a, b.

Désignons les axes de la conique, orientés, par x, y; les angles que les droites OA, OB font avec le sens positif de l'axe x soient, respectivement, α, β. Désignons les longueurs analogues sur les axes x, y par A, B. On a, tout d'abord, les relations connues

$$a^2 + b^2 = A^2 + B^2;\ a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta = A^2;\ a^2 \sin^2\alpha + b^2 \sin^2\beta = B^2 \quad (1)$$

Même au cas, où x, y sont deux droites orientées perpendiculaires quelconques, menées par le centre O, ont lieu les relations analogues:

$$\left.\begin{array}{c} a^2 + b^2 = A_1^2 + B_1^2 = A^2 + B^2;\ a^2 \cos^2\alpha_1 + b^2 \cos^2\beta_1 = A_1^2; \\ a^2 \sin^2\alpha_1 + b^2 \sin^2\beta_1 = B_1^2, \end{array}\right\} \quad (2)$$

ou A_1 designe le segment déterminé, sur l'axe x, par l'une ou l'autre tangente de la conique, perpendiculaire à cet axe, et B_1 la longueur analogue sur y. Il est évident que ces relations ont encore lieu, si l'on remplace a, b par les longueurs de deux demi-diamètres conjugués quelconques, pourvu qu'on remplace, en même temps, α_1, β_1 par les angles respectifs que font les demi-diamètres choisis avec x.

2. Supposons, plus généralement, que O soit le centre d'une quadrique centrale, définie, de même, par une polarité réelle de l'espace. Projetons cette surface parallèlement sur le plan M passant par le point O et soient A, B, C les extrémités des projections de trois demi-diamètres conjugués de la quadrique; désignons, d'une manière analogue à celle adoptée ci-dessus, les longueurs de ces projections, en général, par a, b, c. Soient, de plus, a^*, b^*, c^* les longueurs respectifs des projections de trois autres demi-diamètres, d'ailleurs quelconques. On a, tout d'abord, la relation

$$a^{*2} + b^{*2} + c^{*2} = a^2 + b^2 + c^2 \qquad (3)$$

laquelle peut être vérifiée de la manière suivante. Désignons toute figure de l'espace par le même symbole que sa projection, mis en parenthèses. Soit (m) la droite, en laquelle le plan $(O\,C\,A^*)$ coupe le plan $(O\,A\,B)$ et (n) le diamètre conjugué de la surface dans le même plan. Soient m, n les longueurs des projections des demi-diamètres de la surface sur (m) et (n); on a, alors, d'après la première équation (1)

$$m^2 + n^2 = a^2 + b^2, \text{ et, par suite, } a^2 + b^2 + c^2 = c^2 + m^2 + n^2.$$

Le plan $(O\,C\,A^*)$ coupe la surface en une conique dont $(O\,C)$ et (m) sont deux diamètres conjugués. Soit (g) le diamètre de cette conique, conjugué à $(O\,A^*)$ et g la longueur de la projection du demi-diamètre situé sur cette droite; on a alors

$$a^{*2} + g^2 = c^2 + m^2, \text{ et, par suite, } a^2 + b^2 + c^2 = a^{*2} + g^2 + n^2.$$

Les droites (n), (m), $(O\,C)$ et, par suite, aussi les droites (n), (g), $(O\,A^*)$ sont trois diamètres conjugués de la surface; donc, les droites $(O\,B^*)$, $(O\,C^*)$ sont situées dans le plan (n) (g), dans lequel les droites (n), (g) et $(O\,B^*)$, $(O\,C^*)$ forment deux couples de diamètres conjugués; c'est pourquoi $g^2 + n^2 = b^{*2} + c^{*2}$, ce qui prouve la relation (3.)

Soit, maintenant, (s) la droite projetant menée par le point O. Le contour k de la projection de la surface est la projection de la conique (k) située dans son plan diamétral, conjugué au diamètre (s). Deux demi-diamètres de la courbe (k) conjugués quelconques se projettent en deux demi-diamètres de la courbe k, tandis que la longueur de la projection est nulle pour le demi-diamètre situé sur (s). Parconséquent, si a_0, b_0 sont les longueurs de deux demi-diamètres conjugués de la conique k et A, B les longueurs de ses demi-axes, la formule (3) donne la relation

$$a^2 + b^2 + c^2 = a_0^2 + b_0^2 = A^2 + B^2.$$

Fixons, dans le plan de projection, un système de coordonnées orthogonales $O\,(x_1,\ y_1)$. Si les droites $O\,A$, $O\,B$, $O\,C$, prises dans le sens de O respectivement à A, B, C, font avec x_1 les angles α_1, β_1, γ_1, la relation $m^2 + n^2 = a^2 + b^2$ donne les équations

$$m^2 \cos^2 (x_1\, m) + n^2 \cos^2 (x_1\, n) = a^2 \cos^2 \alpha_1 + b^2 \cos^2 \beta_1,$$
$$m^2 \sin^2 (x_1\, m) + n^2 \sin^2 (x_1\, n) = a^2 \sin^2 \alpha_1 + b_2 \sin^2 \beta_1.$$

C'est ainsi qu'on arrive, successivement, aux équations

$$a^2 \cos^2 \alpha_1 + b^2 \cos^2 \beta_1 = m^2 \cos^2 (x_1\, m) + n^2 \cos^2 (x_1\, n),$$
$$c^2 \cos^2 \gamma_1 + m^2 \cos^2 (x_1\, m) = a^{*2} \cos^2 (x_1\, a^*) + g^2 \cos^2 (x_1\, g),$$
$$g^2 \cos^2 (x_1\, g) + n^2 \cos^2 (x_1\, n) = b^{*2} \cos^2 (x_1\, b^*) + c^{*2} \cos^2 (x_1\, c^*).$$

En ajoutant, on obtient

$$\left.\begin{aligned} a^2 \cos^2 \alpha_1 + b^2 \cos^2 \beta_1 + c^2 \cos^2 \gamma_1 = a^{*2} \cos^2 (x_1\, a^*) + \\ + b^{*2} \cos^2 (x_1\, b^*) + c^{*2} \cos^2 (x_1\, c^*) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

et, d'une manière analogue:

$$\left.\begin{aligned} a^2 \sin^2 \alpha_1 + b^2 \sin^2 \beta_1 + c^2 \sin^2 \gamma_1 = a^{*2} \sin^2 (x_1\, a^*) + \\ + b^{*2} \sin^2 (x_1\, b^*) + c^{*2} \sin^2 (x_1\, c^*). \end{aligned}\right\} \quad (4')$$

On déduit, de l'équation (3), aisément celle-ci:

$$\left.\begin{aligned} [a^*\, b^* \sin (a^*\, b^*)]^2 + [b^*\, c^* \sin (b^*\, c^*)]^2 + [c^*\, a^* \sin (c^*\, a^*)]^2 = \\ = [a\, b \sin (a\, b)]^2 + [b\, c \sin (b\, c)]^2 + [c\, a \sin (c\, a)]^2. \end{aligned}\right\} \quad (4'')$$

Pour le faire, menons dans le plan de projection par le point O une droite orientée u perpendiculaire à $O\,C$; on a alors

$$m^2 \cos^2 (u\, m) + n^2 \cos^2 (u\, n) = a^2 \cos^2 (u\, a) + b^2 \cos^2 (u\, b);$$

comme $(u\, m) = (u\, c + c\, m)$, et ainsi de suite pour les autres angles, il suit de cette équation

$$[c\, m \sin (c\, m)]^2 + [c\, n \sin (c\, n)]^2 = [c\, a \sin (c\, a)]^2 + [c\, b \sin (c\, b)]^2,$$

et puisque a, b et m, n sont deux couples de demi-diamètres conjugués de la même conique, on a $a\, b \sin (a\, b) = m\, n \sin (m\, n)$, ce qui permet de compléter la dernière équation de la manière suivante

$$[a\, b \sin (a\, b)]^2 + [b\, c \sin (b\, c)]^2 + [c\, a \sin (c\, a)]^2 = [c\, m \sin (c\, m)]^2 + \\ + [m\, n \sin (m\, n)]^2 + [n\, c \sin (n\, c)]^2.$$

Si l'on prend pour point de départ l'équation

$$g^2 + n^2 = b^{*2} + c^{*2},$$

on obtient d'une manière analogue, à l'aide de la perpendiculaire abaissée du point O sur le diamètre $O\,A^*$, la relation

$$[g\, a^* \sin (g\, a^*)]^2 + [n\, a^* \sin (n\, a^*)]^2 = [a^*\, b^* \sin (a^*\, b^*)]^2 + \\ + [c^*\, a^* \sin (c^*\, a^*)]^2$$

et puisque $b^*\, c^* \sin (b^*\, c^*) = g\, n \sin (g\, n)$, on obtient encore l'équation

$$[a^*\, b^* \sin (a^*\, b^*)]^2 + [b^*\, c^* \sin (b^*\, c^*)]^2 + [c^*\, a^* \sin (c^*\, a^*)]^2 \\ = [g\, a^* \sin (g\, a^*)]^2 + [n\, a^* \sin (n\, a^*)]^2 + [g\, n \sin (g\, n)]^2.$$

Il suit, en fin de compte, de la relation $a^{*2} + g^2 = c^2 + m^2$, à l'aide d'une perpendiculaire à n, d'une manière analogue

$$[n\, a^* \sin (n\, a^*)]^2 + [n\, g \sin (n\, g)]^2 = [n\, c \sin (n\, c)]^2. + [n\, m \sin (nm)]^2.$$

Comme a^*, g et c, m sont deux couples de demi-diamètres conjugués d'une même conique, on a $g\,a^*\,sin\,(g\,a^*) = c\,m\,sin\,(c\,m)$, de sorte que

$$[c\,m\,sin\,(c\,m)]^2 + [m\,n\,sin\,(m\,n)]^2 + [n\,c\,sin\,(n\,c)]^2$$
$$= [g\,a^*\,sin\,(g\,a^*)]^2 + [n\,a^*\,sin\,(n\,a^*)]^2 + [n\,g\,sin\,(n\,g)],$$

ce qui demontre l'équation (4″).

On aurait pu parvenir à ces équations immédiatement en partant des relations connues qui lient trois demi-diamètres conjugués d'une quadrique centrale. Ces relations ne sont pas changés par l'affinité. Considérons, avec une telle quadrique P^2 une quadrique M^2 qui lui correspond par l'affinité, la direction de l'affinité étant celle des droites projetantes; on peut changer une telle quadrique de sorte que la longueur de son diamètre situé sur la droite projetante diminue indéfiniment jusqu'à ce que la surface coïncide avec le plan de projection, et les théorèmes concernant les demi-diamètres conjugués de P^2 se réduisent à des théorèmes analogues sur leurs projections.

On a, en particulier, en faisant coïncider dans (4″) $O\,C^*$ avec la droite projetante:

$$[a\,b\,sin\,(\acute{a}\,b)]^2 + [b\,c\,sin\,(b\,c)]^2 + [c\,a\,sin\,(c\,a)]^2 = A^2\,B^2. \qquad (4''')$$

Si α_0, β_0 sont les angles que font avec x_1 les diamètres du contour k de longueurs a_0, b_0, et α, β les angles respectifs des demi-axes A, B, les équations (4), (4′) donnent

$$\left.\begin{aligned} a^2\,cos^2\,\alpha_1 + b^2\,cos^2\,\beta_1 + c^2\,cos^2\,\gamma_1 &= a_0^2\,cos^2\,\alpha_0 + b_0^2\,cos^2\,\beta_0 \\ &= A^2\,cos^2\,\alpha + B^2\,cos^2\,\beta \\ a^2\,sin^2\,\alpha_1 + b^2\,sin^2\,\beta_1 + c^2\,sin^2\,\gamma_1 &= a_0^2\,sin^2\,\alpha_0 + b_0^2\,sin^2\,\beta_0 \\ &= A^2\,sin^2\,\alpha + B^2\,sin^2\,\beta \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Donc, si A_1 est la longueur (réelle ou imaginaire) du segment déterminé sur l'axe x_1 par la tangente à k perpendiculaire à cet axe, on a d'aprés (2), $a_0^2\,cos^2\,\alpha_0 + b_0^2\,cos^2\,\beta_0 = A_1^2$, tandis que pour le segment analogue B_1 sur y_1 on a $a_0^2\,sin^2\,\alpha_0 + b_0^2\,sin^2\,\beta_0 = B_1^2$.

Si l'on ajoute les équations (5), on obtient

$$a^2 + b^2 + c^2 = A^2 + B^2 = A_1^2 + B_1^2. \qquad (6)$$

Appelons, d'une manière générale, axe principal de la conique celui qui joint ses foyers réels; par-là on a une définition valable encore pour une conique imaginaire; l'axe principal de cette conique est alors l'axe non principal de l'ellipse réelle qui représente celle-là de la manière connue.

Prenons cet axe pour axe des x; de l'équation (5) résulte, si l'on désigne par α, β, γ les angles $(x\,a)$, $(x\,b)$, $(x\,c)$:

$$a^2\,cos^2\,\alpha + b^2\,cos^2\,\beta + c^2\,cos^2\,\gamma = A^2,$$
$$a^2\,sin^2\,\alpha + b^2\,sin^2\,\beta + c^2\,sin^2\,\gamma = B^2,$$

de sorte qu'on obtient, en désignant par E l'excentricité de la conique k, l'équation

$$a^2\,(cos^2\,\alpha - sin^2\,\alpha) + b^2\,(cos^2\,\beta - sin^2\,\beta) + c^2\,(cos^2\,\gamma - sin^2\,\gamma) = E^2 \qquad (7).$$

3. Les relations trouvées fournissent de simples constructions du contour pour la projection parallèle d'une quadrique, étant données les projections de trois demi-diamètres conjugués $O\,X$, $O\,Y$, $O\,Z$; ces constructions comprennent, comme cas particulier, la construction du théorème de Pohlke.

Si les trois demi-diamètres ont des longueurs réelles, on peut, en tout cas, construire d'abord la tangente au contour parallèle à la projection du troisième demi-diamètre. Soient (fig. 1) $O\,X$, $O\,Y$ les projections des deux premiers demi-diamètres, donc $O\,Z$ celle du troisième. Menons x_1 perpendiculaire à $O\,Z$ et abaissons, des points X et Y, des perpendiculaires sur x: désignons leurs pieds par *1* et *2*. Construisons sur x_1 le point *3* tel que $\overline{O\,3^2} = \overline{O\,1^2} + \overline{O\,2^2}$; la perpendiculaire t abaissée du point *3* sur x_1 touchera, par suite de la relation (5), la courbe k, et par suite de la relation (1), aussi l'ellipse pour laquelle $O\,X$, $O\,Y$ sont des demi-diamètres conjugués. On obtient le point de contact T commun, si l'on coupe la parallèle, menée à $O\,Y$ par le point X symétrique à X_1 par rapport au point O, par la droite t; soit *4* ce point d'intersection. Le point T est l'intersection de t avec la droite parallèle à $O\,4$ par X.

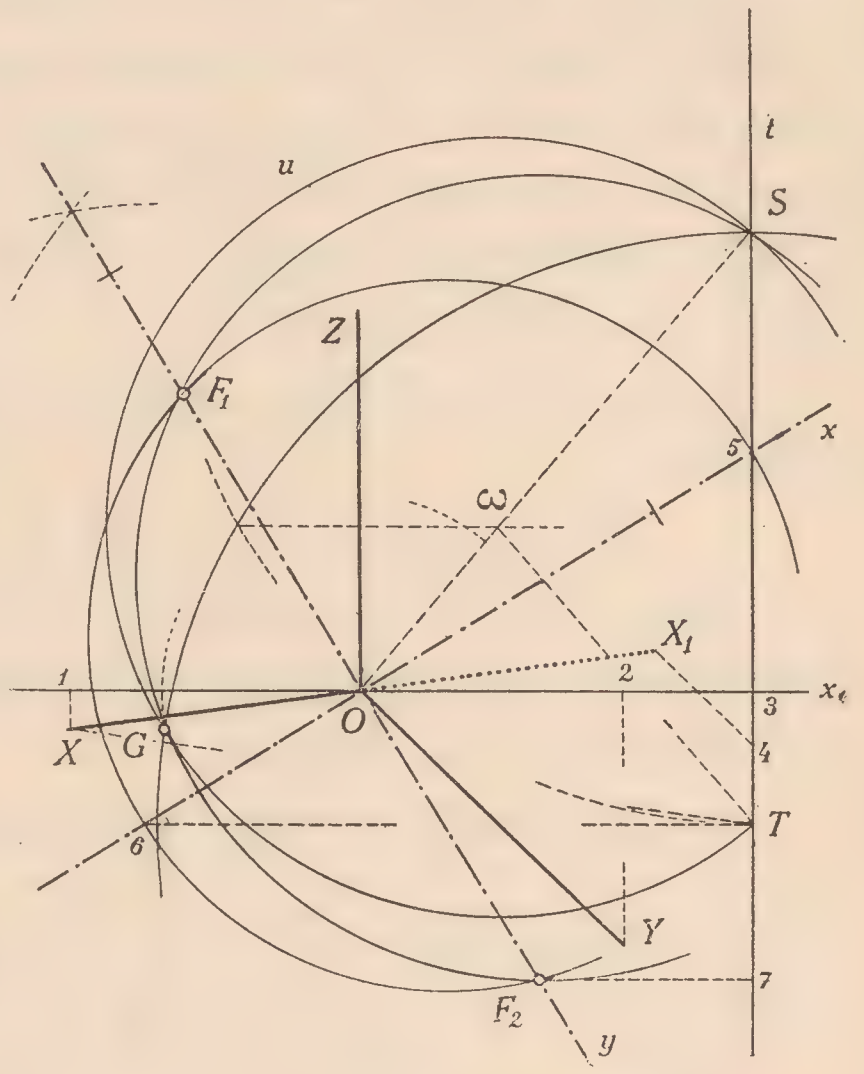


Fig. 1.

Ensuite, on construit sur t la longueur $3\,S$, satisfaisant à la relation $\overline{3\,S^2} = \overline{X\,1^2} + \overline{Y\,2^2} + \overline{O\,Z^2}$; la perpendiculaire v abaissée de S sur $O\,Z$ est encore tangente à la courbe k.

Mais il n'est pas nécessaire de construire cette perpendiculaire ni son point de contact V; il suffit de construire la symétrale des points S et T, qui coupe la droite $O\,S$ au point ω. Comme $\overline{T\,\omega} = \overline{\omega\,V}$, $T\,\omega$ est la polaire du point S par rapport à la conique k. La circonférence u au centre ω et qui passe par le point S est circonscrite au triangle $S\,T\,V$. Les axes de la conique k sont les tangentes menées du point O à la parabole enveloppée par les droites qui sont conjuguées et normales au droites du faisceau S par rapport à k. Le foyer G de cette parabole est situé sur la circonférence u et fait division harmonique avec S par rapport aux points T, V. Par conséquent le point G est symétrique à S par rapport à la droite $T\,\omega$. Comme $O\,S$ est la directrice de cette parabole, les symétrales x et y des droites $O\,G$, $O\,S$ sont, en même temps, axes de la conique k. La circonférence qui passe par les points S, G et dont le centre est situé sur

l'un de ces axes, coupe le deuxième aux foyers de la courbe k. Dans le cas actuel, choisissons pour ce centre l'intersection des droites $T\omega$, x, puisque, alors, la circonférence en question coupe y en deux points réels, F_1, F_2. On obtient ainsi les foyers réels de k. Ou bien, on coupe la droite t et la droite perpendiculaire à celle-ci au point T, par celle des deux droites x, y qui les coupe en des points 5, 6 situés de part et d'autre par rapport au point O; dans notre cas, c'est x. Alors la circonférence au diamètre $5\,6$ coupe y de même aux points F_1, F_2. Par-là, la conique k est parfaitement déterminée; on a, par exemple, $\overline{F_1T} + \overline{F_2T} = 2A$, ou bien, si 7 est le pied de la perpendiculaire abaissée de F_2 sur t, on a $O\,7 = A$.

4. Les relations (5) fournissent la construction des tangentes à la courbe k, étant donnée arbitrairement leur direction. En effet, faisons passer par le point O une droite x_1 perpendiculaire à la direction donnée, et déterminons, sur x_1, les points $\overline{A_1}$, $\overline{A_1}'$, de sorte que

$$a^2 \cos^2 \alpha_1 + b^2 \cos^2 \beta_1 + c^2 \cos^2 \gamma_1 = A_1^2,$$

où l'on a posé $O\,\overline{A_1} = \overline{A_1}'\,O = A_1$. Si l'on fait tourner x_1 autour de O, les points $\overline{A_1}$ remplissent la podaire de la conique k pour le centre O comme pôle. Si φ est l'angle des deux droites x, x_1, on a pour k, d'après (1):

$$A^2 \cos^2 \varphi + B^2 \sin^2 \varphi = A_1^2;$$

donc, O étant pôle et $+x$ l'axe et ϱ désignant le rayon vecteur, l'équation de la podaire qui vient d'être mentionnée est, en coordonnées polaires

$$\varrho^2 = A^2 \cos^2 \varphi + B^2 \sin^2 \varphi,$$

ou bien, en coordonnées orthogonales

$$(x^2 + y^2)^2 - (A^2 x^2 + B^2 y^2) = 0.$$

Le rayon ϱ' perpendiculaire à $O\,\overline{A_1}$ satisfait à la relation $\varrho'^2 = A^2 \sin^2 \varphi + B^2 \cos^2 \varphi$. Construisons sur $O\,\overline{A_1}$ un point P de sorte que $O\,P^2 = O\,\overline{A_1}^2 - O\,\overline{B_1}^2$, où $\varrho' = O\,\overline{B_1}$. Si x_1 tourne autour de O, le point P décrit une courbe p, pour laquelle $r^2 = O\,P^2 = \varrho^2 - \varrho'^2$; donc, l'équation, en coordonnées polaires, de la courbe p est

$$r^2 = A^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + B^2 (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi),$$

ou bien

$$r^2 = E^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi).$$

Transformons cette courbe par inversion, la circonférence $x^2 + y^2 = e^2$ étant cercle d'inversion; on obtient ainsi une courbe p^*, dont l'équation polaire est

$$e^4 : \varrho^2 = E^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi),$$

l'équation en coordonnées orthogonales

$$x^2 - y^2 = (e^2 : E)^2.$$

La courbe p^* est une hyperbole équilatère ayant en commun avec k le centre et l'axe principal. Si s est la longueur du demiaxe réel de l'hyperbole p^*, son équation donne $s\,E = e^2$, de sorte que les foyers de la courbe k sont les points inverses aux sommets de l'hyperbole. On parvient ainsi à la construction qui suit.

5. Nous exécuterons cette construction (fig. 2) pour le cas d'un hyperboloïde à deux nappes, dont on connait les projections $O\,X_i = a_i$ $O\,Y_i = b$, $O\,Z = c$ de trois demi-diamètres conjugués, $O\,X_i$ et $O\,Y_i$ étant imaginaires.

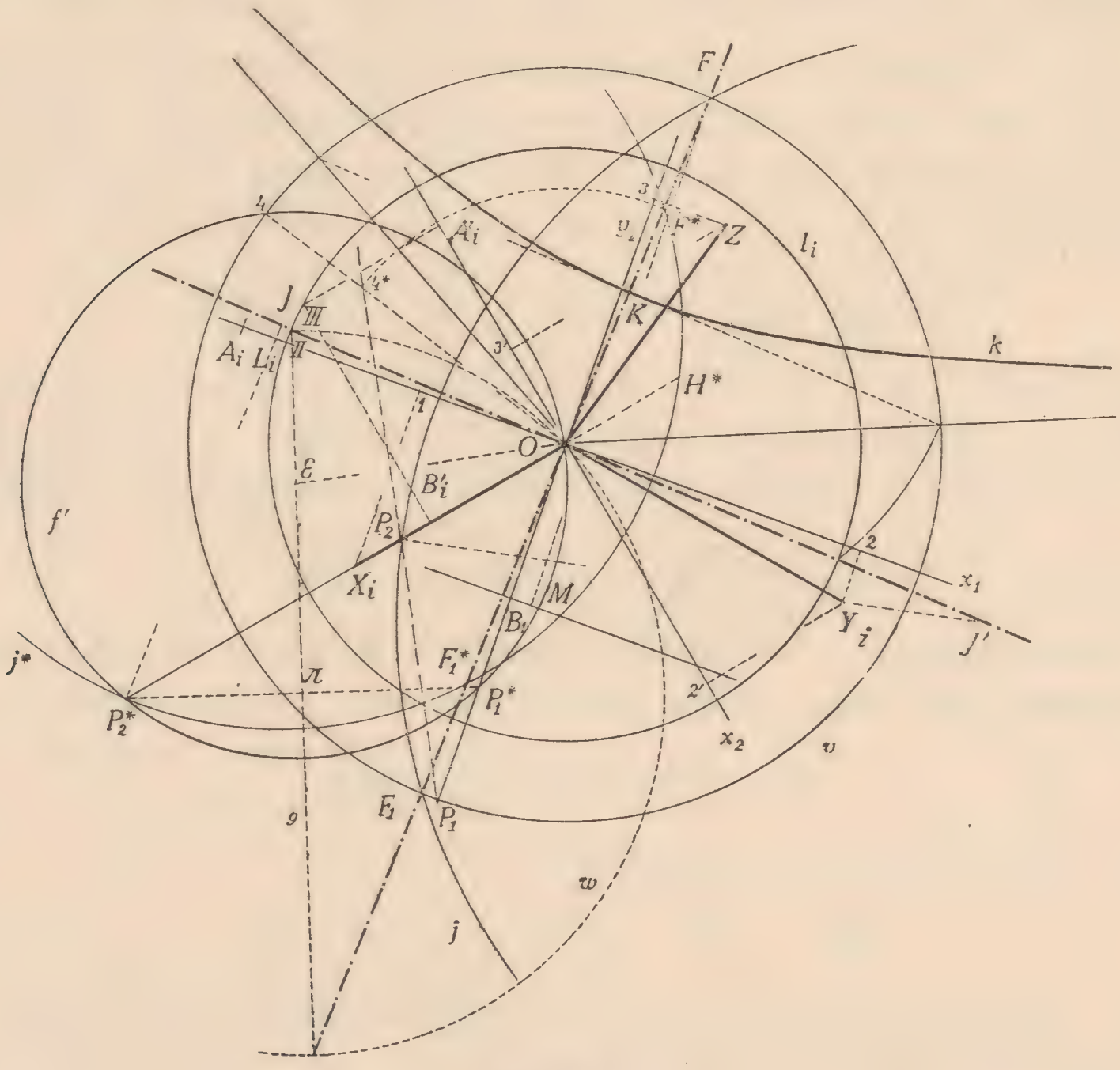


Fig. 2.

x_1 est une droite arbitraire menée dans le plan de projection par le point O; y_1 est perpendiculaire à x_1 en ce point. Soient *1* et *2* les pieds des perpendiculaires abaissées de X_i, Y_i sur x; *3* le pied de la perpendiculaire Z sur y. On a $\overline{O\,A_1}^2 = -\overline{O\,I}^2 - \overline{O\,2}^2 + \overline{Z\,3}^2 = -\overline{O\,A_i}^2$. Nous avons construit, ainsi, la longueur réelle $O\,A_i$, mésurée sur x_1 à partir du point O. On a, de plus

$$\overline{O\,B_1}^2 = -\overline{X_i\,I}^2 - \overline{Y_i\,2}^2 + \overline{O\,3}^2 = O\,B_1^2;$$

ici, la longueur $\overline{O\,B_1}$ est réelle et nous l'avons transportée en $O\,B_1$ sur y. On a de plus $A^2 + B^2 = \overline{O\,B_1}^2 - \overline{O\,A_i}^2 = \overline{O\,L}$; donc, si l'on construit sur x_1 un point L_i tel que $\overline{O\,L_i}^2 = \overline{O\,A_i}^2 - \overline{O\,B_1}^2$, on a $A^2 + B^2 = -\,O\,L_i^2$ et le cercle l au centre O et au rayon $i\,.\,O\,L_i$, représenté par le cercle l_i concentrique et passant par le point L_i, est le lieu des points d'où l'on

peut mener à k des tangentes perpendiculaires. Le point P_1 sur y_1, pour lequel on a, dans le cas actuel, $\overline{O\,P_1}^2 = \overline{O\,A_i}^2 + \overline{O\,B_1}$, appartient à la courbe ϕ. Exécutons des constructions analogues pour deux autres perpendiculaires par le point O dans le plan de projection contenant x_2, y_2. Choisissons, p. ex., $x_2 \perp O\,X_i$. On obtient ainsi, sur x_2 les pieds $2'$, $3'$ des perpendiculaires abaissées de Y_i, et de Z, et le point A_i', représentant le point imaginaire A_2 qui satisfait à la relation $-\overline{O\,2'}^2 + \overline{O\,3'}^2 = \overline{O\,A_2}^2$ et sur $O\,X_1$ on obtient le point B_i' représentant le point imaginaire $\overline{B_2}$ et satisfaisant à la relation $\overline{Z\,3'}^2 - \overline{O\,X_i}^2 - \overline{Y_i\,2'}^2 = \overline{O\,B_2}^2$, de sorte que le point P_2 sur $O\,X_i$, pour lequel $\overline{O\,P_2}^2 = -\overline{O\,B_i'}^2 + \overline{O\,A_i'}^2$, apartienne, de même, à la courbe ϕ. Si III est le point d'intersection du cercle l_i avec la parallèle menée à $O\,Y_i$ par A_i', on a $O\,B_i' = A_i'\,III$ et, par suite $\overline{O\,P_2}^2 = \overline{O\,A_i'}^2 - \overline{A_i'\,III}^2$, ce qui simplifie la construction du point P_2.

Or, menons par le point O une circonférence f' ayant son centre ε sur la perpendiculaire abaissée du point O sur la droite $P_1\,P_2$; cette circonférence correspond à la droite $P_1\,P_2$ dans une certaine inversion, celle pour laquelle O est le centre d'inversion et dont le cercle d'inversion passe par les points d'intersection de $P_1\,P_2$ et de la courbe f'. Les droites $O\,P_1$, $O\,P_2$ coupent f' en des points P_1^*, P_2^* qui sont les inverses de P_1, P_2. L'hyperbole équilatère ϕ^* passe par les points P_1^*, P_2^* et son centre est O; par-là elle est déterminée. Soit q la symétrale des points P_1^*, P_2^* et le centre π du segment $P_1^*\,P_2^*$; construisons la circonférence w au centre π et passant par le point O. Ses point d'intersection avec la droite $P_1^*\,P_2^*$ appartiennent aux asymptotes de l'hyperbole ϕ^*, par conséquent les points d'intersection I, II de q avec w appartiennent à ses axes; l'axe principal se trouve sur $O\,I$, à laquelle la distance des points P_1^*, P_2^* est moindre qu'à $O\,II$. Si J est le pied de la perpendiculaire abaissée de P_2^* sur $O\,II$, le cercle j^* au centre J passant par le point P_2^* coupe $O\,I$ aux sommets F^*, F_1^* de l'hyperbole ϕ^*. Leurs inverses dans l'inversion considérée sont les foyers F, F_1 de la courbe k. On les obtient en tenant compte de ce que cercle j^* correspond, dans l'inversion considérée, au cercle j dont le centre est situé sur $O\,J$, O étant leur centre de similitude. Si la droite $O\,P_2^*$ coupe le cercle j^* encore au point H^*, ce point correspond, dans cette homothétie, au point P_2 sur j; donc, la droite menée parallèlement par le point P_2 à $H^*\,J$ coupe $O\,II$ au centre J' du cercle j; ce cercle, passant encore par le point P_2, se trouve ainsi déterminé. Par conséquent, le cercle j coupe $O\,I$ aux foyers cherchés F, F_1. La courbe k est ici une hyperbole; soit K un de ses sommets et K_i l'extrémité de l'axe latéral. Comme $E^2 = A^2 - B^2$, $-\overline{O\,L_i}^2 = A^2 + B^2$, on aura $2\,A^2 = E^2 - \overline{O\,L_i}^2$. Donc, si $\overline{F\,T}$ est la puissance du point F par rapport au cercle l_i, on a $\overline{O\,K} = \overline{F\,T} : \sqrt{2}$ et $\overline{O\,K_i}^2 = \overline{O\,K}^2 + \overline{O\,L_i}^2$, de sorte que le cercle au centre K, et qui coupe l_i aux points de son diamètre, coupe le cercle au centre O, passant par les foyers F, F_1 aux points appartenant aux asymptotes de la courbe k, qui se trouve, ainsi, parfaitement déterminée. Des tangentes à la courbe k

que nous avons construites, celle qui passe par le point B_1 est réelle; si M est le pied de la perpendiculaire abaissée sur elle du point F, on a aussi $O\,M = O\,K$, ce qui fournit, en ce cas encore, une détermination plus simple du point K. On parviendrait à une simplification de la construction si l'on construisait la circonférence v^* au diamètre $F^*\,F_1^*$ et si l'on déterminait son cercle inverse v; ce qu'on pourrait faire p. ex. en trouvant le point 5 inverse au point 5^* d'intersection des cercles v^*, f'; ce point est l'intersection de la droite $O\,5^*$ avec la droite $P_1\,P_2$ et il appartient au cercle v. Dans la figure v^* coupe la droite $P_1\,P_2$ au point 4^* que nous avons employés; en effet, la droite $O\,4^*$ coupe f' encore au point 4 qui appartient, celui-ci aussi, au cercle v. La perpendiculaire en K à l'axe $O\,K$ coupe v aux points appartenant aux asymptotes de la courbe k.

Les axes $O\,I$, $O\,II$ une fois connues, nous aurions pu, bien entendu, construire K et K_i aussi à l'aide de (5) comme des points situés sur les tangentes de l'hyperbole k perpendiculaires à $O\,I$ et $O\,II$.

Les failles inverses longitudinales du Barrandien.

Résumé du texte tchèque.

Par

ODOLEN KODYM.

(Avec 5 planches.)

Présenté le 11 Janvier 1924.

Lorsque, en janvier 1921, j'ai présenté dans les „Rozpravy České Akademie" mon essai intitule „Notices sur les failles inverses longitudinales du Barrandien" le manuscrit était presque deux fois plus long que l'ouvrage imprimé. A cette époque les conditions d'impression ne permettaient pas de publier l'essai entier et j'avais dû l'abréger. Les pages qui suivent sont destinées à compléter mon essai d'alors.

I.

Inclinaison des plans des failles inverses longitudinales.

L'un des critères principaux pour juger et analyser une *dislocation* et surtout une dislocation *longitudinale,* est l'orientation et l'inclinaison du plan de la dislocation. Malheureusement les plans des dislocations ne sont visibles que très rarement, car ils sont la plupart du temps recouverts d'éboulis. Le plus souvent nous nous sommes convaincus de l'existence d'une dislocation seulement d'après la carte géologique qui, en pratique, ne nous montre l'inclinaison de la dislocation que dans un terrain fortement différencié au point de vue morphologique, là où il y a de grandes *différences dans les altitudes relatives,* là où l'inclinaison du plan de la dislocation est *fort éloignée de 90°.*

C'est le cas dans le Barrandien. Les grandes failles inverses longitudinales, dont la direction en divers endroits est h 4—5 en moyenne, n'affleurent que dans quelques endroits qui échappent facilement à notre attention. Pourtant le petit nombre d'endroits connus suffisait à la plupart des géologues travaillant dans le paléozoïque inférieur de la Bohême centrale, pour représenter l'inclinaison des failles inverses longitudinales

comme étant approximativement de 90° et *plus forte que l'inclinaison des couches avoisinantes.* Mais l'essai récent publié par M. Sokol dans le Centralblatt[1]) témoigne que la question n'est pas encore assez élucidée pour tous et qu'il faut rendre la plus claire.

La plupart des anciens géologues se contentaient de constater une dislocation, mais ils ne se souciaient pas trop de son inclinaison. Bien qu'ils représentassent les plans des dislocations toujours avec une *inclinaison plus forte* que l'inclinaison des couches avoisinantes, ils les représentaient tantôt inclinés *dans le même sens,* tantôt inclinés *en sens contraire.* Par exemple Krejčíet Helmhacker[2]) représentent dans leurs coupes les dislocations inclinées tantôt dans le même sens, tantôt en sens contraire. C'est la même chose avec Lipold[3]), avec Vála et Helmhacker,[4]) avec Pošepný et d'autres.

Ce n'est pas même la synthèse tectonique de Krejčí et Feistmantel[5]) qui nous aurait renseigné sur l'inclinaison des plans des dislocations, car bien qu'ils aient reconnu le groupe des dislocations longitudinales et suivi les sept dislocations principales de ce groupe, ils *ne se prononcent nulle part* systématiquement sur l'inclinaison des plans des dislocations. Dans leurs coupes souvent correctes, les dislocations plongent ou *dans le même sens* que les couches, ou elles sont *verticales,* ou elles plongent *en sens contraire* des couches. Mais toujours l'inclinaison des plans des dislocations est plus forte que celle des couches avoisinantes.

L'école allemande représentée par Seemann, Liebus, Nowak et Wähner, envisageait les dislocations longitudinales du Barrandien tout autrement. Dans sa publication sur le Dévonien au SW de la Berounka, F. Seemann[6]) ne représentait plus les failles inverses longitudinales comme ayant une inclinaison de près de 90° et il commençait à les considérer comme des *plis-failles* avec une inclinaison faible, à peu près la même que *l'inclinaison des couches avoisinantes.* Mais j'ai déjà démontré que cette opinion est fausse.[7]) En outre, *Seemann* décrit aussi quelques dislocations longitudinales à *forte* inclinaison (*faille inverse du ravin de Koda*).

---

[1]) R. Sokol, Zur Beurteilung der Längsstörungen im mittelböhmischen Faltengebirge. Centralblatt f. Min. etc. 1923, pp. 556-561.

[2]) Krejčí-Helmhacker, Erläuterungen zur geologischen Karte von Prag. Archiv für die naturwiss. Durchforschung von Böhmen. IV. Prague.

[3]) M. V. Lipold, Die Eisensteinlager der silurischen Grauwackenformation i. Böhmen. Jahrbuch d. k. k. geolog. Reichsanstalt, XIII. Vienne 1863.

[4]) Vála-Helmhacker, Das Eisensteinvorkommen zwischen Prag und Beraun. Archiv 2ème partie.

[5]) Krejčí-Feistmantel, Orographische und tektonische Übersicht des Silurgebietes im mittleren Böhmen. Archiv f. naturawiss Durchf. v. Böhmen 1885 Prague.

[6]) Fritz Seemann, Das mittelböhmische Obersilur- und Devongebiet südwestlich der Beraun. Beiträge zur Paläontologie etc. t. XX. Vienne 1907.

[7]) O. Kodym, Kritické poznámky k Seemannovu výkladu tektoniky staršího paleozoika jižně od Berouna. Sborník Čes. Spol. Zeměvědné 1919.

Après *F.* Seemann dont les recherches étaient influencées par la tectonique des Carpathes d'Uhlig, E. Nowak[8]) se fit le champion des failles inverses à faible inclinaison. Dans sa publication, il représentait toutes les dislocations comme *parallèles à l'inclinaison des couches* ou bien avec une inclinaison plus faible. Puis dans sa notice de l'année 1915[9]), le même auteur devenait extrême dans ses opinions, sur lesquelles M. R. Kettner[10]) et l'auteur de ces lignes[11]) ont d'ailleurs déjà émis leur avis.

Enfin A. Liebus en arrivait dans ses travaux, et surtout dans le dernier[12]) à l'opinion que la *structure du Paléozoïque du centre de la Bohême est isoclinale* et sous cette impression, il dessinait des *plis-failles à faible inclinaison.* La critique de M. R. Kettner[13]) établie par des études stratigraphiques très exactes démontre que l'opinion de Liebus est insoutenable.

La publication de Wähner[14]) est pour la plus grande partie plutôt un guide bibliographique et une application des riches expériences que l'auteur avait faites dans les Alpes aux conditions du centre de la Bohême, qu'un exposé de ses expériences du Barrandien même. Quoique cette publication soit assez importante, il est impossible de résoudre d'après elle le problème de l'inclinaison des plans des failles inverses du Barrandien.

Contrairement à l'école allemande, presque tous les géologues tchèques contemporains insistaient sur la forte inclinaison des plans des dislocations, même en admettant quelquefois l'existence de *plis isoclinaux.* Avec cela, ils soulignaient tous le *caractère tangential* de ces dislocations. C'était surtout Kettner, en partie Woldřich, puis Matějka, Kodym et d'autres dans un grand nombre de publications.

La meilleure base pour la discussion de l'inclinaison des plans des dislocations dans le Barrandien est donnée par les observations faites là où il est possible de *mesurer* le plan de la dislocation.

Une des dislocations principales du Barrandien se trouve être la *faille* dite „*Rozsedlina jílová*" (= faille *glaiseuse*) qui s'étend de *Bohutín*

---

[8]) E. Nowak, Geologische Untersuchungen im Südflügel des Mittelböhmischen Silur. Jahrbuch d. k. k. geolog. Reichsanstalt, t. 64, Vienne, 1914.

[9]) Ernst Nowak, Neue Anschauungen über die Tektonik des mittelböhmischen Altpaläozoikums. Zentralblatt f. Mineral. etc. 1915, no 10.

[10]) Dans le rapport sur l'ouvrage de E. Nowak dans le Sborník české spol. zeměvědné.

[11]) A la fin de l'essai l. c. 7.

[12]) A. Liebus, Geologische Studien am Südostrande des Altpaläozoikums in Mittelböhmen, Jahrb. d. k. k. geol. Reichsanst. t. 63, Vienne, 1914.

[13]) R. Kettner, Bemerkungen zu einigen neueren Arbeiten über das ältere Paläozoikum Mittelböhmens, Ie partie. Verhandlungen der k. k. geolog. Reichsanstalt, 1918, Vienne.

[14]) F. Wähner, Zur Beurteilung des mittelböhmischen Faltengebirges. Jahrbuch d. k. k. geolog. Reichsanst., t. 66, Vienne 1916.

par *Březové Hory* près de Příbra jusqu'à Dobříš et à la maison de garde-chasse de Brodec, d'une longueur d'environ 30 kilomètres. Elle est connue depuis longtemps et a été mentionnée par Krejčí et Feistmantel,[15]) Pošepný et d'autres. Cette dislocation cause la répétition des couches *cambriennes* et *algonkiennes*, qui y forment des zones: la Ière *zone de grauwackes* (Cambrien) et la IIème zone de schistes (Algonkien). Dans le voisinage de la faille glaiseuse, les couches cambriennes et algonkiennes plongent vers le NW suivant la direction de la faille elle-même, h 4. La faille glaiseuse a été mise à nu et percée en beaucoup d'endroits à Příbram, à Březové Hory ainsi qu'à Bohutín dans les mines de l'Etat, et son inclinaison nous est parfaitement connue. D'après la coupe détaillée de R. Kettner fondée sur des travaux dans les mines,[16]) la faille glaiseuse est inclinée *suivant un angle de 75⁰ vers le NW* (voir planche IV.). La structure des couches cambriennes dans le mur de la faille glaiseuse, c'est à dire au SE de ladite faille est remarquable. Tandis que dans la partie NE de la Ière zone de grauwackes aux environs de *Dobříš* les *couches cambriennes ont une inclinaison monoclinale vers le NE*, nous voyons dans les environs de *Příbram* et surtout dans les mines des Březové Hory, que le Cambrien commence à former un *synclinal*. En avançant des *Březové Hory* vers Bohutín, *le synclinal cambrien devient de plus en plus net et en même temps le rejet produit par la faille glaiseuse diminue jusqu'à ce que cette dislocation disparaîsse compl tement.*

Dans les mines des Březové Hory, R. Kettner[17]) a démontré que le Cambrien dans le mur de la faille glaiseuse est traversé par des *dislocations assez nombreuses* (il en a indiqué 13) dont l'inclinaison est beaucoup plus faible que celle de la faille glaiseuse, mais qui par leur tendance se rapprochent quelquefois de la faille glaiseuse. car *le plus souvent*, elles donnent lieu à des *surélévations du NW vers le SE*. L'inclinaison des plans de ces dislocations est de 35⁰ à 50⁰ (voir planche IV.).

Dans le flanc nord du Barrandien, les travaux des mines nous ont fourni encore un renseignement précieux sur un plan de dislocation qui s'est révélé dans la mine de fer de *Hrouda près de Zdice*. Il y a quelques années, le plan de la dislocation était accessible et il a été photographié par M. R. Kettner (voir pl. III, fig. 1.). Cette vue nous montre les couches de Zahořany $d\varepsilon$, dans lesquelles une lentille de minerai de fer oolithique est intercalée. Le milieu de la photographie est parcouru par une dislocation inclinée suivant un angle de 45⁰ vers le SE. Les couches du mur de la dislocation plongent suivant un angle d'environ 20⁰ également vers le SE, tandis que les couches du toit de la dislocation plongent très faiblement dans le même sens. Cette dislocation représente les *plis-failles*

---

[15]) l. c. 5.

[16]) R. Kettner, Nový geologický profil příbramskými doly a příbramským kambriem. Sborník Česk. společnosti zeměvědné 1918.

[17]) l. c. 16.

du Barrandien. Nous voyons aussi que les couches des deux massifs, dans le mur et le toit, sont *visiblement courbées en synclinal et anticlinal* et *redressées,* indiquant ainsi leur *continuité* originale et permettant de supposer que cette dislocation est issue d'un vrai pli-faille par la *réduction du flanc médian de la faille.*

Il existe une autre dislocation de position symétrique à celle de la faille glaiseuse dans *l'aile NW du Barrandien.* Elle sert de limite entre l'îlot silurien et l'Algonkien sur la rive droite de la Berounka entre *Stradonice* et *Kublov.* Sa continuation n'est pas aussi nette et visible que celle de la faille glaiseuse, car elle parcourt en partie aussi *l'Algonkien,* de façon qu'elle n'est pas indiquée dans la carte géologique. Dans cette partie du Barrandien, il existe 4 îlots siluriens: *Hřeben, Dlouhá skála, Velíz* et *Krušná hora,* qui se continuent par l'éperon silurien *de Stradonice.* Il semble que tous ces îlots sont parcourues par une *grande dislocation longitudinale,* qui a causée la surélévation du massif SE ou peut-être l'abaissement du massif NW. Cette dislocation est très nette dans l'éperon de Stradonice, sur le *Velíz,* à *Kublov* et sur la *Krušná Hora.* A l'extrémité NE de l'îlot de la Krušná Hora, à Nový Jáchymov, l'existence de cette dislocation a été prouvée au cours de l'exploitation du minerai de fer oolithique de la zone de Komárov $d\,\beta$, car au SE la continuation du gîte est interrompue par la dislocation. Cette dislocation a la même direction que les couches (environ h 4) et une inclinaison approximative de 90°. Sur la dislocation, un puits a été foncé qui a prouvé que le plan de la dislocation n'est *pas droit,* qu'il montre des *déformations ondulatoires,* mais que l'inclinaison est toujours d'à peu près 90°. Sur le plan entier de la dislocation, on a trouvé des traces du minerai, qui a été redressé. Mais *la continuation du gîte au delà de la dislocation n'a pas été découverte.* Cette dislocation dont l'existence a été établie à Nový Jáchymov au cours de l'exploitation, n'est probablement point la dislocation principale, qui parcourt les îlots siluriens déjà mentionnés, mais sans doute, elle l'accompagne. De son inclinaison on peut inférer *l'inclinaison de la dislocation principale,* car elle est tout près, et a la même signification (le massif NE est situé relativement plus bas que le massif SE).

Il semble qu'il faille chercher son origine dans un *phénomène accessoire* ayant accompagné la formation de la dislocation principale et s'étant produit *dans le même temps* et sous *l'influence des mêmes forces.*

Quelques autres dislocations longitudinales sont accessibles *dans la région du Silurien supérieur et du Dévonien de la vallée de la Berounka.* La première d'elles, accessible *sur la rive gauche de la Berounka* entre la gare de Beroun et Tetín, s'étend dans le flanc nord du Barrandien avec une direction ENE-WSW (h 5). Cette dislocation explique l'apparente puissance considérable de la zone de Liteň $e\,\alpha$ entre Sv. Jan pod Skalou et Lištice et limite l'îlot de calcaires de *Budňany,* de *Lochkov* et de *Koněprusy* sur les *Herinky* vers le SE. Selon cette dislocation, le massif SE

a éte surélevé au-dessus du massif NW. *Le plan de cetıe dislocation* apparaît au poteau kilométrique 37·4 de la route, au-dessus de la tranchée de chemin de fer. *La direction du plan de la dislocation est ici h 5½, l'inclinaison 80⁰ vers le Sud.* Le plan de la dislocation moıtre des *déformations en forme de bosse.* Au mur de la dislocation (au nord de ladite dislocation) des *calcaires cristallins* stratifiés affleurent. Ces calcaires représentent le *terme supérieur des calcaires* de Butovice $e\,\alpha_3$ ou plutôt ils font déjà partie des *calcaires de Budňany* $e\,\beta$. Dans la partie supérieure de l'affleurement, ces calcaires forment un *synclinal local* qui épouse le plan de la dislocation et apparemment le résultat d'un phénomène *accessoire* de la formation de la dislocation. Au toit du plan de la dislocation (au Sud) des *tufs diabasiques* affleurent, plongeant suivant un angle de 65⁰ vers le sud. La dislocation est représentée dans la fig. 1 pl. I.

Si nous observons l'allure tectonique des couches en aval de la Berounka par *Tetín* jusqu'à *Srbsko,* il est impossible de ne pas observer dans les carrières de la Société anonyme Pražskoželezářská společnost et en amont de l'embouchure du *Kačák* une petite dislocation, mise à nu sur les deux rives de la *Berounka.* Sur la rive droite, elle affleure au poteau kilométrique 35·2. Le plan de la dislocation n'est point incliné aussi fortement que celui de la dislocation précédente, mais plonge faiblement *vers le Nord* suivant un angle d'environ *30⁰*. (Nous sommes déjà là dans le flanc sud du Barrandien.) Les couches au mur du plan de la dislocation sont inclinées suivant un angle d'environ 10⁰ vers le Nord, et au toit nous notons aussi une inclinaison de 8⁰ à 10⁰ vers le Nord. *C'est donc que le plan de la dislocation est ici aussi plus fortement incliné que celui des couches avoisinantes.* Dans le sens de cette dislocation, les marbres de Slivenec ont été portés par-dessus des calcaires de Řeporyje, qui, en cet endroit, constituent le toit des marbres de Slivenec, et les calcaires de Koněprusy (dans la partie inférieure du mur) ont été *surélevés* au-dessus du terme inférieur de la zone $g\,\alpha$. La même dislocation est aussi visible dans la carrière située sur l'autre rive du fleuve en amont de l'embouchure du *Kačák.* Là, l'inclinaison du plan de la dislocation a été évaluée à *40⁰ vers le Nord.* Les calcaires de Koněprusy qui constituent le mur de la dislocation plongent faiblement vers le Nord suivant un angle d'environ 5⁰, et les marbres de Slivenec au toit de la dislocation plongent de même suivant un angle de 8⁰ à 25⁰ pareillement vers le Nord. *L'inclinaison variable des calcaires dévoniens* en ce lieu a pour cause que les couches y forment *un faible anticlinal, parcouru par la faille mentionnée.*

A peu de distance au Sud de cette faille juste en aval de l'embouchure du Kačák, le plan d'une autre dislocation longitudinale affleure. Cette dislocation parcourt la pente méridionale du *Doutnáč* près de *Bubovice* dans le district de *Koda,* au Sud de *Tetín.* Sa longueur entière peut être évaluée à 6 ou 7 kilomètres. Dans le sens de cette dislocation un mouvement a eu lieu, à la suite duquel le *massif septentrional* se trouve

placé *plus haut* que le *massif méridional.* Car cette dislocation, fait confiner la zone *f* du massif septentrional aux calcaires de Bráník du massif méridional, et les couches inférieures de la zone *g α* du massif septentrional aux couches supérieures de la même zone du massif méridional. Le plan de cette dislocation est très visible sur le versant de la vallée de la *Berounka* et sépare là l'embouchure du Kačák l'éperon rocheux de la rive gauche, du reste du massif rocheux. *Sa direction est h 5½, son inclinaison 85⁰ Sud (quoiqu'elle soit située dans le flanc méridionale du Barrandien*!). Au Nord de la dislocation, nous trouvons les marbres de Slivenec, plongeant suivant un angle de *30⁰ vers le Nord,* au Sud, les calcaires de Řeporyje, qui forment là le mur des marbres de Slivenec, plongeant *suivant un angle de 10⁰ vers le Nord. Mais dans le mur m me de la dislocation,* ils sont *retroussés* presque verticalement et dans les parties supérieures de l'affleurement, ils forment *un petit synclinal.* Sur le plan de la dislocation lui-même, on distingue *le retroussement des calcaires de Řeporyje,* les phénomènes de *friction* et beaucoup de *diaclases* remplies de calcaire cristallin secondaire. Cet affleurement est représenté dans la pl. I. fig. 2. La même dislocation affleure encore une fois au NE de la vallée de la Berounka, dans la tranchée de la route de Srbsko à Hostím, sur la rive gauche du Kačák, à WSW de la côte 429. Cet affleurement est situé un peu plus au Nord que nous ne l'attendrions d'après la direction du plan de la dislocation dans la vallée de la Berounka. Car une dislocation transversale est située entre les deux affleurements. Sur la route de Srbsko à Hostím, nous avons mesuré ces inclinaisons: Le plan de la dislocation a une inclinaison *de 75⁰ à 80⁰* vers le *Nord.* Au mur (Sud) du plan de la dislocation, les calcaires compacts de la vallée de Saint-Procope affleurent, avec la direction h 3½ et une inclinaison de 25⁰ vers le NW. Les calcaires du terme inférieur de l'étage *g α* (de Řeporyje), affleurant au Nord de la dislocation, ont la direction normale de h 2—2½ et plongent suivant un angle de 60⁰ vers le NW. Il est remarquable que dans l'affleurement de la vallée de la Berounka, le plan de cette faille inverse plonge suivant un angle de *85⁰ vers le Sud,* tandis que sur la route Srbsko-Hostím, il est incliné suivant un angle de *75⁰ à 80⁰ vers le Nord.* Cette anomalie s'explique facilement après l'examen attentif de l'affleurement de la vallée de la Berounka. Au fond de l'affleurement dans la pente il y a une *dislocation transversale peu importante* qui a causé seulement un déplacement des couches de quelques mètres mais qui a produit cependant l'anomalie visible dans l'inclinaison de la dislocation longitudinale plus ancienne.

Tout près de ce plan de dislocation, dans la vallée de la Berounka, en aval de l'embouchure du *Kačák,* une *surélévation* de tous points semblable affleure à la borne kilométrique 35·2 en amont de l'embouchure de ce ruisseau. Le plan de cette faille plonge suivant un angle de 30⁰ vers le Nord; les calcaires de Řeporyje dans son mur et son toit ont une inclinaison de 10⁰, pareillement vers le Nord. Il n'est pas possible de

déterminer exactement l'amplitude de cette dislocation, mais sans doute, elle est peu importante. Cette dislocation est également représentée sur la pl. I., fig. no 2.

A mi-chemin, entre *Sv. Jan pod Skalou* et *Hostím*, sur la rive gauche du Kačák, près de la route, une *dislocation* fort intéressante quoique petite affleure dans les calcaires de Bráník $g\alpha$ (voir fig. no 1, p. 8). Elle est située dans le *flanc Nord du Barrandien, quoique, cependant un mouvement de direction Nord-Sud s'y soit produit.* Là les calcaires de Bráník plongent *très faiblement vers le Sud* et sont parcourus par une *dislocation à faible inclinaison vers le Nord.* L'amplitude du mouvemeent est de 4 à 5 mètres. Pour la structure du Barrandien entier, ce pli-faille est sans importance, toutefois, il révèle les traces d'une tectonique Alpine dans la région paléozoïque du centre de la Bohême.

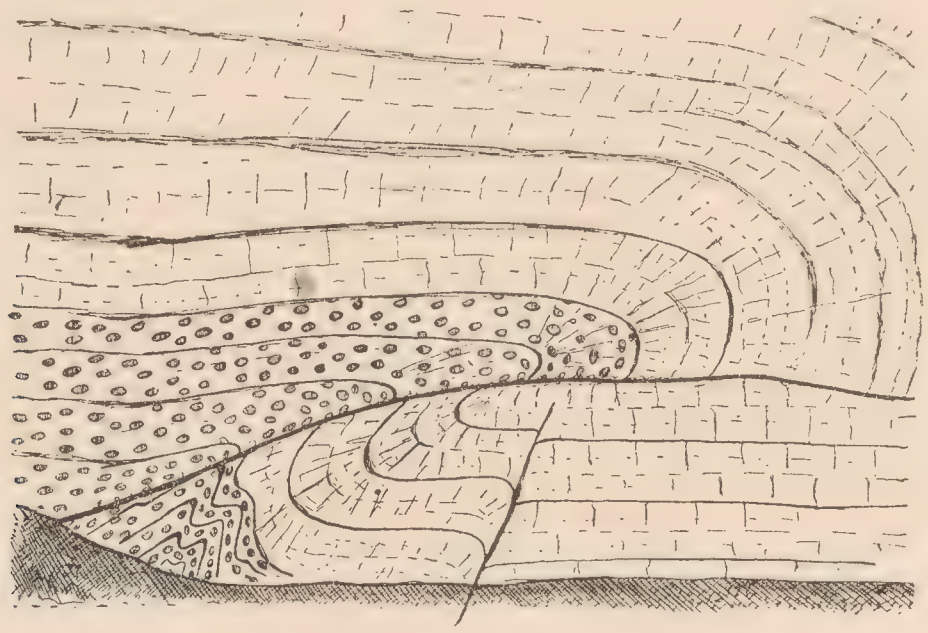


Fig. 1. *Faille longitudinale dans les calcaires de Bráník* ($g\alpha$) à *la rive gauche de Kačák* entre Srbsko et Sv. Jan p. Skalou. Les calcaires noduleux sont plus agés que les calcaires massifs avec des calcschistes.

Une seconde faille toute semblable, mais aussi d'une nature purement locale, affleure *à droite de la route de Srbsko à Sv. Jan pod Skalou,* près du village de *Hostím,* dans la zone de Srbsko h. Le plan de cette dislocation plonge suivant un *angle d'environ 25⁰ vers le Nord,* les couches de Srbsko dans le toit de la dislocation plongent sous un angle d'environ 20⁰, pareillement vers le Nord ; dans son mur, un *petit synclinal renversé* affleure, dont le flanc Nord plonge suivant un angle de 80⁰ vers le Nord, le flanc Sud suivant un angle de 20⁰ pareillement vers le Nord. Cette dislocation est encore remarquable comme exemple de plis-failles d'une nature locale dans le Barrandien.

Les carrières de l'îlot calcaire de Koněprusy (*calcaires employés pour la fabrication de la chaux de saturation*) nous fournissent l'un des meilleurs types de plan de dislocation longitudinale.

Une des dislocations longitudinales bordant le groupe de Koněprusy au NE est très visible dans la carrière située au SE de *Koněprusy,* à gauche

de la route de *Beroun* à *Měnany,* sur la pente NE du Kobyla (côte 470). Il semble que cette dislocation se continue de la vallée du ruisseau *de Suchomasty,* au Sud du *moulin de Štětec* et qu'elle se perde dans la vallée du *Tobolka,* ayant ainsi une longueur d'environ 4 kilomètres. Sa grande importance tectonique s'avère déjà du fait qu'elle *sépare deux formations. Dans ladite carrière,* on peut voir que *les calcaires de Budňany e β sont surélevés au-dessus des calcaires de Koněprusy.* Cet affleurement est remarquable parce que *le plan de la dislocation y présente une faible inclinaison de 25⁰ et une direction d'environ h 5. C'est la seule grande dislocation du Barrandien où une faible inclinaison du plan de faille ait été relevée.*

Les calcaires de Koněprusy du mur Sud de la dislocation ne présentent, qu'une stratification fort indistincte, mais ils paraissent plonger suivant un angle de faible ouverture *vers le Nord.* Les calcaires de Budňany surélevés au-dessus de l'étage dévonien *f,* sont pareillement inclinés vers le Nord et cela suivant un angle d'environ 25⁰. La photographie (pl. II, fig. 1) nous montre l'affleurement entier et le plan de faille.

Les beaux affleurements du district de couches de Liteň et de Zdice, au Sud de Karlův Týn n'ont point fourni de plans de failles mesurables à l'aide de la boussole, toutefois nous avons pu constater que *leur inclinaison est très forte.* Cela est surtout visible dans la *surélévation longitudinale* étudiée par Kodym[18]) *aux environs Nord de Bělče.* Dans le sens de cette faille inverse *la zone de Zdice d α* a été surélevée au-dessus des *couches de Liteň e ζ.* Le plan de faille est accessible dans le ravin situé au Nord de Bělče et l'on peut constater là *qu'il présente une inclinaison très forte, plus forte que les couches du mur et du toit.* Il plonge dans le même sens que la zone, c'est à dire vers le Nord. Les autres failles inverses longitudinales de cette contrée, surtout *la faille inverse de l'Očkov* étudiée par W o l d ř i c h[19]), K o d y m[20]) et d'autres, ont pareillement des *plans de dislocation fortement inclinés.*

Il est facile de s'en persuader en examinant la carte géologique du versant raide de la vallée de la Berounka, sur la côte de l'*Očkov* (360), d'environ 150 mètres d'altitude. *La faille inverse de l'Očkov* y sépare la zone de *Liteň* de celle de *Zdice.* La limite très distincte entre ces deux étages parcourt *la pente de haut en bas à forte inclinaison.*

Les *environs de Prague, la vallée de Motol* et *la vallée de Saint-Procope,* nous fournissent *d'autres exemples d'affleurement de plans de dislocation*

---

[18]) O. K o d y m, K otázce isoklinálních vrás v Barrandienu, Rozpravy Čes. Akademie, t. XXVIII, no 16.

[19]a) J. W o l d ř i c h, O tektonice, třetihorách a diluviu v území mezi Berounkou u Budňan, Zad. Třebání a Litní, Sborník Č. spol. zem. t. XX.

b) i d.: Die geologischen Verhältnisse der Gegend zwischen Litten, Hinter-Třebáň und Poučník bei Budňan. Sitzungsber. d. böhm. Gesell. d. Wissenschaften in Prag 1914.

[20]) O. K o d y m, Geologická mapa okresu berounského v měřítku 1 : 25.000 a vysvětlivkami. Knihovna Stát. geolog. ústavu R. Č. S. t. I, 1921.

longitudinale. Dans la vallée de Motol, nous avons constaté l'inclinaison de deux dislocations longitudinales, importantes par le fait qu'elles parcourent des couches *forte nent inclinées ou renversées* à la différence des environs de Beroun, où les faibles inclinaison dominent. La première dislocation longitudinale est d'une nature *locale.* Elle a été découverte par M. R. Kettner[21]) lors de l'exécution de la carte géologique de la vallée de *Motol.* Elle affleurait dans une carrière depuis abandonnée au détour de la route entre *Hřebenka* et *Mlynářka.* Le plan de faille a la direction h 4—5 et plonge suivant un angle de 80⁰ vers le Sud. Au toit et au mur de la dislocation nous trouvons les quarzites de Drabov $d\,\delta$. Au mur (Nord) de la dislocation, les couches plongent suivant un angle de 60⁰ vers le Sud, au toit (Sud) suivant un angle de 80⁰ et pareillement vers le Sud. De l'autre côté du vallon, aucune dislocation n'est visible car le vallon est parcouru par une *dislocation transversale.* Cette dislocation est représentée dans la pl. II, fig. 2.

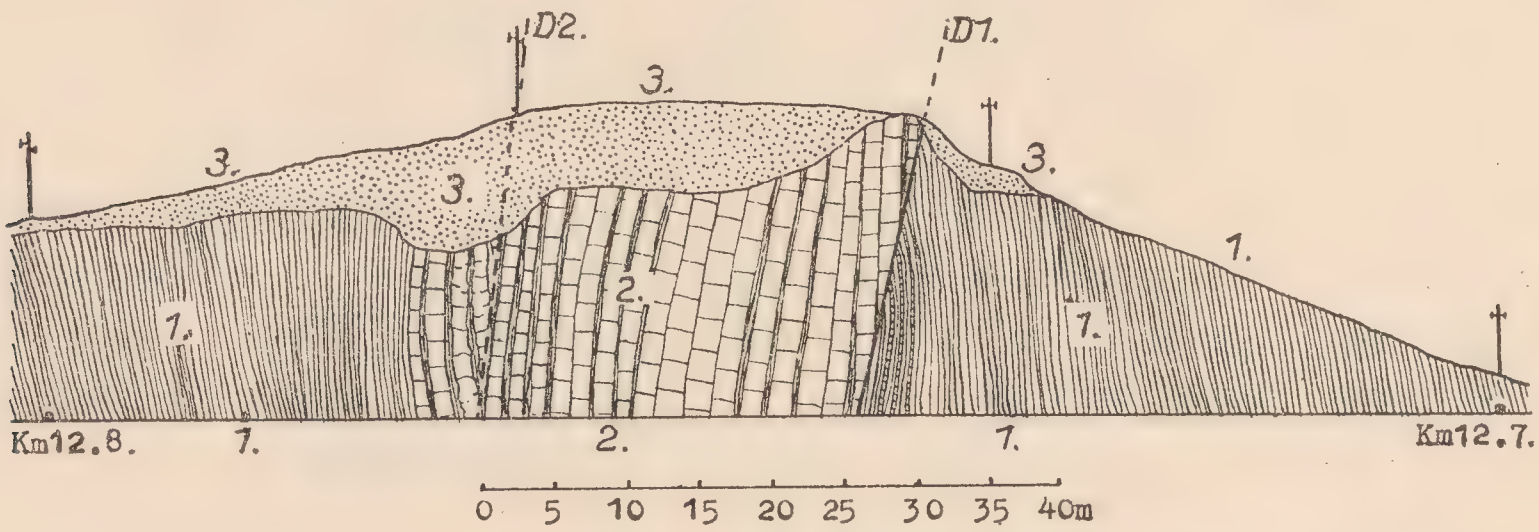


Fig. 2. Une faille affleurante dans la tranchée du chemin de fer de Buštěhrad au Sud de Motol. 1 = Les schistes d'Osek et de Kváň $d\gamma$, 2 = Les quartzites de Drabov, 3 = Eboulis. D_1 = Faille longitudinale, D_2 = Faille transversale. Le coup géologique parcourt la coté du Nord de la tranchée du chemin de fer.

L'autre dislocation affleurant dans la vallée de Motol est beaucoup plus importante, car elle parcourt la vallée antière. Elle y provoque la répétition des quartzites de la zone $d\,\delta$,[22]) qui, en somme, présentent une inclinaison isoclinale vers le Sud presque verticale.

Au Sud, la bande des quartzites de Drabov est limitée par une *dislocation longitudinale,* dans le sens de laquelle le *massif Sud a été surélevé au-dessus du massif Nord.* Dans la vallée de Motol, cette dislocation est d'une longueur de 6 kilomètres, mais sans doute elle se continue encore dans le fond de la vallée de la Vltava vers l'Est et sous la couverture crétacée vers l'Ouest. Cette dislocation affleure dans la tranchée du *chemin de fer de Buštěhrad,* au Sud du village de *Motol,* indiqué sur la fig. 2. A l'extrémité NW de la tranchée (poteau kilométrique 12·8) les schistes

[21]) J. Čermák, R. Kettner, Průvodce ku geologické a morfologické exkursi atd. do údolí motolského u Prahy, Sborník Klubu přírodovědeckého v Praze 1914.

[22]) R. Kettner, Poznámky k tektonice motolského údolí u Prahy. Časopis Musea, 1920.

d'Osek et de Kváň affleurent, ayant une direction de h 4 et une inclinaison de 84⁰ vers le Sud. Leur toit est formé par les *quartzites de Drabov d δ*, qui, au commencement, ont aussi une forte inclinaison vers le Sud avec une direction de h 4. Puis, une dislocation transversale parcourt la tranchée, dérangeant d'une manière très visible la zone des quartzites *d δ*. Dans la photographie ci-jointe, elle est signalée par la lettre D_1. Cependant au-delà de cette dislocation transversale, les quartzites de Drabov sont déjà *renversés* et plongent suivant un *angle de 80⁰ vers le Nord. Leur direction est pareillement* un peu différente, environ h 3½. La terminaison SE des quartzites est remarquable. Ils reposent apparemment en pleine concordance sur les schistes d'Osek et de Kváň. Mais, en réalité, nous pouvons observer que *les bancs supérieurs des quartzites de Drabov disparaissent près du plan de contact et qu'il y a une petite différence entre l'inclinaison des quartzites et celle des schistes.* Des recherches plus détaillées nous ont prouvé que leur mise en contact est due à une dislocation *plongeant suivant un angle de 80⁰ vers le Nord et ayant une direction de h 4½.* Les quartzites situés au Nord de la dislocation présentent la direction h 3½ et plongent suivant un angle de 88⁰ vers le Nord. Les schistes *d γ*, situés au Sud de la dislocation ont pareillement une direction de h 3½ et une inclinaison de 75⁰—85⁰ vers le Nord. A une distance un peu plus éloignée de la dislocation, nous observons que les schistes de Dobrotov se redressent de plus en plus jusqu'à ce qu'ils plongent selon la règle suivant un angle d'environ 80⁰ vers le Sud. La coupe entière nous fournit la conviction que les couches des quartzites de Drabov et des schistes d'Osek et de Kváň sont *renversées* et que *le plan de faille a subi aussi ce renversement.*

Dans la vallée de la Vltava, au Sud de Prague le flanc Sud du Barrandien est parcouru par quelques dislocations plus importantes, produisant la répétition des zones *a ζ* et *e α* et la formation de „colonies". Parmi ces dislocations, on peut citer *la faille inverse produisant les „colonies" de Vinice, Krejčí et Haidinger,* puis *celle qui cause la répétition des zones e α et d ζ entre Bráník et Hodkovičky* et près de la gare à *Malá Chuchle.*

La première de ces deux failles inverses peut être observée dès la vallée de *„Zátiší"*, près de *Hodkovičky* sur la rive droite de la *Vltava,* où elle a causé la *formation de la „colonie"* de *Vinice.*[23]) Elle se continue sur la rive gauche de la Vltava au Sud de *Velká Chuchle,* où elle produit la „colonie" de *Krejčí* et, ayant été disloquée par une dislocation transversale, les „colonies" *Haidinger* et *Lahov.*[24]) La continuation de cette dislocation vers le SW est peu nette, mais il nous semble que la faille

---

[23]) O. K o d y m, Zpráva o geologickém mapování na pravém břehu vltavském. Sborník Stát. geolog. ústavu R. Č. S., t. I. 1921.

[24]) O. K o d y m, La tectonique des anciens terrains paléozoïques des environs de Slivenec, principalement du Přídolí au Sud de Prague. Bulletin de l'Académie des Sciences de Bohême. Prague 1920.

inverse de la „colonie“ de *Krejčí est à mettre en relation avec la faille inverse du ravin de Koda qu'on peut suivre de Třebotov par Srbsko jusqu'à Koda* et qui représente la ligne tectonique principale du Barrandien dans sa partie qui avoisine l'axe. La longueur de la faille inverse de la „colonie“ de *Krejčí,* où son existence est absolument prouvée, est d'environ *5 kilomètres; mais si elle représentait la continuation de la faille inverse du ravin de Koda, ce qui est très probable, sa longueur serait d'environ 27 kilomètres*

L'accès de la faille inverse de la „colonie“ de *Krejčí* a été assez facile en 1920 au Sud de *Velká Chuchle,* un peu au-dessus du fond de la vallée près du chemin de fer. A gauche (au Sud), les couches de Liteň *e α* avec beaucoup de nodules calciques ont été mises à nu, et apparaissent comme plongeant suivant un angle d'environ 65° vers le NW et ayant une direction d'à peu près h 4. A droite (au Nord) les *couches de Zdice d ζ* du Silurien inférieur affleurent, plongeant suivant un angle de 75° vers le NW et ayant approximativement la direction h 4. Le plan de faille n'affleurait pas d'une manière assez favorable pour qu' il eût été possible de déterminer son inclinaison, mais il était évident, que ladite inclinaison est *très forte (environ 80° vers le NW).* Un peu plus haut, les couches de Zdice ont une inclinaison beaucoup plus faible, d'environ 40° vers le Nord, avec une direction approximative h 5.

La deuxième des failles inverses mentionnées, qui produit la „colonie“ de *Hodkovičky,* près de la brasserie de Bráník, commence dans la vallée du ruisseau de Kunratice, non loin de *Bráník,* se prolonge sur la rive gauche de la Vltava près de la gare de *Malá Chuchle,* et disparaît dans la zone *e α* et *d ζ* dans la direction de *Lochkov.* Sa longueur est d'environ 5 kilomètres. Cette faille inverse affleure pareillement près de la gare de *Chuchle* sur la pente; là encore, on ne peut pas mesurer exactement le plan de la faille inverse, mais il est évident, *qu'il présente une inclinaison très forte vers le NW, plus forte que les couches avoisinantes.* La zone de Liteň *e α* au mur de la faille inverse plonge sous un angle d'environ 35° vers le NW, les couches de la zone de Zdice *d ζ* plongent pareillement vers le NW, mais elles ont une inclinaison plus forte, d'environ 50°. Les couches ont une direction approximative h 4, tout comme la faille inverse longitudinale.

Cette année, un plan de faille longitudinale a été mis à nu par hasard à Prague-II même, dans la rue *Na Hrádku* et il a été décrit simultanément par O. K o d y m[25]) et R. S o k o l.[26]) Cette dislocation (accompagnée de quelques dislocations secondaires) se développe *presque dans l'axe de l'anticlinal des quartzites de Drabov d δ* et elle a provoqué un mouvement qui a amené le *massif SW relativement plus bas que le massif SE.* Fig. no 3,

---

[25]) O. K o d y m, Drobné příspěvky z geologie Prahy-I. Časopis pro mineralogii, t. I, Nr. 2-3, Prague 1923.

[26]) R. S o k o l, Výskyt drabovských křemenců na Hrádku v Praze. Věda přírodní 1923 Praha.

[27]) O. K o d y m, l. c. 25.

p. 13 représente la coupe exécutée par l'auteur[27]) exactement d'après la coupe de la rue Na Hrádku. Le plan de faille est *courbé* et presque *vertical*. Il est très difficile de décider quelle sorte de mouvement a provoqué la dislocation de *Na Hrádku*. Peut-être fut-ce un *soulèvement du massif Nord* (*gauche*) *au-dessus du massif droit*, ou bien *un affaissement* du massif droit (Sud) *par rapport au massif gauche*. Le premier cas me paraît être plus vraisemblable.

La zone algonkienne nous offre quelques affleurements excellents de *dislocations longitudinales qui correspondent par leur nature, leur signification et leur origine aux dislocations de la région des couches paléozoïques,*

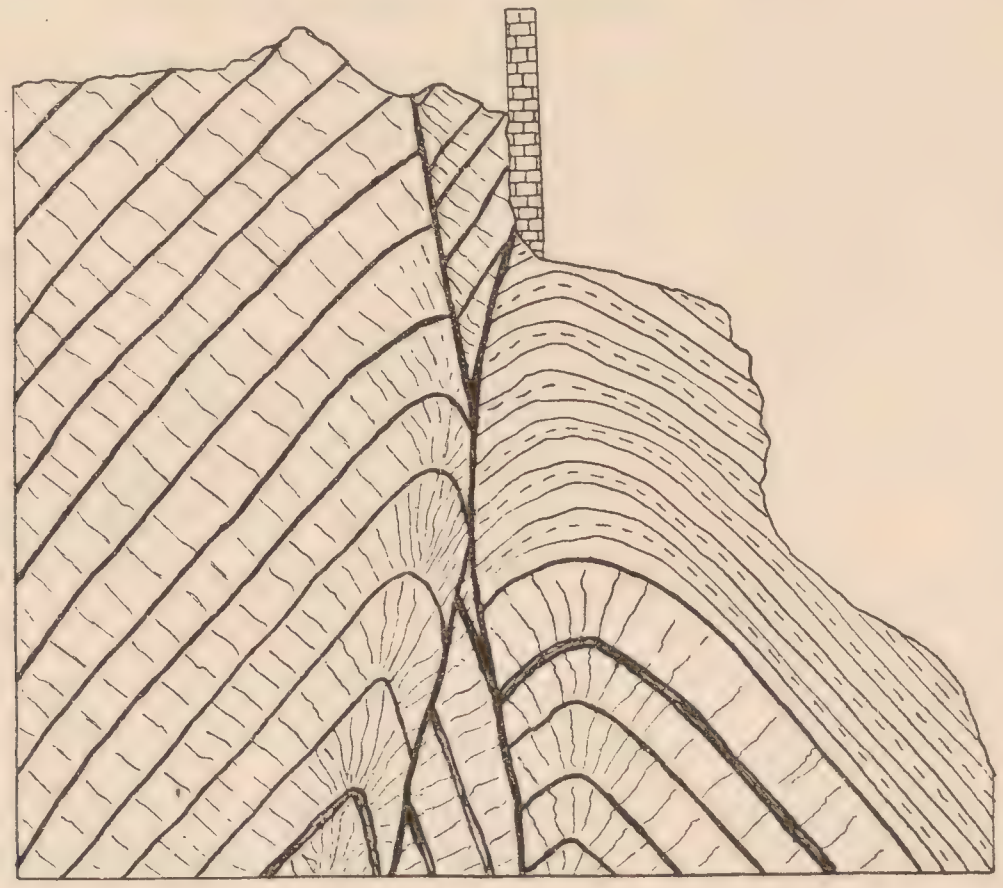


Fig. 3. Coupe géologique dans la rue Na Hrádku (Prague II) (1923). Les couches épaises présentes des quartzites de Drabov, les couches minces les couches de Zahořany.

ou bien sont au moins d'une origine *synchrone*. Ce sont, en premier lieu, les dislocations observées par M. Kettner[28]) (*dans la carrière entre Dobříš et Lhotka* à l'Ouest de la grand' route). La coupe exécutée par M. Kettner est reproduite dans la fig. 4, p. 14 ci-jointe. Elle nous montre quatre dislocations, *failles inverses toutes quatre, présentant une forte inclinaison dans le sens des couches*. Les couches algonkiennes y ont une direction h 1—2 et une inclinaison *vers l'Ouest*. Il faut remarquer le *pli* qui se trouve au mur de la dislocation la plus occidentale (à gauche) et s'est évidemment formé *syngénétiquement avec cette dislocation*.

D'autres dislocations ont été constatées dans l'algonkien par M. A. Matějka dans la tranchée du chemin de fer de l'État dans la vallée de la Vltava au Nord de *Prague* entre les stations de *Podbaba* et *Selc*.[29])

---

[28]) R. Kettner, Zpráva o geologických studiích v okolí Dobříše a Nového Knína. Sborník Čes. spol. zeměvědné, t. XXI, no 3 et 4, Prague 1915.

[29]) Alois Matějka, O geologických poměrech severního Povltaví. Sborník Stát. geol. ústavu R. Č. S., t. I, 1921, p. 58 (10).

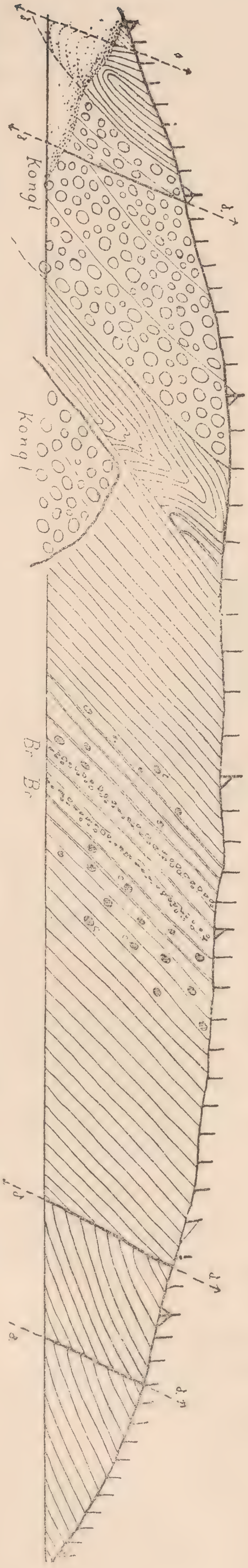


Fig. 4. Coupe géologique dans la carrière entre Dobříš et Lhotka au W. de la chaussée d'état. (Kongl = conglomérat d'âge algonkien, Br = brèche des grauwackes, c = calcschistes avec des concretions de calcaire. Les autres couches sont des schistes et des grauwackes normales d'âge algonkien. $d-\delta$ = failles inverses. (D'après R. Kettner.)

Sur ma prière, M. Matějka a eu la bonté d'exécuter, d'après son journal pour ma publication la coupe représentée dans la fig. no 5, p. 14. Il en ressort que les couches algonkiennes (grauwackes avec intercalations de schistes argileux) *plongent toujours vers le Nord*, avec une direction h 3—4 et une inclinaison d'environ 30—45°. *Le plan de faille plonge dans le sens des couches avoisinantes*, mais naturellement, il a une inclinaison beaucoup plus forte (de 65° à 70°). Dans le sens de ce plan de faille, *la lydite a été surélevée au-dessus* des grauwackes algonkiennes. Sur l'autre rive de la Vltava,

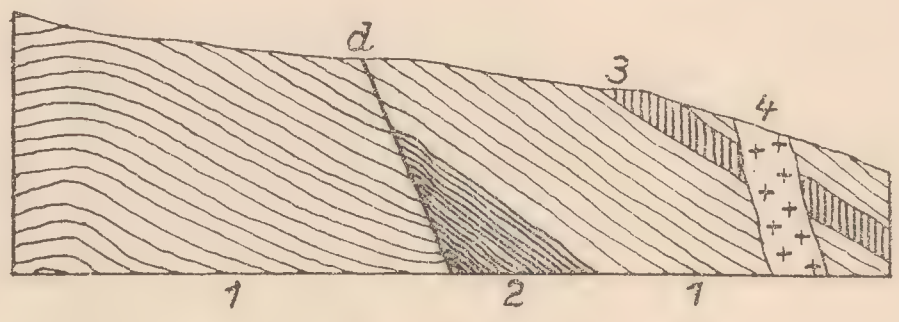


Fig. 5. L'affleurment à coté de chemin de fer entre Podbaba et Selc au N. de Prague. 1 = grauwackes algonkiens, 2 = lydite (Algonkien), 3 = felsofyr, 4 = diabas. D'après A. Matějka.

cette dislocation ne peut être suivie à cause des affleurements peu favorables et de l'uniformité des couches algonkiennes.

Toutes les dislocations mentionnées jusqu'ici (à l'exception de celles qui parcourent l'Algonkien et sont peut-être plus anciennes) se sont formées pendant la première phase du plissement varisque.[30]) Mais outre ces dislocations, nous avons encore dans le Barrandien *une grande dislocation latérale* qui s'est formée un peu plus tard. C'est la *faille inverse de Závist* décrite surtout par Kettner[31])

[30]) R. Kettner, Ueber die Eruptionsfolge u. die gebirgsbildenden Phasen in einem Teile des südöstlichen Flügels des Barrandiens. Jahrb. d. k. k. geolog. Reichsanstalt, 1917, t. 67.

[31]) *a*) R. Kettner, Vrstevní zlom mezi Závistí a Modřanskou roklí. Sborník Čes. spol. zeměvědné 1911.

[31]) *b*) Voir p. 15.

et K o d y m,[32]) qui appartient au début de la *deuxième phase* du plissement varisque. Elle parcourt le flanc Sud du Barrandien, entre *Mníšek* et *Kunratice*, et a une longueur de plus de 30 kilomètres. Cependant, dans le sens de cette dislocation, il ne s'est pas produit un mouvement du Nord vers le Sud, comme nous pourrions nous y attendre d'après sa localisation, mais dans le sens opposé. *L'Algonkien a été surélevé au-dessus du paléozoïque inférieur au-dessus du cambrien et du silurien inférieur* (Ordovicien). En effet le plan de faille de cette surélévation n'est nulle part assez parfaitement mis à nu pour que nous ayons pu le mésurer, mais la pente raide du *ravin de Modřan*, à 2500 mètres environ à l'Est de la *Vltava*, nous a fourni, avant son reboisement, un affleurement si accessible qu'il a été possible de *constater avec exactitude le parcours du plan de la faille inverse de Závist*. D'après cette observation, il est évident que *le plan de faille de cette dislocation s'incline fortement suivant un angle de 65° à 75° vers le SE*, comme K e t t n e r et K o d y m (l. c.) l'ont démontré. Dans le mur du plan de faille de la faille inverse de Závist, les couches siluriennes du *ravin de Modřan* sont *renversées* et fortement *redressées*, tandis que les couches algonkiennes *plongent suivant un angle de 40° à 50° vers le SE*.

La faille inverse de Závist est naturellement accompagnée de plusieurs *dislocations secondaires* de la même nature, dans le sens desquelles des mouvements SN se sont produits dans le flanc Sud du Barrandien. Une dislocation du même genre a été mise à nu au cours de l'exploitation des dolomies par la Société Anonyme des mines de fer de Prague dans le *Přídolí près de Slivenec* et elle a été photographiée par M. R. K e t t n e r. Mais à l'époque où la carte geologique detaillée du *Přídolí* a été exécutée, cette dislocation n'était plus accessible et je suis donc obligé de me borner aux informations que M. K e t t n e r a bien voulu me donner ainsi qu' à me contenter de sa photographie (voir fig. 2, pl. III). *Dans les-dites carrières, le plan de faille plongeait suivant un angle de 50° vers le Sud*, quoique ces carrières se trouvent dans le flanc sud du Barrandien. Au Nord de la dislocation du mur, les dolomies de la zone de Budňany *e* β affleuraient et le toit de la dislocation était constitué par les *schistes à graptolithes d'un anticlinal local*. L'inclinaison exacte des couches n'est pas visible sur la photographie. Mais, d'après les afleurements actuels, on peut inférer que les couches plongent dans cette région *vers le SE*.

---

b) i d., Ein Beitrag zur Kenntnis der geologischen Verhältnisse der Umgebung von Königsaal; Verhandl. d. k. k. geol. R. A. 1914.

c) i d., l. c. 30.

[32]) *a*) O. K o d y m, Předběžná zpráva o účincích druhé fáze vrásnění variského v Barrandienu, Rozpravy Čes. Akademie, 1919, t. XXVIII.

b) i d., Druhá fáse vrásnění variského v Barrandienu, Sborník Stát. geolog. ústavu R. Č. S. 1921, t. 1.

c) i d., Zpráva o geolog. mapování na pravém břehu vltavském. Sborník Stát. geolog. ústavu R. Č. S., 1921, t. 1.

J'ajoute à la fin de ce chapitre un *tableau synoptique de toutes les dislocations* décrites dans cette publication. Il en résulte que pour onze dislocations de la zone du paléozoïque inférieur, *une forte inclinaison de 90⁰ environ des plans de faille* a été constatée. Une fois seulement, le plan de faille d'une de ces dislocations était incliné vers le *massif situé relativement plus bas,* tandis que huit plongent vers le massif situé plus haut. Deux plans de faille sont verticaux. Aux dislocations de cette nature, il faut ajouter les dislocations constatées dans l'Algonkien (5 en tout), dont l'inclinaison des plans de faille est toujours vers le massif situé relativement plus bas.

Pour les autres dislocations, les *plans de faille n'ont qu'une faible inclinaison,* qui pour la plupart a le sens des couches. Mais il est remarquable que toutes les dislocations de ce groupe sont, à seule exception, près d'une *nature purement locale.*

La faille inverse de Závist avec ses dislocations accessoires a encore une forte inclinaison de son plan de faille.

II.

Classification des dislocations longitudinales latérales du Barrandien.

Un coup d'oeil jeté sur le tableau synoptique ci-joint des dislocations étudiées nous démontre que *les dislocations longitudinales tangentielles du Barrandien ne sont point toutes de la m me nature,* de la même *importance* et de la même *origine.* Elles se distinguent par leur *âge* relatif, par *l'inclinaison de leurs plans de faille* et par la relation entre *le plan de faille et l'inclinaison des couches avoisinantes.* D'après l'inclinaison du plan de faille et d'après l'âge nous pouvons distinguer trois groupes. Les dislocations *avec un plan de faille à faible inclinaison* font partie du premier, les dislocations avec *une forte inclinaison* du deuxième, *la faille inverse de Závist* et ses dislocations accessoires du troisième. En ce qui concerne l'époque de leur origine, le groupe des dislocations *à faible inclinaison* est évidemment *le plus ancien,* les dislocations du deuxième groupe paraissent être un peu plus récente, il faut en outre placer l'origine des deux groupes *pendant la première phase du plissement varisque.*[33]) *La faille inverse de Závist* est évidemment *postérieure* aux deux autres groupes et date *de la deuxième phase du plissement varisque.* Les dislocations citées de l'Algonkien appartiennent peut-être à l'époque varisque, mais il est aussi possible qu'elles soient *précambriennes.* L'époque de leur origine ne peut pas être déterminee. Mais elles se rangent dans le deuxième groupe des dislocations *à plan de faille fortement incliné.*

---

[33]) R. Kettner, l. c. 30.
O. Kodym, l. c. 32.

A.

Dislocations de plan de faille faiblement incliné.

Les dislocations désignées dans le tableau synoptique ci-joint sous les chiffres 12—17 font partie de ce groupe. La caractéristique commune de ces dislocations est que *l'inclinaison des plans de faille est faible*, et que ni le *mouvement* qui s'est manifesté dans leur sens, ni *l'inclinaison des plans de faille ne dépendent d'une manière quelconque de l'inclinaison des couches avoisinantes.* De même on peut constater que, en ce qui concerne le sens des mouvements effectués, ces dislocations sont *indépendantes de leur localisation dans le Barrandien*, car les mouvements qui se sont manifestés dans le sens de ces dislocations sont indépendants et ne correspondent point à la structure symétrique bien connue du Barrandien.

Des dislocations de ce groupe, nous citerons en premier lieu, les dislocations voisines de la faille glaiseuse (13 en tout), mentionnées sous no 12 de la liste. Toutes ces dislocations se *terminent* à la faille glaiseuse et ne l'ont pas déplacée. Sont-elles *antérieures* à cette dislocation ou au moins concomitantes? Il est impossible de le dire, car pour cela il nous faudrait retrouver la *continuation des dislocations au Nord de la faille glaiseuse.* Or les couches dans lesquelles il faudrait s'attendre à trouver la continuation de ces dislocations, ont été *tout-à-fait enlevées par la dénudation.* Il n'est point impossible que ces dislocations se soient formées au cours du mouvement principal qui s'est produit dans le sens de la faille glaiseuse et alors elles représenteraient la *fragmentation du massif* du mur de la faille. *Mais pas toutes ces dislocations sont tangentielles*, quelques-unes de ces dislocations font plutôt partie du *groupe des dislocations radiales.* Et, dans ce cas, nous pouvons parler de phénomènes secondaires accompagnant les mouvements dans le sens de la faille glaiseuse, car ces mouvements n'étaient assurément pas d'une nature uniforme et ne se manifestèrent pas tous dans le même sens. Naturellement, nous n'en avons point de preuves directes.

Les dislocations citées dans la liste sous les nos 13, 13*a* et 14 ne sont que d'une signification toute *locale. Leur nature tangentielle* est *évidente*, leurs plans de faille plongent dans le sens des couches avoisinantes, quoique plus fortement (ce qui n'était pas le cas avec les dislocations dans le mur de la faille glaiseuse). *Ces dislocations réprésentent des surélévations locales.* Des failles à faible inclinaison de 30° à 40° se sont produites et dans leur sens les massifs placés plus haut ont été *remontés obliquement.* Par leur signification ces dislocations s'approchent des *plans listriques connus d'autres contrées*, car elles parcourent les couches *sans égard à leur allure locale.* C'est est très visible dans le cas de la dislocation no 13*a*, où la dislocation *parcourt un anticlinal et l'a disloqué en partie.* Je me suis déjà servi

plustôt du mot „surélévation" pour désigner des dislocations d'une telle nature.[34])

La dislocation no 15 appartient à la classe de ces dislocations (no 13, 13*a* et 14), mais elle en diffère par son *importance.* Car elle est *très importante* et par sa longueur, elle joue un grand rôle dans la structure tectonique du Barrandien.

Les *dislocations no 16 et 17* sont de nouveau d'une nature purement locale et sont des *vestiges de la tectonique Alpine dans le Barrandien,* car leurs plans de faille plongent très faiblement et les couches du mur des dislocations forment dans un cas un pli renversé. La dislocation no 16, qui est située dans le flanc Nord du Barrandien et dans le sens de laquelle tout-de-même un mouvement vers le Sud s'est produit, est fort interessante.

De ce que nous avons dit jusqu'ici, il ressort que le *groupe des dislocations à faible inclinaison de plan de faille dans le Barrandien n'est point uniforme.* La plupart d'entre elles sont des dislocations d'une *nature locale, dont d'origine tangentielle est tout à fait évidente.* On peut les interpréter en grande partie comme des *chevauchements de couches dont l'origine est liée au sens d'une faille préexistante et non pas comme des plis-failles, formés par l'étirage et la réduction du flanc médian d'un pli.* Ce qui le laisse supposer, c'est qu' *on n'y trouve point de traces d'une charnière pas même d'un faible recourbement des couches par rapport au plan de faille,* mais *une terminaison nette des couches en forme de coin.* Dans le cas de quelques surélévations les couches du mur sont *déformées* formant un synclinal renversé, ce qui n'est probablement qu'un phénomène *secondaire,* car dans les couches du toit il n'y a souvent point de traces d'un étirage et d'une déformation des couches.

Les dislocations dans le mur de la faille glaiseuse, citées parmi les dislocations de ce groupe, sont soit un *phénomène secondaire de la formation de ladite faille* soit des *surélévations indépendantes antérieures à la formation de la faille glaiseuse.* Quelques-unes d'entre elles sont plutôt d'une nature *verticale.*

L'âge de ce groupe n'a pas été déterminé avec précision. Les dislocations appartiennent sans exception à la *première phase du plissement varisque,* mais jusqu'à présent il a été impossible de déterminer *si elles sont antérieures ou postérieures à la formation des failles inverses à forte inclinaison.*

B.

Les dislocations longitudinales latérales à forte inclinaison.

Ce groupe comprend les dislocations citées sur notre liste sous les no 1—11, 22 et 18—19. Elle est caractérisée par le fait *que le plan de faille*

[34]) O. K o d y m, Poznámky k směrným přesmykům v Barrandienu. Rozpravy Čes. Akademie 1921.

de toutes les dislocations faisant partie de ce groupe (*à l'exception de la dislocation Na Hroudě,* citée au no 22) est *presque vertical ou fortement incliné vers le massif situé plus haut, et que l'inclinaison du plan de faille et le sens du mouvement qui a eu lieu d'après ces dislocations, dépendent de l'inclinaison* des couches avoisinantes, ou plutôt de la *localisation des dislocations dans le Barrandien.* Ainsi nous observons que ces dislocations correspondent complètement avec la *symétrie bien connue de la structure du Paléozoïque inférieure au centre de la Bohême.* Les mouvements qui se sont manifestés d'après elles, sont presque tous d'une telle nature que *les massifs plus rapprochés de l'axe du Barrandien ont été surélévés au-dessus des massifs plus éloignés de l'axe, c'est-à-dire que le centre du synclinal a été surélévé au-dessus des ailes. La plupart des grandes dislocations qui parcourent le Barrandien* font partie de ce groupe. Aussi celui-ci est-il de la plus grande importance pour l'ensemble des traits principaux de la structure du Barrandien

Dans ce groupe, la *dislocation Na Hroudě,* citée au no 22 de la liste, occupe une place à part. Elle se distingue des autres dislocations par l'inclinaison *relativement faible,* — d'environ 45° — de son plan de faille et parce qu'elle est un *pli-faille* prononcé, comme nous l'avons déjà dit.

Quant aux autres dislocations de ce groupe, le problème est beaucoup plus compliqué, aucune d'elles n'est un vrai *pli-faille* Avec quelques-unes, nous pouvons observer par endroits, surtout dans le mur du plan de faille (dans le massif situé plus bas) une *charnière synclinale* qui indique peut-être une connexion avec les plis-failles. C'est surtout le cas pour la dislocation située à l'embouchure du Kačák (no 4) et après tout aussi pour la *faille glaiseuse* (no 1). Mais tous ces recourbements de couches sont plutôt d'une *nature locale* et il faut les expliquer comme les phénomènes secondaires qui ne se sont manifestées que *pendant le mouvement même Mais pour la dislocation de l'embouchure du Kačák,* il nous paraît préferable d'expliquer le recourbement apparant comme *brèche de dislocation.* Mais en ce qui regarde les autres dislocations de cette groupe on ne peut parler *ni d'un recourbement, ni d'une brèche de dislocation.* Ceci apparait bien dans le cas de la dislocation découverte dans *la vallée de Motol dans la tranchée du chemin de fer de Buštěhrad.* Pour les autres dislocations de ce groupe, nous avons pareillement observé un tel contact sans recourbement et sans brèche de dislocation aussi importants. Ces observations nous ont convaincus que, pour la plupart des dislocations faisant partie de ce groupe, nous *ne pouvons pas* accepter l'explication de leur origine par la réduction du *flanc médian du pli, qu'elles ne sont point des plis-failles,* mais des *surélévations de massifs.* Elles tirent leur origine de la surélévation des massifs d'après des *failles préexistantes.*

L'autre caractère important des dislocations de ce groupe est *l'inclinaison et le sens des plans de faille.* Abstraction faite du pli-faille *Na Hroudě* et de la dislocation de la rue *Na hrádku* à Prague, dont la nature n'est

pas bien claire, nous voyons que les plans de faille des surélévations longitudinales ont une forte inclinaison suivant un angle de 75⁰ à 100⁰ vers le massif situé relativement plus haut. Dans les deux cas, dans la vallée de *Motol* dans la tranchée du *chemin de fer de Buštěhrad* (no 8) et à l'embouchure du *Kačák* (no 4*a*) nous avons observé, que le plan de faille est *renversé,* c'est-à-dire qu'il plonge suivant un angle de 100⁰ et 95⁰, mais ce renversement n'est évidemment que secondaire.

Nous pouvons donc poser en principe que les dislocations de ce groupe se sont formées d'abord dont *les plans de faille sont inclinés vers le massif situé relativement plus haut,* c'est-à-dire vers *l'axe du synclinal.*

C'est une autre question de savoir si l'inclinaison était *dès le commencement aussi forte* qu'elle nous apparaît aujourd'hui, ou bien s'il faut admettre pour toutes ces dislocations un *redressement secondaire* et en certains cas un *renversement.* Il est assez difficile de répondre à cette question, car nous ne possédons point de *critérium exact qui pourrait nous renseigner sur les failles inverses longitudinales à cet égard.* Ce ne sont que des *études comparatives* qui peuvent nous servir de guide. D'abord, il est remarquable que la différence entre la plus forte et la plus faible inclinaison des plans de faille est de 100⁰ à 75⁰, c'est-à-dire *25⁰*; la différence est donc assez *peu importante.* Mais si l'on considère que les deux dislocations à plan de faille renversé n'ont été *renversées qu'ultérieurement* et si on ne leur attribue que *l'inclinaison maximum* constatée ailleurs, la différence entre les inclinaisons n'est plus que de 10⁰ à 15⁰, ce qui est vraiment *très peu. Le fait* que les plans de faille plongent pour toutes les *failles inverses* longitudinales *presque suivant le même angle,* indique déjà que *toutes ces dislocations trouvent leur origine dans les m mes conditions tectoniques,* qu'elles se produisaient avec une *différence minime* d'inclinaison des plans de faille et que les *modifications secondaires ont dû être insignifiantes,* car elles ne pouvaient déranger l'uniformité de tout ce groupe. Cependant il existe encore un trait caractéristique qui indique, que les plans de faille des *ces dislocationes* longitudinales *n'ont pas été trop redressés secondairement.* Ce sont les *couches avoisinantes elles-mêmes.* Car si nous admettions un redressement ultérieur des plans de faille, il nous faudrait aussi admettre un *redressemen-ultérieur des couches avoisinantes* au même endroit. Or en beaucoup d'endroits *il n'y a point* eu de tel redressement, comme nous pouvons nous en persuader *en constatant l'inclinaison des couches avoisinantes.* Ainsi, par exemple, les couches du mur de la dislocation à l'embouchure du Kačák (no 4*a* de la liste) ne plongent que *suivant un angle de 10⁰ vers le Nord,* quoique le plan de faille soit déjà un tout petit peu *renversé.* Ailleurs, les couches ont au contraire une inclinaison très forte, par exemple dans la *vallée de Motol* (no 7 de la liste) de 80⁰ et 60⁰, et tout-de-même le plan de faille *n'a qu'une inclinaison de 80⁰,* comme c'est la règle. Ainsi, nous voyons que le plan de faille *ne change pas son inclinaison, m me si les couches avoisinantes plongent suivant un angle très différent.* On en résulte

d'abord, que les surélévations et l'inclinaison de leurs plans de faille sont indépendantes de l'inclinaison plus ou moins forte des couches avoisinantes, ensuite que les changements ultérieurs de l'inclinaison des plans de faille de ces failles inverses sont minimes, enfin que, par conséquent, il nous faut supposer que les dislocations de ce groupe ne se sont formées qu'à la fin de la première phase du plissement varisque, car autrement, elles auraient été sans doute *visiblement affectées par les mouvements orogéniques postérieurs.* Cette dernière hypothèse est confirmée par le fait que les plans de faille sont à l'ordinaire *très unis*, ne montrant des déformations *ondulatoires ou en forme de bosse* que par endroits, ce qui est beaucoup plus facile à expliquer s'il s'agit d'un phénomène *primaire*, du à la *résistance inégale* des roches avoisinantes.

On voit donc qu'il n'est pas facile d'expliquer l'origine des surélévations longitudinales du Barrandien. *La forte inclinaison des plans de faille* est en contradiction avec l'hypothèse que ces surélévations sont des *failles inverses ordinaires*. Il est difficile de se représenter que des *failles presque verticales* se sont formées et que les couches ont eté *remontées d'après elles par une pression tangentielle.* Avec une inclinaison aussi forte du plan de faille, la composante produisant la surélévation du massif aurait été sans doute *trop faible et trop insignifiante* et n'aurait probablement pas suffi à *surmonter la friction énorme* et à *remonter* encore le massif à une altitude considérable. Tout cela a déjà été expliqué par M. R. Sokol.[35]) En outre il est impossible de comprendre *la structure symétrique du Barrandien*, c'est-à-dire *la surélévation des parties située près de l'axe du synclinal* au-dessus des ailes, d'autant plus qu'une telle symétrie peut être observée aussi dans l'autres régions plissées surtout dans le *Ještěd*[36]) et par endroits dans les *Carpathes*, où des dislocations de la même nature ont été constatées surtout aux environs de *Vsetín.* Puis de véritables failles inverses de massifs produites purement par une pression latérale sont *indépendantes* de *l'inclinaison des couches*, leurs plans de faille *plongeant tantôt dans le sens des couches avoisinantes, tantôt en sens contraire.*

Je me suis déjà rendu compte de ce fait en 1920 et je me suis efforcé d'expliquer l'origine de ces dislocations d'une autre manière. En étudiant l'inclinaison des couches du mur et du toit, je me suis persuadé que *les couches du mur du plan de faille, c'est-à-dire du massif situé comparativement plus haut, ont pour la plupart une inclinaison plus forte que celles du mur du massif situé plus bas.* Que cette opinion soit fondée, c'est ce qui e éte démontré par l'observation des dislocations étudiées. Pour les dislocations no 3, 4*a*, 4*b*, 6, 7, 8 (couches renversées!), 9, 10 l'inclinaison est toujours plus grande au toit de la dislocation qu'elle ne l'est au mur. Pour les dislocations secondaires, il est naturellement impossible d'observer

---

[35]) R. Sokol, l. c. 1.

[36]) R. Kettner-O. Kodym, Zprávy z pohoří ještědského. Sborník Čes. Společnosti zeměvědné, 1920.

ce phénomène, comme c'est surtout le cas près de la *faille* glaiseuse dans les mines de Příbram.

D'après ces observations, j'ai démontré que *quelques-unes des failles inverses longitudinales du Barrandien se sont formées avec le concours de la tension produite par le plissement des couches, lors de la formation, par compression d'un synclinal.* Dans les plis il se manifeste au cours du plissement des *tensions* de nature différente, *tension de traction* dans la partie *extérieure* de l'arc du plissement, tension de pression produite par la compression des couches *dans un moindre espace au noyau de l'anticlinal.* Comme, dans les parties inférieures d'un pli, les tensions se raccordent beaucoup plus difficilement à cause de la résistance exercée par le poids des couches du toit, que les tensions dans les couches plus rapprochées de la surface, il paraît que des mouvements se sont manifestés qui raccordaient les tensions dans *le noyau du synclinal* en faisant *remonter* les parties synclinales. De tels mouvements pouvaient se manifester soit par un *plissement disharmonique des couches,* soit par *des failles inverses à forte incli-*

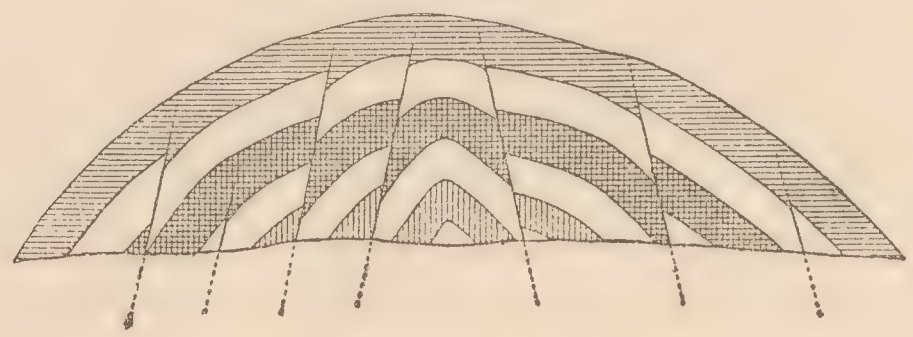


Fig. 6. Figure schématique d'une synclinale dénudée, avec des surélévations longitudinales. Dans cette figure le plissement disharmonique est éliminé. La couche la plus agée est à cause de la clareté dessinée intacte, sans des failles.

naison des plans de faille où le massif surélévé devait montrer une *inclinaison plus forte des couches* que le massif situé plus bas. Dans la formation de ces surélévations, ce n'était pas seulement la composante de la pression latérale exprimée par la formule $t. \cos \alpha$ (où t représente la pression orogénique, et où α est l'inclinaison du plan de faille) qui se manifestait, mais aussi une autre composante, tirant son origine *de la tension des couches recourbées en arc à moindre rayon.*

Dans mes publications citées (l. c. 34) j'ai représenté dans une figure reproduite dans cet essai (voir fig. 6, p. 22) l'origine schématisée de ces dislocations longitudinales. Mais il faut dire expressément, que cette figure schématique *ne donne point une coupe idéalisée du Barrandien,* comme on a parfois voulu le croire. Je veux seulement démontrer comment les tensions différentes produites par le plissement dans le synclinal ont pu se raccorder *par des surélévations latérales d'une certaine nature sans le concours d'un plissement disharmonique et d'autresd islocations.* Ce schéma montre que *les dislocations d'une telle origine disparaissent en profondeur.* Pour cette raison et pour simplifier le modèle, j'ai représenté les couches

les plus anciennes comme non disloquées. En réalité, la chose est beaucoup plus compliquée, car les surélévations pouvaient émaner des bandes les plus différentes. En réalité, il n'existe point de zone néutre analogue à celle qui est indiquée dans la fig., et où l'on ne trouverait pas de ces dislocations.

Dans la-dite publication, j'ai aussi cité l'affleurement situe près de *Zdice* comme exemple permettant s'observer en détail de telles dislocations dans la nature. En 1919, on a pu observer dans cet affleurement assez insignifiant des dislocations qui répondent dans tous leurs détails aux *hypothèses théoriques* citées pour les surélévations raccordant les tensions dans le noyau d'un synclinal. Elles *disparaissaient* en *profondeur*, avaient une *forte inclinaison* dans le même sens que les couches avoisinantes, mais naturellement suivant un angle plus ouvert, et les couches de leur toit avaient une *inclinaison plus forte* que les couches du mur. C'est d'après le croquis que je retrouve dans mon carnet de l'année 1919, que cet affleurement a été reproduit dans ma publication et je n'ai point voulu prouver par là que les grandes dislocations du Barrandien sont de même nature. Elles m'ont seulement persuadé que *des dislocations de cette nature* peuvent vraiment se trouver dans la nature.[38])

D'après le schéma ci-joint, les surélévations disparaissent en profondeur, mais il est très difficile d'observer cette disparition hypothétique des dislocations en profondeur. Il nous faudrait ou des travaux dans les mines, ou des profondes coupes naturelles. Malheureusement, nous n'avons ni les uns ni les autres à notre disposition et en quantité suffisante. Il nous faut donc recourir à une méthode indirecte. A cet égard, ce qui pourra nous servir, ce sont les *mouvements orogéniques* qui se sont manifestés *après la formation des failles inverses*, c'est-à-dire pour le Barrandien après la formation *des phénomènes amenés par la première phase du plissement varisque*; ainsi que les dislocations transversales, d'après lesquelles des mouvements *verticaux* se sont produits, enfin les *plis transversaux*, c'est-à-dire le *rehaussement unilatéral des massifs*, qui se sont produits également pendant la deuxième phase du plissement varisque. Ces mouvements et la dénudation suivante ont rendu accessibles à des niveaux différents les massifs qui, d'abord cohérents, sont maintenant d'altitude relative différente. *Quand une surélévation longitudinale parcourt ces massifs, nous pouvons la suivres à différentes altitudes absolues* (par rapport à sa position primaire), car le parcours de la dislocation à la surface des massifs plus *élevés ou non affaissés* nous indique *le parcours de la dislocation dans les parties inférieures du massif affaissé ou non élevé avoisinant.* En étudiant les surélévations longitudinales de cette manière, nous constatons *qu'elles concordent avec nos hypothèses m me en ce qui concerne leur disparition en profondeur.* Cela est surtout visible pour les dislocations qui parcourent

---

[38]) Dans ma publication, je ne me suis peut-être pas expliqué très clair sur ce point, ce qui a provoqué en partie la polémique qui s'est engagée au sujet de mes opinions.

le groupe des calcaires de *Koněprusy.*[39]) Là où ces dislocations parcourent des massifs plus élevés au point de vue stratigraphique c'est à savoir là où elles parcourent les calcaires dévoniens, elles sont très visibles sur la carte. Mais, en les suivant vers l'Ouest, dans la région relativement beaucoup plus élevée correspondant aux parties inférieures des massifs précités, dans le mur des calcaires dévoniens, nous observons que *toutes les dislocations longitudinales disparaissent* et ne se continuent point dans le Silurien inférieur et supérieur des environs de *Tmáň.* Outre cet exemple très remarquables, nous en trouvons dans le *Barrandien* encore d'autres, quoique moins frappants.

La troisième hypothèse théorique pour les surélévations est, qu'elles se sont formées là où l'amplitude des plis est assez grande. Un grand nombre de dislocations longitudinales du Barrandien répondent exactement à cette supposition. Le premier coup d'oeil jeté sur la carte géologique et sur les coupes nous le prouve. C'est là où *les couches dans les flancs du synclinal ont une inclinaison monoclinale dans un sens* que les surélévations longitudinales sont en plus grand nombre. Comme exemple nous citerons les *Hřebeny* dans les monts des *Brdy,*[40]) parcourus par d'innombrables dislocations longitudinales, les *Brdatky, la Ière zone des grauwackes de Příbram* etc. Par contre, dans les régions caractérisées par un plissement en détail, par des synclinaux et des anticlinaux, nous pouvons constater que les dislocations longitudinales latérales sont un phénomène très rare. Comme exemple, nous citerons la région voisine de l'axe du Barrandien, à l'Est de *Prague,* les environs de *Hořovice,* la région dévonienne située près de l'axe du bassin, etc. Mais le meilleur exemple est donné par la région plissée de *Želkovice, Tmáně et Králův Dvůr, située dans le prolongement immédiat de la région parcourue par de nombreuses dislocations longitudinales,* ***qui n'est dans qu'on y relève aucune surélévation.*** La région où l'on relève des dislocations nombreuses est formée par des couches ayant une inclinaison plus au moins isoclinale, tandis que la région sans dislocations est plissée en anticlinaux et synclinaux. Parmi ces exemples, on peut aussi citer *la faille glaiseuse.* Cette puissante dislocation divise au NE des couches à inclinaison isoclinale vers le NW. Mais si l'on suit cette dislocation dans la direction de *Příbram,* un synclinal de couches cambriennes apparaît tout-à-coup dans le massif du mur.[41]) Dans la direction de *Bohutín,* le synclinal devient plus important et en même temps la faille glaiseuse devient moins visible, le mouvement qu'elle a engendré a été plus faible. Plus loin vers le SW le synclinal s'accentue encore et la *faille glaiseuse disparaît.* Il est donc évident que la plupart des dislocations tangentielles

[39]) A comparer: R. Kettner - O. Kodym, Geologická mapa listu Beroun a Hořovice, 1 : 75.000

[40]) A comparer: R. Kettner - O. Kodym, Brdské Hřebeny. Knihovna Stát. geolog. ústavu R. Č. S., 1922.

[41]) D'après l'étude de M. R. Kettner.

du Barrandien répondent également à la troisième hypothèse. Elles apparaissent surtout là, où dans les flancs du synclinal les couches ont une inclinaison monoclinale, et elles disparaissent là où des anticlinaux et synclinaux locaux se sont développés. Il existe donc une interdépendance remarquable entre *l'origine des plis et celle d'un certain groupe de dislocations tangentielles dans un sens plus restreint.*

Il est naturellement difficile de ranger dans le groupe des surélévations longitudinales toutes les dislocations dont le plan de faille est fortement incliné, qui correspondent avec la structure symétrique du Barrandien et ne sont pas des plis-failles. Il est par exemple difficile d'y ranger la faille glaiseuse, la dislocation de la *Krušná hora* et d'autres. Pour ces dislocations il faut chercher une autre explication, quoiqu'il ne soit point impossible que les mêmes forces, les tensions dans le noyau des plis comprimés, aient coopéré à leur formation comme à celle de beaucoup d'autres dislocations.

Il résulte de tout ce que nous avons dit qu' il existe dans le Barrandien parmi les dislocations *à plan de faille fortement incliné de vrais plis-failles,* des dislocations dont l'origine est difficile à expliquer et quelques dislocations longitudinales qui se sont formées sous l'influence non seulement de la composante primaire $t \cos \alpha$ de la pression tangentielle, mais aussi des forces dont il faut chercher l'origine dans les *tensions des noyaux des plis* pendant leur compression. Ces tensions sont en fonction de la différence de longueur existant entre l'arc formé par les couches à la périphérie du coude d'un pli et l'arc dans le noyau du coude d'un pli. Ces dislocations sont caractérisées par le fait qu'elles disparaissent en profondeur et que les couches au plan de faille ont une inclinaison plus forte dans le massif situé relativement plus haut (surélevé) que dans le massif situé relativement plus bas.

En ce qui regarde leur rélation il est difficile de constater *la fréquence des différentes espèces* de dislocations. Les plis-failles paraîssent être relégués au second plan, tandis que les surélévations formées avec le concours des tensions dans les noyaux des plis paraîssent être très nombreuses.

C.

La faille inverse de Závist et les dislocations qui l'accompagnent.

Le dernier groupe des dislocations longitudinales latérales du Barrandien est très restreint et elle n'est peut-être représentée que par la grande *faille inverse de Závist* et quelques dislocations qui l'accompagnent dans le flanc Sud du Barrandien. Peut-être peut-on ranger dans ce groupe, la faille inverse constatée par M. A. Matějka[42]) sur le Zabitý kopec près de *Miškovce* sur la *Brandýska,* en NE de Prague. Les dislocations

[42]) A. Matějka: Silurien inférieur de la contrée entre Vinoř et Brandýs n. L. Bulletin de l'Académie des Sciences de Bohême 1922.

de ce groupe qui se sont produites *pendant la deuxième phase du plissement varisque* et cela, tout au début de cette phase géologique, sont évidemment d'un âge plus récent que toutes les autres dislocations longitudinales du Barrandien. Elles font partie des failles inverses de massif, c'est-à-dire des dislocations tangentielles où le mouvement se manifestait d'après des *failles préexistantes.* L'inclinaison des couches n'a aucune influence sur l'orientation des plans de faille de ce groupe de dislocations, ce qui est déjà prouvé par leur localisation libre dans le Barrandien. Quoiqu'elles soient situées dans le flanc Sud, elles ne sont pas inclinées vers le Sud et d'après elles, les mouvements se sont manifestés *du Sud vers le Nord.* Puis dans le cas de la faille inverse de Závist, l'Algonkien du mur du plan de la dislocation plonge tantôt vers le SE (dans le sens de la dislocation), tantôt vers le NW, formant ainsi par endroits un anticlinal qui, d'après la dislocation de Závist a été surélevé au-dessus du Silurien inférieur.

Nous avons déjà parlé de *l'origine de la faille inverse de Závist* et de la pression qui l'a produite. Nous la considérons comme un phénomène en corrélation avec la pression de Jílové, qui s'est manifesté dans le flanc SE du Barrandien, et elle n'a donc rien de commun avec la première phase du plissement varisque et avec la formation des autres dislocations longitudinales du Barrandien.

III.

Conclusion.

Il existe dans le Barrandien des dislocations longitudinales de différente nature ainsi que des dislocations *tangentielles* et *radiales.* Les dislocations radiales sont des abaissements longitudinaux, dont il a été déjà plusieurs fois question. Elles se sont formées à la fin de la *première phase du plissement varisque* et raccordaient les tensions inégales dans les couches. Si on les compare avec les dislocations latérales, elles ne jouent qu'un rôle insignifiant aussi bien en ce qui regarde leur nombre que par l'amplitude des mouvements qui se sont manifestés d'après elles. Il est remarquable qu'elles sont en harmonie avec la structure symétrique du Barrandien, car toujours la partie plus rapprochée de l'axe du Barrandien s'affaissait d'après elles par rapport au massif du flanc. Dans la nature, elles se manifestent par le fait, que quelques membres de la série entière des couches manquent sur la carte. Autant que je sache, leurs plans de faille n'affleurent nulle part, mais d'après l'étude géologique des versants raides de la vallée de la Berounka entre *Srbsko* et *Budňany* et dans la vallée de la Vltava entre *Chuchle* et *Zlíchov, leurs plans de faille ont une très forte inclinaison, peut-être verticale.*

Les dislocations tangentielles qui forment l'objet principal de cet essai appartiennent aussi à des catégories différentes. *La faille inverse de Závist avec les dislocations qui l'accompagnent* représente un groupe

tout-à-fait différent. Elle se distingue des autres dislocations longitudinales déjà par son *âge,* elle est en effet beaucoup plus récente, car elle ne s'est formée que pendant la deuxième phase du plissement varisque. Elle est caractérisée par le fait, que, par elle, la structure symétrique du Barrandien est interrompue, car d'après elle les mouvements se sont manifestés en sens contraire, comme nous devrions nous y attendre d'après sa localisation, du SE vers le NW quoiqu'elle soit située dans le flanc SE du Barrandien.

Toutes les autres dislocations longitudinales tangentielles se sont formées au cours d'une seule époque orogénique, *pendant la première phase du plissement varisque* dans le Barrandien. Il y a cependant de grandes différences de nature entre elles et on peut les ranger en quelques groupes. Parmi elles, nous trouvons les dislocations à faible inclinaison, ce sont les *failles inverses normales de massif,* puis les *plis-failles* et enfin les dislocations à très forte inclinaison de plan de faille (75°—85°) qui se sont formées avec le concours des pressions raccordant les tensions dans les noyaux des synclinaux pendant la compression des couches dans des coudes à diamètre plus faible. D'après la fréquence qu'indiquent les données citées, les dislocations du groupe mentionné en dernier lieu sont les plus fréquentes; puis viennent les dislocations à faible inclinaison des plans des couches et enfin les plis-failles. Les dislocations dont le plan de faille est fort incliné sont les plus importantes aussi bien par leur nombre que par l'amplitude du mouvement qu'elles ont engendré.

Il n'y a pas de doute possible sur la nature tangentielle des dislocations citées ici. Etant donné l'accord entre l'inclinaison des plans de faille et des couches avoisinantes et l'allure actuelle, où la même série de couches se répète quand nous suivons une coupe verticale de haut en bas il est évident qu'il ne peut être question de dislocations radiales. Dans leur formation. il s'agissait donc toujours d'une *surélévation relative et visible des couches,* d'une *compression des couches à une moindre largeur dans l'écorce terrestre.* C'est pourquoi ces dislocations sont toujours un phénomène accompagnant le plissement varisque, ou pour être plus exact sa période maximum, la première phase, caractérisée par la pression orogénique la plus intense.

En étudiant les relations entre l'inclinaison des couches et celle des plans de faille nous avons constaté que pas un seul des plans de faille accessibles, pour autant qu'ils appartiennent à des dislocations en connexion avec la structure symétrique du Barrandien n'a une inclinaison plus faible que les couches avoisinantes. Ce seul fait est déjà en contradiction avec la théorie exposée récemment par M. R. S o k o l (l. c. 1) qui prétend qu'on peut aussi expliquer la répétition des séries de couches dans le Barrandien d'après la formule *a b c d — b c d — a b c d* par des *dislocations d'affaissement, radiales,* dont les plans de faille ont une inclinaison plus faible que les couches avoisinantes. Outre la statistique donnée, qui ne saurait être complète, il y a encore un fait qui porte distinctement té-

moignage contre cette opinion: c'est que les massifs rapprochés de l'axe ont été surélevés, ou bien qu'ils sont situés plus haut. Le plus haut de tous est le massif situé dans la charnière même du synclinal. Or il est absolument impossible de l'expliquer autrement que par une *surélévation* des couches. Si nous voulons expliquer les dislocations produisant dans le Barrandien la répétition d'après la formule *a b c d — b c d — c d e d c — d c b a* par des *affaissements* de massifs composés de couches plus récentes au point de vue stratigraphique d'après des plans de faille inclinés plus faiblement que les couches avoisinantes, nous *ne pouvons absolument* pas expliquer le *coude synclinal du bassin dans l'axe.* C'est justement la position symétrique des dislocations qui réfute absolumment l'explication à l'aide des dislocations à faible inclinaison. Peut-être est-il admissible qu'un mouvement tel que *Sokol* le suppose, possible, ait pu se manifester par exception, mais tout mouvement de cette nature n'était tout au plus que d'une *importance toute locale* et assurement il n'a rien changé dans l'ensemble de l'allure tectonique du Barrandien. Naturellement, nous ne pouvons pas représenter des dislocations de cette nature, parce que *jusqu'à présent nous n'avons pas la moindre preuve de leur existence, pas m me de raisons* pour les supposer. Et encoie est-il difficile de se représenter à l'aide de quelles forces des dislocations radiales à couches si faiblement inclinées et ayant pour résultat une extension très considérable de l'écorce terrestre, auraient pu se foimer.

Dans l'étude des dislocations longitudinales tangentielles du Barrandien, on peut se poser une autre question: celle de *l'amplitude du mouvement* qui s'est manifesté d'après elles. Pour les dislocations différentes, ce mouvement a été très différent et pour la même dislocation, il est différent d'après le lieu que nous prenons en considération. Mais en somme, *il n'a eté nulle part extraordinairement grand.*

Pour évaluer l'amplitude du mouvement qui s'est manifesté d'après les surélévations longitudinales du *Barrandien,* des coupes à travers le bassin entier, préparées par M. R. K e t t n e r et l'auteur, nous rendent les meilleurs services. Comme il ressort de ces coupes, *la plupart des mouvements n'atteignent pas 1000 m.* Très exceptionellement, nous avons aussi constaté des mouvements dont l'amplitude excédait 1000 *m,* mais jamais le mouvement n'atteignait deux fois cette longueur. Nous traiterons de cette question d'ailleurs plus en détails *dans les explications des coupes à travers le Barrandien* qui seront publiées dans la Knihovna Stát. geolog. ústavu R. Č S. à Prague.

Il faut encore considérer les problèmes liés étroitement aux dislocations longitudinales du Barrandien. *Le Barrandien est-il un massis affaissé ou surélevé?* Cette question sera encore étudiée plus en detail dans la publication sur les coupes à travers du Barrandien, qui paraîtra bientôt. Pour aujourd'hui nous nous contenterons de quelques aperçus. En acceptant comme critérium des mouvements relatifs qui se sont manifestés d'après

les dislocations longitudinales entre les massifs aux flancs et les massifs au centre du bassin, nous pouvons dire que le Barrandien est aussi bien un *massif affaissé* qu'un *massif surélevé.* Car nous y constatons et des dislocations d'une *nature tangentielle,* d'après lesquelles le *centre du bassin a été soulevé,* et des dislocations *radiales* d'après lesquelles *l'axe du Barrandien s'est affaissé.* A une certaine époque, celle de la première phase du plissement varisque, au Paléozoïque inférieur du centre de la Bohême, il s'est développé un type *de massif soulevé,* et pendant l'époque immédiatement suivante, vers la fin de la même phase, un *type de massif affaissé.* Mais, somme toute, si nous prenons en considération les relations entre les dislocations d'affaissement et les dislocations de surélévation en ce qui regarde l'amplitude des mouvements qui se sont manifestés d'après elles, *il nous faut considérer le Barrandien comme un massif soulevé,* car les dislocations radiales sont reléguées bien au second plan, comme nous l'avons déjà dit. Cette désignation n'est permise que si nous définissons comme massif soulevé un ensemble tectonique où les parties centrales, séparées des parties périphériques par des dislocations, sont d'altitude relative plus élevée. Mais nous laissons de côté la question de savoir si c'est la partie centrale qui a été soulevée ou bien la periphérie qui s'est affaissée.

Prague, Novembre et Décembre 1923.

Institut géologique de l'École Polytechnique tchèque à Prague.

Explications des planches.

Pl. I.

Fig. 1. Faille inverse entre la gare de Beroun et Tetín. A gauche tufs diabasiques. à droite bandes de calcaires *e* α et *e* β. Au centre, le plan de faille (phot. de l'auteur).

Fig. 2. Pente sur la rive gauche de la Berounka en aval de l'embouchure du Kačák. A gauche les marbres de Slivenec forment un éperon rocheux. A gauche, à environ un tiers de la fig. dislocation longitudinale. A sa droite, les calcaires de Řeporyje, formant un synclinal local dans les parties supérieures de la pente. Juste au tiers de la fig., il y a une dislocation, une surélévation à faible inclinaison des couches (phot. de l'auteur).

Pl. II.

Fig. 1. Une faille dans la carrière située sur la pente NE du Kobyla près de Měňany. En bas, les calcaires récifaux blancs de Koněprusy, à gauche en haut les calcaires foncés de Budňany, qui ont été surélevés d'après une dislocation à faible inclinaison des couches (phot. de l'auteur).

Fig. 2. Carrière dans les quartzites de Drabov d δ *dans la vallée de Motol à Hřebenka,* où une dislocation longitudinale est visible (d'après R. Kettner).

Pl. III.

Fig. 1. Plis-faille (se développent de droite à gauche, d'en bas vers le haut) dans l'affleurement de la bande à minerais de fer de Zahořany *d* ε sur le *Hrouda* (Phot. R. Kettner).

Fig. 2. Dislocation dans les carrières à dolomie de Slivenec dans le Přídolí. A gauche les dolomies de la bande *e* β, à droite les schistes de la bande *e* α (Phot. R. Kettner).

Pl. IV.

Coupes à travers les mines de Příbram par les mines Mariána et František Josef et la faille glaiseuse (D'après R. Kettner).

Pl. V.

Tableau des dislocations décrites.

Fig. 1.

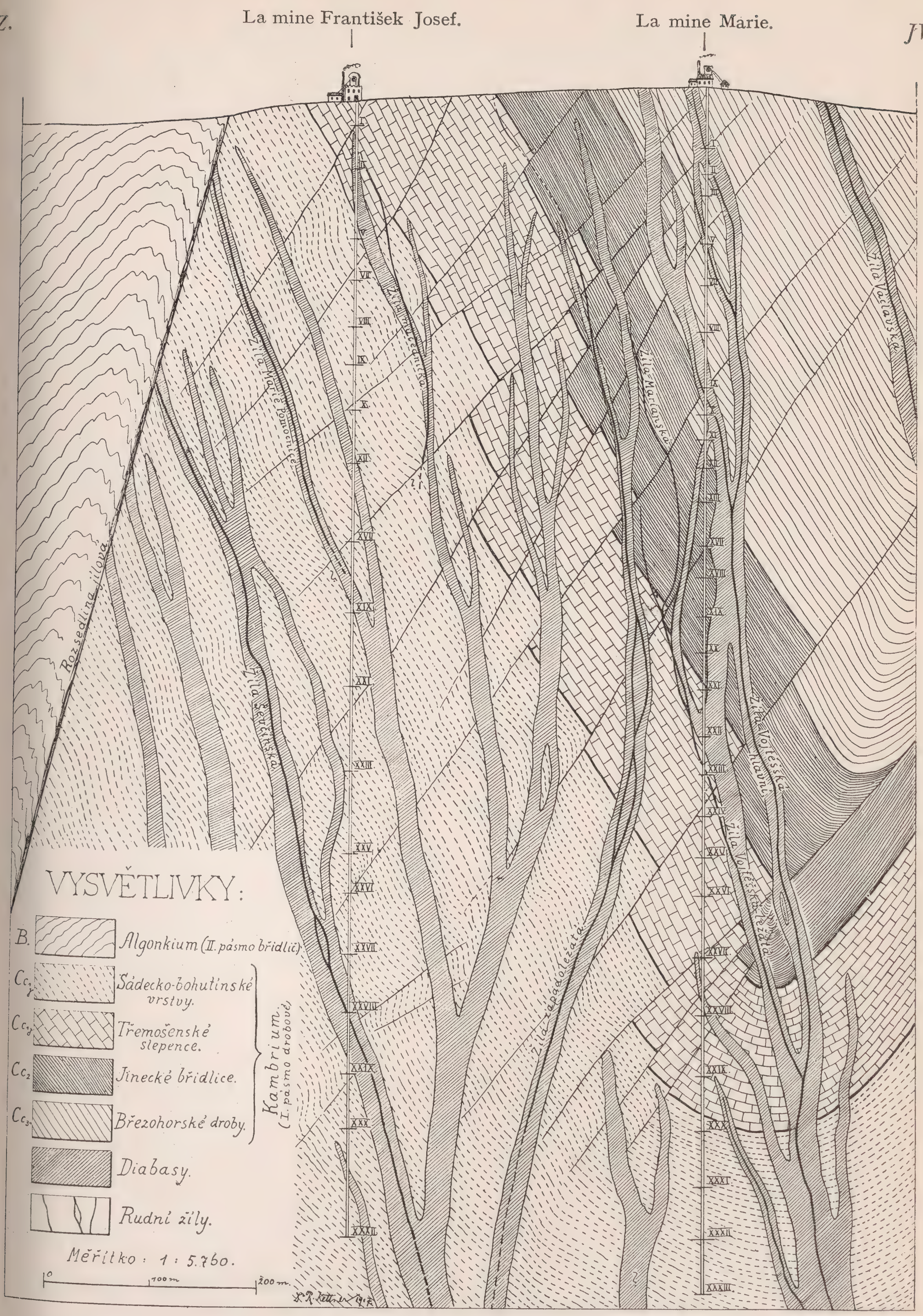
Fig. 2.

Fig 1.

Fig. 2.

Fig. 1.

Fig. 2.



Coup géologique à travers les mines de Příbram. (Par R. Kettner.) La faille dite „rozsedlina jílová“ (= faille glaiseuse) à gauche.

Tableau des dislocations décrites.

Numéro	Origine	Longueur et Importance	Dislocations, Endroit de l'observation	Plan de la dislocation	Massif relativement affaissé	Massif relativement surélevé
1.	IIème phase du plissement varisque	30 kilomètres, dislocation principale du Barrandien.	Faille dite „rozsedlina jílová" (= faille glaiseuse) dans les mines de Příbram	Inclinaison: 75° vers le NW. Direction: h. 4.	Couches cambriennes, formant un synclinal, Près de la dislocation. elles ont une inclinaison de 60° a 70° vers le SE.	Couches algonkiennes fortement disloquées, plongeant en général vers le NW.
2.	id.	dislocation accessoire de la dislocation formant la limite Sud de la Krušná Hora.	Krušná Hora, mines de fer.	Inclinaison: presque 90°. Direction: h. 3—4.	Couches de Komárov $d\beta$, faibles vers le SE.	Couches de Krušná Hora et de Komárov, très raides vers le NW.
3.	id.	3 kilomètres	Rive droite de la Berounka entre Beroun et Tetín.	Inclinaison: 80° vers le Sud. Direction: h. 5½.	Calcaire récifal $e\alpha$—$e\beta$, faible vers le Sud, formant par endroits un synclinal dans le mur de la dislocation.	Tufs de diabase $e\alpha$, 65° vers le Sud.
4.	id.	6—7 kilomètres	En aval de l'embouchure du Kačák; 10° vers le Nord. En partie, un anticlinal est développé dans le mur de la faille inverse.	Inclinaison: 85° vers le Sud. Direction: h. 5½.	Calcaires de Řeporyje, inclinaison 10° vers le Nord. En partie, un anticlinal est développé dans le mur de la faille inverse.	Marbres de Slivenec, 30° vers le Nord.
4b.	id.	id.	Chemin Hostím-Srbsko	Inclinaison: 75°—80° vers le Nord.	Calcaires de la vallée de St. Procope, direction h. 3½; inclinaison 25° vers le NW.	Calcaires de Řeporyje, direction h. 2—2½, inclinaison 60° vers le NW.
5.	id.	Faille inverse du Vočkov.	Pente au-dessous du Vočkov, faille inverse du Vočkov.	Inclinaison indéterminable, mais forte, vers le NW.	Couches de Liteň $e\alpha$, forte inclinaison vers le NW.	Couches de Zdice $d\zeta$, forte inclinaison vers le NW.
6.	id.	local	Ravin au Nord de Bělče.	Inclinaison indéterminable, forte vers le NW.	Couches de Liteň $e\alpha$, inclinaison environ 45° vers le NW.	Couches de Zdice $d\zeta$, forte inclinaison vers le NW.
7.	id.	local	Vallée de Motol, chemin entre Hřebenka et Mlynářka.	Inclinaison 80° vers le Sud.	Quartzites de Drabov $d\delta$, inclinaison 60° vers le Sud.	Quartzites de Drabov $d\delta$, inclinaison 80° vers le Sud.
8.	id.	6 kilomètres	Vallée de Motol, tranchée du chemin de fer au Sud de Motol.	Inclinaison: 80° vers le Nord, *renversée*, direction: h. 4½.	Quartzites de Drabov $d\delta$, inclinaison 88° vers le Nord, *renversée*; direction: h. 3½.	Schistes d'Osek et Kváň $d\gamma$, inclinaison 75°—85° vers le Nord, *renversés*.
9.	id.	5 kilomètres (30 kilomètres?)	Colonie „Krejčí" au Sud de Velká Chuchle.	Inclinaison: 80° vers le NW.	Schistes de Liteň $e\alpha$, inclinaison 65° vers le NW., direction h. 4.	Couches de Zdice $d\zeta$, inclinaison 75° vers le NW.
10.	id.	5 kilomètres	Pente près de la gare de Malá Chuchle	Inclinaison indéterminable, forte vers le NW.	Schistes de Liteň $e\alpha$, inclinaison 35° vers le NW., direction h. 4.	Couches de Zdice, inclinaison 50° vers le Nord, direction: h. 4.
11.	id.	Affaissement, ou surélévation local?	Affleurement à Prague dans la rue Na Hrádku.	Inclinaison presque verticale	Quartzites de Drabov avec couches de Zahořany au toit formant un anticlinal.	Quartzites de Drabov, formant en partie un anticlinal disloqué, en partie inclinés vers le Nord sous un angle d'environ 60°.
12.	id.	Importance locale (faille inverse?)	Dislocation dans le voisinage de la faille glaiseuse (13)	Inclinaison: 35°—50° vers le Nord.	Couches cambriennes formant un synclinal. La dislocation est indépendante de la stratification des couches.	
13.	id.	Détail local.	Carrière sur la rive droite de la Berounka en amont de l'embouchure du Kačák	Inclinaison: 30° vers le Nord.	Marbres de Slivenec et calcaires de Řeporyje, inclinaison: 10° vers le Nord.	Marbres de Slivenec et calcaires de Řeporyje, inclinaison 8°—10° vers le Nord.
	id.	Détail local	Carrière sur la rive gauche de la Berounka en amont de l'embouchure du Kačák.	Inclinaison: 40° vers le Nord.	Calcaires de Koněprusy et marbres de Slivenec, inclinaison: 5° vers le Nord.	Calcaires de Koněprusy et marbres de Slivenec, inclinaison: 8°—25° vers le Nord.
14.	id.	Détail local	Pente en aval de l'embouchure du Kačák sur la rive gauche de la Berounka.	Inclinaison: 30° vers le Nord.	Calcaires de Řeporyje, 10° vers le Nord.	Calcaires de Řeporyje, inclinaison 10° vers le Nord.
15.	id.	4 kilomètres de longueur	Carrière sur le chemin de Beroun à Měňany sur la pente NE de la Kobyla.	Inclinaison: 25° vers le Nord, direction: h. 5.	Calcaires de Koněprusy *f*, stratification indistincte, apparemment inclinaison faible vers le Nord.	Calcaires de Budňany $e\beta$, 25° vers le Nord.
16.	id.	Détail local.	Chemin de Hostím à Sv. Jan	Faille inclinaison vers le Nord.	Calcaires de Bráník, très faibles vers le Sud.	Calcaires de Bráník, très faibles vers le Sud.
17.	id.	Détail local.	Hostím	Inclinaison: 15° vers le Nord.	Couches de Srbsko, formant un synclinal renversé et inclinées vers le Nord.	Couches de Srbsko, inclinaison: 20° vers le Nord.
18.	id.	Importance locale	Carrière entre Dobříš et Lhotka	Forte inclinaison vers le NW.	Algonkien, inclinaison vers le NW.	Algonkien incliné.
19.	?	Dislocation plus importante, longueur?	Tranchée de chemin de fer entre Podbaba et Selce.	Inclinaison: 65°—70° vers le NW.	Grauwackes et schistes algonkiens, inclinaison: 30°—45° vers le NW.	Lydites, grauwackes et schistes algonkiens.
20.	IIème phase du plissement varisque	30 kilomètres	Ravin de Modřan, faille inverse de Závist.	Très forte inclinaison vers le SE.	Silurien inférieur, surtout couches de Zahořany $d\varepsilon$, près de la dislocation, elles ont une forte inclinaison vers le Sud et sont renversées.	Algonkien incliné vers le SE.
21.	id.	local	Carrière de dolomie à Přídolí	Inclinaison: 50° vers le SE.	Dolomies de la zone de Budňany $e\beta$.	Couches de Liteň $e\alpha$.

Les courbes sur les surfaces dans l'espace de Riemann V_3.

Par

Dr. VÁCLAV HLAVATÝ.

Présenté le 9 Mai 1924.

Le point de départ de ce travail est l'équation

1. $$i^\lambda \nabla_\lambda i^\mu \qquad i^\lambda \nabla_\lambda{}^* i^\mu + i^\lambda i^\nu H_{\lambda\nu}{}^{\cdot\cdot\mu}$$

où i^λ signifie le vecteur d'unité tangent aux courbes de la congruence i^λ, $H_{\lambda\nu}{}^{\cdot\cdot\mu}$ est l'affineur de courbure[1]) de la surface en question. $\nabla_\lambda{}^*$ ne s'étend que sur V_2. On en déduit

2. $$(i^\omega \nabla_\omega)(i^\lambda \nabla_\lambda) i^\mu = (i^\omega \nabla_\omega{}^*)(i^\lambda \nabla_\lambda{}^*) i^\mu + \\ + 3\, i^\lambda (i^\omega \nabla_\omega{}^* i^\nu) H_{\lambda\nu}{}^{\cdot\cdot\mu} + i^\lambda i^\nu i^\omega \nabla_\omega H_{\lambda\nu}{}^{\cdot\cdot\mu}$$

L'affineur $H_{\lambda\nu}{}^{\cdot\cdot\mu}$ ne dépend que de la surface V_2. Or, le vecteur $i^\lambda i^\nu i^\omega \nabla_\omega H_{\lambda\nu}{}^{\cdot\cdot\mu}$ ne varie point pour les congruences i^λ et i'^λ aux points où $i^\lambda = i'^\lambda$. L'équation

3. $$n_\mu i^\lambda i^\nu i^\omega \nabla_\omega H_{\lambda\nu}{}^{\cdot\cdot\mu} = n_\mu i'^\lambda i'^\nu i'^\omega \nabla_\omega H_{\lambda\nu}{}^{\cdot\cdot\mu}, \qquad i^\lambda = i'^\lambda$$

(n^ν est le vecteur d'unité $n^\nu \perp V_2$) nous donne pour un tel point, à cause de 2.

4. $$\underset{2}{n}(i^\omega \nabla_\omega \underset{1}{k}) + \underset{1\,2\,3}{k\,k\,n} - 3\,\underset{1\,20}{k^*\,k} = \underset{2}{n'}(i'^\omega \nabla_\omega \underset{1}{k'}) + \underset{1\,2\,3}{k'\,k'\,n'} - 3\,\underset{1\,20}{k^{*\prime}\,k}$$

où $\underset{i}{k}$ $(i = 1, 2)$ est la i-ième courbure,[1]) $\underset{20}{k}$ est la torsion géodesique et $\underset{1}{k^*}$ la première courbure rélative d'une courbe de la congruence i^λ au point en question. Nous désignons par $\underset{l}{n}$ $(l = 2, 3)$ les cosinus $n_\mu \underset{l}{i}{}^\mu$, où $\underset{l}{i}{}^\nu$ est la $(l-1)$ière normale[2]) de la courbe. Les lettres accentuées s'attachent

[1]) Il faut bien distinguer l'affineur $H_{\lambda\nu}{}^{\cdot\cdot\mu}$ et celui de Riemann $K_{\omega\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$. Pour l'équation 1., 2. voir le livre de M. Struik: „Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie" (Springer).

[2]) Par rapport à la dif. géodésique.

à i''^{λ}. — Si i^{λ} et i''^{λ} ont, en outre, le même bivecteur osculatoire, il est nécessaire qu'il soit:

5. $$n_2 = n'_2, \quad n_3 = n'_3, \quad k_1 = k'_1, \quad k^*_1 = k'^*_1.$$

Le cas échéant, l'équation 4. devient

6. $$\boxed{n_2\, i^{\omega} \bigtriangledown_{\omega} (k_1 - k'_1) = k_1\, n_3\, (k'_2 - k_2)}$$

Or

Si les congruences i^{λ} et i''^{λ} possèdent dans un point quelconque le même système de Serret[2]) *et remplissent l'équation*

$$i^{\omega} \bigtriangledown_{\omega} k_1 = i'^{\omega} \bigtriangledown_{\omega} k'_1$$

en tous leurs points, leurs courbes ont au point respectif la même torsion.[2]) $(n_2 \neq 0,\ n_3 \neq 0)$.

Soit i''^{λ} une congruence des courbes d'intersection — de V_2 et d'un système des V_2^0 géodésiques dans V_3 — dont nous connaisons partout k'_1:

Le cas échéant, la torsion d'une courbe i^{λ} au point où les systèmes de Serret de i^{λ} et i''^{λ} sont identiques satisfait à l'èquation

7. $$\boxed{n_2\, i^{\omega} \bigtriangledown_{\omega} (k'_1 - k_1) = k_1\, k_2\, n_3.}$$

Supposons que i^{λ} soit la courbe assymptotique dans V_2, et i''^{λ} la congruence celle des courbes d'intersection de V_2 avec ses V_2^0 tangents géodésiquement prolongés. On a

8. $$n_2 = n'_2 = 0, \quad n_3 = n'_3 = 1, \quad k_1 = k^*_1, \quad k'_1 = k'^*_1, \quad k_{20} = k_2, \quad k'_2 = 0^2)$$

et l'équation 4. devient

9. $$2\, k_1 = 3\, k'_1$$

Donc, *le théorème de Beltrami est valable aussi pour V_2 dans V_3.*

Delft, mars 1924.

---

[2]) Par rapport à la dif. géodésique.

Formes algébriques à coefficients variables.

Par

E. ČECH (Brno).

Présenté le 21 mars 1924.

Soit $f(x_i)$ une forme algébrique en $x_1, x_2 \ldots x_n$ dont les coefficients soient des fonctions données (ayant des dérivées continues de tous les ordres) d'un paramètre t. Soit $\varphi(\xi_i)$ une autre forme analogue en $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$, les degrés de f et φ étant égaux. Nous nous proposons de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une substitution

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\xi_k, \quad |a_{ik}| \neq 0. \tag{1}$$

à coefficients a_{ik} *numériques* (indépendantes de t) ainsi qu'il soit

$$f(x_i) = f\left(\sum_k a_{ik}\,\xi_k\right) = \varphi(\xi_i) \tag{2}$$

pour toutes les valeurs de t. On peut réduire la question à un problème algébrique. D'abord, nous prouverons que: *En général, pour que la substitution* (1) *existe, il faut et il suffit que, la valeur de t étant fixée arbitrairement, il existe une substitution de la forme* (1) *en vertu de laquelle on ait*

$$f(x_i) = \dot{\varphi}(\xi_i),\ f'(x_i) = \varphi'(\xi_i). \tag{3}$$

Ici $f'(x_i)$ p. ex. désigne la forme qui se déduit de f en remplaçant les coefficients par leurs dérivées par rapport a t. *Il n'y a exception que si, donnant à t une valeur fixe quelconque, la forme f admet toujours une infinité de transformations de la forme* (1) *en elle même.*

Il est évident que la validité des (3) est nécessaire. Supposons donc qu'on ait trouvé des quantités a_{ik} ($|a_{ik}| \neq 0$) telles qu'il soit identiquement

$$f\left(\sum_k a_{ik}\,\xi_k\right) = \varphi\ (\xi_i), \tag{4}$$

$$f'\left(\sum_k a_{ik}\,\xi_k\right) = \varphi'\ (\xi_i). \tag{5}$$

Il s'agit seulement de prouver que les quantités a_{ik} ne peuvent pas varier avec t. Or en dérivant (4) par rapport à t on obtient

$$f'\left(\sum_k a_{ik}\,\xi_k\right) + f\left(\sum_k a_{ik}\,\xi_k,\ \sum_k a'_{ik}\,\xi_k\right) = \varphi'\ (\xi_i),$$

où nous avons posé, pour abréger,

$$f(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i.$$

L'équation (5) donne ensuite l'identité

$$f\left(\sum_k a_{ik}\,\xi_k,\ \sum_k a'_{ik}\,\xi_k\right) = 0. \tag{6}$$

Le déterminant $|a_{ik}|$ étant différent de zéro, on déduit de (1)

$$\sum_k a'_{ik}\,\xi_k = \sum_k \alpha_{ik}\,x_k.$$

L'équation (6) s'écrit alors

$$f\left(x_i, \sum_k \alpha_{ik}\,x_k\right) = 0. \tag{7}$$

Si une au moins des quantités a'_{ik} est differente de zéro, les α_{ik} ne peuvent s'évanouir simultanément non plus. L'équation (7) dit alors que la forme f admet la transformation infinitésimale dont le symbole est

$$\sum_i \left(\sum_k \alpha_{ik}\,x_k\,\frac{\partial}{\partial x_i}\right). \tag{8}$$

Or la transformation infinitésimale (8) définit, pour chaque valeur de t, un groupe continu à un paramètre de substitutions de la forme (1) dont chacune transforme f en elle même c. q. f. d.

Le *cas exceptionnel* mentionné plus haut peut être traité par la même méthode. On prouve que *dans ce cas, en général, il faut et il suffit que, la valeur de t étant fixée arbitrairement, il existe une substitution de la forme* (1) *en vertu de laquelle on ait*

$$f(x_i) = \varphi(\xi_i), \quad f'(x_i) = \varphi'(\xi_i), \quad f''(x_i) = \varphi''(\xi_i).$$

On a un nouveau cas exceptionnel si, donnant à t une valeur fixe quelconque, il existe une substitution de la forme (1) transformant en elle même non seulement f, mais aussi f' ; dans ce cas on doit considérer encore f''' etc.

Il est clair que notre résultat est valable si l'on considère, au lieu d'une forme f, un système de formes, ou encore, au lieu du paramètre t, plusieurs paramètres.

Géométrie projective des surfaces réglées dans les espaces à un nombre quelconque de dimensions. I.

Par

E. ČECH.

Présenté le 20 Juin 1924.

§ 1. Les courbes quasiasymptotiques de M. Bompiani.

Dans le Mémoire „*Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negli iperspazi*“[1]) M. Bompiani a introduit une classification projective des surfaces reglées appartenant à des espaces supérieurs; là encore, il a défini certaines familles des courbes sur les surfaces réglées qu'il appelle courbes quasiasymptotiques. Je commence par en résumer ce qui est indispensable pour les recherches suivantes.

Pour définir une surface réglée R appartenant à un espace linéaire E_r à r dimensions on peut donner deux courbes directrices C_y e C_z en exprimant leurs points y e z (c'est-à-dire leurs coordonnées y_i et z_i, $i = 0, 1 \ldots r$) en fonction d'un paramètre v: une génératrice arbitraire de R joint les points y et z qui appartiennent à une même valeur de v; le point x

$$x = t_1 y + t_2 z \tag{1}$$

engendre donc la surface R en variant v et $t_1 : t_2$.

Le plus petit nombre entier positif $\boldsymbol{\nu}$ pour lequel le rang de la matrice des coordonnées des points

$$(y\ z\ y'\ z' \ldots\ y^{(\nu)}\ z^{(\nu)}) \quad y' = \frac{d\,y}{d\,v} \text{ etc.} \tag{2}$$

est moindre de $2\,\boldsymbol{\nu} + 2$ s'appelle selon M. Bompiani *l'indice de développabilité* de la surface R. Si $r = 2\,n + 1$ est un nombre impaire, on voit tout de suite qu'en général $\boldsymbol{\nu} = n + 1$. Mais on peut avoir aussi $\boldsymbol{\nu} \leq n$, ce qui aura lieu alors et alors seulement si le déterminant

$$(y\ z\ y'\ z' \ldots\ y^{(n)}\ z^{(n)})$$

est identiquement égal à zéro.

---

[1]) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 37, 1° sem., 1913.

Dans le cas $r = 2n + 1$, $\nu = n + 1$ il existe sur R un système remarquable de courbes, généralisation naturelle des courbes asymptotiques. On y parvient par la considération suivante (Bompiani l. c.): Dans l'expression (1), remplaçons t_1 et t_2 par des fonctions de v arbitrairement choisies, ainsi que nous obtenous une courbe C_x tracée sur R. L'espace E_n osculateur a C_x au point x_{v_0} appartenant à $v = v_0$ joint les points (1) et

$$\left[\frac{d^i}{d\,v^i}\,(t_1\,y + t_2\,z)\right]_{v+v_0}, \qquad i = 1,\ 2\ \ldots\ n.$$

On voit tout de suite que cet E_n est situé dans l'hyperplan ξ_{v_0} des points

$$y,\ z,\ y',\ z',\ \ldots\ ,\ y^{(n-1)},\ z^{(n-1)},\ t_1\,y^{(n)} + t_2\,z^{(n)} \qquad (3)$$

L'hyperplan ξ_{v_0} ne dépend évidemment que du point x_{v_0} et on s'assure aisément que c'est le plus petit espace linéaire qui contient les E_n osculateurs à toutes les courbes tracées sur R qui contiennent le points x_{v_0}. C'est pourquoi on nomme ξ_{v_0} *l'hyperplan n-tangent* à R au point x_{v_0}.

En continuant à supposer $r = 2n + 1$, $\nu = n + 1$ nous pouvons maintenant énoncer la définition suivante: *Une courbe C tracée sur R s'appelle courbe quasiasymptotique si, en chaque point de C, l'hyperplan n-tangent à R contient, non seulement l'E_n, mais de plus l'E_{n+1} osculateur à C.* Analytiquement, on doit exprimer que le point

$$\frac{d^{n+1}}{d\,v^{n+1}}\,(t_1\,y + t_2\,z)$$

peut s'exprimer linéairement moyennant les points (3). On en obtient aisément l'équation différentielle

$$t_1\,t_2' - t_2\,t_1' + h_1\,t_1^2 + h_2\,t_1\,t_2 + h_3\,t_2^2 = 0 \qquad (4)$$

où, p. ex.

$$h_1 = \frac{1}{n+1}\,(y\ z\ y'\ z'\ \ldots\ y^{(n-1)}\ z^{(n-1)}\ y^{(n)}\ y^{(n+1)}) : (y\ z\ y'\ z'\ \ldots\ y^{(n)}\ z^{(n)})\,.$$

Les courbes quasiasymptotiques de R s'obtiennent donc en intégrant l'équation de Riccati (4). C'est ce qui suffit, comme je montrerai dans le § suivant, pour obtenir presque sans calculs le système complet des invariants projectifs différentiels de la surface R.[2])

Passons au cas de $r = 2n$ pair. Le rang de la matrice

$$(y\ z\ y'\ z'\ \ldots\ y^{(n-1)}\ z^{(n-1)}) \qquad (5)$$

sera $2n$ en général ainsi que $\nu = n$. Pour des surfaces particulières que nous excluons dans ce qui suit, on peut avoir $\nu < n$. En supposant donc que $\nu = n$, nous allons considérer l'équation

$$(y\ z\ y'\ z'\ \ldots\ y^{(n-1)}\ z^{(n-1)},\ t_1\,y^{(n)} + t_2\,z^{(n)}) = 0. \qquad (6)$$

---

[2]) J'ai déjà étudié le cas particulier $r = 3$ dans une Note insérée au Časopis pro pěst. mat. a fys., t. 53, 1923/4.

Cette équation donne, on le voit tout de suite, une valeur bien déterminée pour le rapport $t_1 : t_2$. La courbe engendrée par le point (1), $t_1 : t_2$ ayant la valeur dite, se nomme la *courbe quasiasymptotique de R*. Dans le cas présent, il n'y a donc qu'une seule courbe quasiasymptotique. On voit aisément que le nombre de dimensions de l'espace n-tangent à R en un point x est $r - 1$ ou r selon que x appartient ou non à la courbe quasiasymptotique.

Faisant usage de la courbe quasiasymptotique, je montrerai dans le § 3 comment on peut obtenir un système complet d'invariants projectifs différentiels de la surface R.

§ 2. Les surfaces réglées immergées dans un espace linéaire à un nombre impair de dimensions.

Dans ce paragraphe nous étudierons de plus près la cas $r = 2n + 1$, $\nu = n + 1$. L'équation (4) du § 1 ayant la forme de Riccati, on voit sans difficulté qu'on peut choisir y et z de façon que le point

$$x = t_1 y + t_2 z \tag{1}$$

engendre une courbe quasiasymptotique alors et alors seulement si $t_1 : t_2 = \text{const}$. C'est ce que nous supposerons dorénavant.

Le déterminant (2) du § 1 étant différent de zéro, on voit que les coordonnées de y et z satisfont à des équations différentielles de la forme

$$y^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} + b_i z^{(i)}, \quad z^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n} c_i y^{(i)} + d_i z^{(i)}. \tag{2}$$

En écrivant que l'équation différentielle des courbes quasiasymptotiques de R se réduit à $t_1 t_2' - t_2 t_1' = 0$ on obtient aisément

$$a_n = d_n, \qquad b_n = c_n = 0. \tag{3}$$

Or choissisons le paramètre v de manière que l'on ait identiquement

$$(y\, z\, y'\, z' \ldots y^{(n)}\, z^{(n)}) = \omega = \pm 1. \tag{4}$$

D'après (2) et (4), on a $a_n + d_n = 0$, ainsi que l'équation (3_1) donne $a_n = d_n = 0$.

Les équations (2) deviennent maintenant

$$y^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} + b_i z^{(i)}, \qquad z^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i y^{(i)} + d_i z^{(i)}. \tag{5}$$

Les coefficients de (5) ne sont pas encore des invariants, car les suppositions faites restent satisfaites si 1^0 on remplace y et z par η et ζ en posant

$$\eta = \lambda y + \mu z, \quad \zeta = \nu y + \varrho z, \tag{6}$$

λ, μ, ν, ϱ étant des *constantes* à déterminant $\lambda \varrho - \mu \nu = \pm 1$, ou si 2^0 on remplace y et z par Y et Z en posant

$$Y = \varrho\, y,\ Z = \varrho\, z \tag{7}$$

pourvu qu'on remplace simultanément v par

$$V = \int |\, \varrho\, |^{\frac{2}{n}}\, d\, v \tag{7}_{\text{bis}}$$

Commençons par étudier les substitutions (6) pour lesquelles

$$\lambda\, \varrho - \mu\, \nu = 1,$$

et associons à (6) la substitution contragrédiente

$$t_1 = \lambda\, \tau_1 + \nu\, \tau_2,\quad t_2 = \mu\, \tau_1 + \varrho\, \tau_2,\quad \lambda\, \varrho - \mu\, \nu = 1 \tag{8}$$

ainsi que

$$t_1\, y + t_2\, z = \tau_1\, \eta + \tau_2\, \xi. \tag{9}$$

Aux équations (5) correspondent les équations analogues

$$\eta^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i\, \eta^{(i)} + \beta_i\, \xi^{(i)},\quad \xi^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i\, \eta^{(i)} + \delta_i\, \xi^{(i)}. \tag{10}$$

On reconnait prèsque immédiatement que

$$t_1\, (a_i\, y^{(i)} + b_i\, z^{(i)}) + t_2\, (c_i\, y + d^{(i)}\, z^{(i)}) = \tau_1\, (\alpha_i + \eta^{(i)}) + \beta_i\, \xi^{(i)}) + \tau_2 (\gamma_i\, \eta^{(i)} + \delta_i\, \xi^{(i)})$$

ainsi que les expressions

$$a_i\, t_1 + c_i\, t_2,\quad b_i\, t_1 + d_i\, t_2 \quad (i = 0, 1\, .\, .\ n - 1)$$

sont contragrédientes a y, z. Si donc $t_1{}^*$, $t_2{}^*$ sont cogrédients à t_1, t_2, c'est-à-dire si

$$t_1{}^* = \lambda\, \tau_1{}^* + \nu\, \tau_2{}^*,\ t_2{}^* = \mu\, \tau_1{}^* + \varrho\, \tau_2{}^*, \tag{8}_{\text{bis}}$$

les n formes bilinéaires

$$f_i \begin{pmatrix} t_1 ; & t_1{}^* \\ t_2 ; & t_2{}^* \end{pmatrix} = f_i\, (t, t^*) = \begin{vmatrix} a_i\, t_1 + c_i\, t_2 & b_i\, t_1 + d_i\, t_2 \\ t_1{}^* & t_2{}^* \end{vmatrix} = \tag{11}$$
$$= - b_i t_1\, t_1{}^* + a_i\, t_1\, t_2{}^* - d_i\, t_2\, t_1{}^* + c_i\, t_2\, t_2{}^* \quad (i = 0, 1 \ldots n - 1)$$

sont invariants pour les substitutions (8) *et* $(8)_{\text{bis}}$. Il s'ensuite que *la même propriété appartient aux n formes quadratiques*

$$f_i \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = f_i\, (t) = - b_i\, t_1{}^2 + (a_i - d_i)\, t_1\, t_2 + c_i\, t_2{}^2 \tag{12}$$

et aux expressions

$$j_i = a_i + d_i\,. \tag{13}$$

Au contraire, si $\lambda\, \varrho - \mu\, \nu = - 1$, et que l'on désigne par φ_i e ι_i ce qui correspond à f_i et j_i après avoir introduit η et ξ, on obtient

$$\varphi_i\, (\tau, \tau^*) = - f_i\, (t, t^*),\quad \varphi_i\, (\tau) = - f_i\, (t),\quad \iota_i = j_i. \tag{14}$$

Il reste à examiner l'effet de la substitution (7) et $(7)_{\text{bis}}$. *En généra*l il suffit de voir la manière dont se comporte la forme $f_{n-2}\, (t)$ ce qui se

peut faire presque sans calcul. On sait que l'on a des équations de la forme

$$\frac{d^{n+1}Y}{dV^{n+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \frac{d^i Y}{dV^i} + B_i \frac{d^i Z}{dV^i}\,, \quad \frac{d^{n+1}Z}{dV^{n+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \frac{d^i Y}{dV^i} + D_i \frac{d^i Z}{dV^i}\,. \quad (15)$$

Or des équations $(7)_{\text{bis}}$ on déduit, les accents indiquant des dérivées par rapport à v

$$\frac{d^{n+1}Y}{dV^{n+1}} = |\varrho|^{-\frac{2(n+1)}{n}} Y^{(n+1)} + \text{comb. lin. de } Y,\ Y' \ldots Y^{(n)},$$

$$\frac{d^{n+1}Z}{dV^{n+1}} = |\varrho|^{-\frac{2(n+1)}{n}} Z^{(n+1)} + \text{la } \textit{même} \text{ comb. lin. de } Z,\ Z' \ldots Z^{(n)},$$

$$\frac{d^{n-1}Y}{dV^{n-1}} = |\varrho|^{-\frac{2(n+1)}{n}} Y^{n-1} + \ldots, \quad \frac{d^{n-1}Z}{dV^{n-1}} = |\varrho|^{-\frac{2(n+1)}{n}} Z^{(n-} + \ldots,$$

et donc d'après (7),[3]) en posant $\eta = \frac{|\varrho|}{\varrho}\, sgn\, \varrho = \pm 1$,

$$\frac{d^{n+1}Y}{dV^{n+1}} = \eta\,|\varrho|^{-\frac{n+2}{n}} y^{(n+1)} + \text{comb. lin. de } y,\ y' \ldots y^{(n-1},$$

$$\frac{d^{n+1}Z}{dV^{n+1}} = \eta\,|\varrho|^{-\frac{n+2}{n}} z^{(n+1)} + \text{la } \textit{même} \text{ comb. lin. de } z,\ z', \ldots z^{(n-1)},$$

$$\frac{d^{n-1}Y}{dV^{n-1}} = \eta\,|\varrho|^{-\frac{n-2}{n}} y^{(n-1)} + \ldots, \quad \frac{d^{n-1}Z}{dV^{n-1}} = \eta\,|\varrho|^{-\frac{n-2}{n}} z^{(n-2)} + \ldots$$

En substituant ces valeurs dans les équations (15) et en comparant à (5), on obtient

$$A_{n-1} - D_{n-1} = |\varrho|^{-\frac{4}{n}} (a_{n-1} - d_{n-1})\,,$$

$$B_{n-1} = |\varrho|^{-\frac{4}{n}} b_{n-1}\,, \quad C_{n-1} = |\varrho|^{-\frac{4}{n}} c_{n-1}\,.$$

Il en résulte que, en effectuant la substitution (7) et $(7)_{\text{bis}}$, la forme quadratique $f_{n-1}(t)$ est multipliée tout simplement par $|\varrho|^{-\frac{4}{n}}$, et son discriminant se multiplie donc par $|\varrho|^{-\frac{8}{n}}$, c'est-à-dire

$$(A_{n-1} - D_{n-1})^2 + 4\,B_{n-1}\,C_{n-1} = |\varrho|^{-\frac{8}{n}} [(a_{n-1} - d_{n-1})^2 + 4\,b_{n-1}\,c_{n-1}]\,. \quad (16)$$

D'ailleurs, la substitution (6) ne change point ce discriminant. *Excluons le cas où ce discriminant soit égal à zéro*; alors on voit de (16) qu'on peut choisir le facteur de proportionnalité des coordonnées y et z de manière à avoir identiquement

$$(a_{n-1} - d_{n-1})^2 + 4\,b_{n-1}\,c_{n-1} = 4\,\varepsilon\,, \quad \varepsilon = \pm 1. \quad (17)$$

---

[3]) On sait d'avance que les deux premières équations suivantes ne contiennent point $y^{(n)}$ et $z^{(n)}$.

Les valeurs de y et z ne sont d'ailleurs déterminées qu'à une substitution de la forme (6) près; au contraire, les déterminants de la matrice $(y\ z)$ sont maintenant complètement déterminées; on peut les nommer les *coordonnées normales de la génératrice de R.* Pareillement, la condition (4) fixe essentiellement (au signe et à une constante additive près) la variable indépendante v; on peut l'appeler *l'arc projectif de la surface R.* Aussi, les quantités j_i et les formes quadratiques $f_i\ (t)$ sont maintenant complètement définies. Il est aisé de trouver les invariants différentielles des formes $f_i\ (t)$. En changeant un peu la notation, posons

$$f_{n-1}\ (t) = a\, t_1^{\,2} + 2\, b\, t_1\, t_2 + c\, t_2^{\,2}$$

ainsi que

$$b^2 - a\, c = \varepsilon = \pm 1.$$

Les formes

$$f'_{n-1}\ (t) = a'\, t_1^{\,2} + 2\, b'\, t_1\, t_2 + c'\, t_2^{\,2}\ ,$$
$$f''_{n-1}\ (t) = a''\, t_1^{\,2} + 2\, b''\, t_1\, t_2 + c''\, t_1^{\,2},$$
$$g\ \ (t)\ = \begin{vmatrix} a\, t_1 + b\, t_2, & b\, t_1 + c\, t_2 \\ a'\, t_1 + b'\, t_2, & b'\, t_1 + c'\, t_2 \end{vmatrix}$$

étant congrédientes aux $f_i\ (t)$, on en déduit immédiatement que les quantités

$$h = b'^2 - a'\, c', \quad k = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \tag{18}$$

sont des invariants différentielles de R. D'ailleurs, si $\varepsilon = -1$, on a nécessairement $h \geqq 0$. Supposons $h \neq 0$. Alors, on peut donner arbitrairement h et k et la forme $f_{n-1}\ (t)$ en est complètement déterminée (aux substitutions de la forme (6) près.[4]) J'omets la démonstration de cet énoncé.

Si $h \neq 0$, on voit facilement que les formes $f_{n-1}\ (t)$, $f'_{n-1}\ (t)$, $g\ (t)$ sont linéairement indépendantes. On a donc des équations de la forme

$$f_i\ (t) = L_i\, f_{n-1}\ (t) + M_i\, f'_{n-1}\ (t) + N_i\, g\ (t)$$
$$i = 0, 1 \ldots n - 2.$$

On voit facilement que, si $h \neq 0$, *en donnant les invariants*

$$\varepsilon = \pm 1, \quad h\ (h > 0 \text{ si } \varepsilon = -1), \quad k, j_{n-1};$$
$$L_0, L_1 \ldots L_{n-2}, \quad M_0, M_1 \ldots M_{n-2}, \quad N_0, N_1 \ldots \quad N_{n-2},$$
$$j_0, \quad j_1 \cdots \quad j_{n-2}$$

en fonction de l'arc projectif v, la surface R est complètement déterminée à homographies prés.

Aussi, il n'est pas difficile de traiter les cas $h = 0$ ou $\varepsilon = 0$ que nous avons exclus.

---

[4]) On ne doit pas oublier que si $\lambda\, \varrho - \mu\, v = -1$, on doit changer le signe de $f_{n-1}\ (t)$; v. (14).

The stratigraphy of the Bohemian localities of the holocene Molluska.

By

JAR. PETRBOK.

Présenté January 11 1924.

The Tschernosiom (Black-earth) from the Holocene is an intercontinental geologic layer, stratigraphically not the youngest (see the profiles) that means locked up and in the faunistic sense distinctly different from the upper and underlaying layers. Archaeologically it is betwen the mesolithical period and the youngest Bronze age.

K o s s o w i t z s c h differs three „tschernosiom" layers from Holocene:

1. *the typical* (normal) Tschernosiom.
2. *the valley* Tschernosiom.
3. *the hill-side* Tschernosiom.

1. The *Typical*-tschernosiom in the northern countries goes ower into the *gray forest-earth* and originated under the cover of luxuriant grasses and steppe-bushes; in the south and south-east it goes ower into a chesnut-colloured stratum.

From the profiles in *Kostelec on the Labe* (Elbe), *Konětopy, Čelakovice, Vrábí, Přívory* and *Přemyšlení* we see, that the shell fauna of these layers are only maine-land and xerophitic. (*Kostelec* and *Přemyšlení.*)

Konětopy near Stará Boleslav.

Profile: *Arable soil*: 1—5 *dm.*
Tschernosiom: *shells*

Pleistocene: *river-sand* with pebbles and yellom amber from the cretaceous formation.

Shells: 1. *Helix fruticum* Müll.
2. *Helix fruticum var. turfica* Slavík

Kostelec on the Labe.

Profile: *Arable soil*: 2—3 *dm.*
interposed gray stratum: 2—3 *dm Shells.* (1., 2).
Tschernosiom: 2—3 *dm. Shells.* (1, 2., 3) Fragments of prehistoric pottery.
Pleistocene: river-sand with pebbles.
Shells: 1. *Vallonia pulchella* Müll.
2. *Helix striata* Müll.
3. *Buliminus tridens* Müll.

Vrábí near Brandýs on the Labe.

Profile: *Arable soil*: ½—1 *m.*
Tschernosiom: ½—1½ *m* with *shells* in the lowest strata.
Fragm. of the prehistoric pottery.
Pleistocene: *Loess.*
Shells: 1. *Vallonia pulchella* Müll.
2. *Helix striata* Müll.
3. *Buliminus tridens* Müll.
4. *Carychium minimum* Müll.

Čelakovice.

Profile: *Arable soil*: 2—4 *dm.*
Tschernosiom: 3 *dm* — ½ *m. Shells.* Fragm. of the prehistoric pottery.
Pleistocene: Loess (with shells).
Shells: *Helix strigella* Drap.
Helix hortensis Müll.
Pupa frumentum Drap.

Přívory near Všetaty.

Profile: *whitish till white clay*: ¼ *m*—1 *m* with fragments of recent shells.
Tschernosiom ½ *m*—1¼ *m. Shells.* Fragm. of the prehistoric pottery.

Cretaceous formation:

Shells: 1. *Vallonia pulchella* Müll.
2. *Vallonia costata* Müll.
3. *Helix striata* Müll.
4. *Helix hortensis* Müll.
5. *Buliminus tridens* Müll.
6. *Pupa frumentum* Drap.
7. *Pupa muscorum* Müll.

Přemyšlení near Klecany on the river Vltava.

Profile: *Arable soil.*
grayish layer: 1—2.
Tschernosiom: $^1/_4$—$^3/_4$. 1. *Helix striata.* Fragm. of the prehistoric pottery.
Pleistocene: Loess.

From the profiles in *Neratovice, Kojetice, Malé Čakovice, Velká Ves, Hájek* and *Třeboratice* occures in the upper layers *Tschernosiom* with a xerophytic Fauna, but in lower positions is the valley-tschernosiom after Kossowitzsch with a hygrophytic or water-fauna.

Neratovice on the river Labe.

Profile: *Arable soil*: 2—3 *dm.*
Tschernosiom: $^1/_2$ *m. Shells.* (Fragm. of the prehistoric pottery.)
Pleistocene: river (terace) sand.
Shells: 1. *Helix striata* Müll.
2. *Helix hortensis* Müll.
3. *Buliminus tridens* Müll.

The second place:

the same species (1, 2, 3) and 4. *Unio* or *Anodonta* in fragments

The third place:

1. *Limnaeus palustris* Müll. *var. corvus* Gmel.
3. *Limnaeus pereger* Müll.
3. *Limnaeus truncatulus* Müll.
4. *Planorbis carinatus* Müll.
5. *Planorbis umbilicatus* Müll.
6. *Bythinia tentaculata* L.
7. *Sphaerium corneum* L.

Kojetice near Prague.

Profile: *Arable soil*: 3—4 *dm.*
Tschernosiom: 2 *dm*—$^3/_4$ *m Shells*
Pleistocene: *river -sand*: $^1/_2$ *m*—1 *m.*
pebbles.
Cretaceous formation.
Shells: 1. *Vallonia pulchella* Müll.
2. *Helix rubiginosa* A. Schm.
3. *Helix striata* Müll.
4. *Helix arbustorum* L.
5. *Helix hortensis* Müll.

6. *Buliminus tridens* Müll.
7. *Pupa muscorum* Müll.
8. *Cionella lubrica* Müll.
9. *Caecilianella acicula* Müll.
10. *Succinea oblonga* Drap.

In the second place the same species (1—10), and several others:

11. *Limnaeus stagnalis* L.
12. *Limnaeus pereger* Müll.
13. *Limnaeus truncatulus* Müll.
14. *Planorbis leucostoma* Müll.
15. *Planorbis albus* Müll.
16. *Planorbis* cf. *Bourguignati* Mort.
17. *Planorbis crista* L. var. *nautileus* L.
18. *Segmentina nitida* Müll.
19. *Acroloxus lacustris* L.
20. *Bythinia tentaculata* L.
21. *Sphaerium corneum* L.
22. *Pisidium fontinale* C. Pfr.
23. *Anodonta piscinalis* Nilss.

In the third place the same species (1—23) and others:

24. *Helix hispida* L.
25. *Succinea Pfeifferi* Rossm.
26. *Succinea oblonga* Drap. var. *elongata* Cless (non A. Br.).
27. *Planorbis spirorbis* L.
28. *Pisidium* sp.
29. *Anodonta* sp. cf. *piscinalis* Nilss.

Malé Čakovice near Kojetice.

Profile: *Arable soil*: 3—6 *dm.*
Tschernosiom: $^1/_4$—1 *m. Shells.*
Pleistocene: *river sand.*
Shells:
1. *Vallonia pulchella* Müll.
2. *Helix rubiginosa* A. Schm.
3. *Helix striata* Müll.
4. *Buliminus tridens* Müll.
5. *Pupa muscorum* Müll.
6. *Cionella lubrica* Müll.
7. *Cionella lubrica var. exigua* Mke.
8. *Carychium minimum* Müll.
9. *Succinea elegans* Risso.
10. *Succinea oblonga* Drap.
11. *Succinea oblonga var. elongata* Cless.

In the other place the same species (1—11) and some more (viz):

12. *Limnaeus stagnalis* L.
13. *Limnaeus auricularius* L.
14. *Limnaeus ovatus* Dr.
15. *Limnaeus pereger* Müll.
16. *Limnaeus truncatulus* Müll.
17. *Physa fontinalis* L.
18. *Aplexa hypnorum* L.
19. *Planorbis umbilicatus* Müll.
20. *Planorbis carinatus* Müll.
21. *Planorbis vortex* L.
22. *Planorbis leucostoma* Müll.
23. *Planorbis contortus* L.
24. *Planorbis albus* Müll.
25. *Planorbis* cf. *Bourguignati Mort.*
26. *Planorbis crista* subsp. *nautileus* L.
27. *Planorbis crista* var. *Bielzii* V. Kim.
28. *Planorbis crista* var. *Bielzii* for. *scalaris.*
29. *Planorbis complanatus* L.
30. *Planorbis riparius* West.
31. *Segmentina nitida* Müll. var. *micromphalus* Sandbg.
32. *Acroloxus lacustris* L.
33. *Valvata piscinalis* Müll.
34. *Valvata cristata* Müll.
35. *Bythinia tentaculata* L.
36. *Anodonta* sp. *cf. piscinalis* Nilss (in fragm.).
37. *Unio rostratus* Lam.
38. *Unio tumidus* Retz.
39. *Pisidium obtusale* C. Pfr.

Velká Ves near Kojetice.

Profile: *Arable soil:* $^1/_4$—$^3/_4$ *m.*
Tschernosiom: $^1/_2$—1 *m. Shells.*

Pleistocene: *river-sand* pebbles (with achats, chalcedons, jaspers) and grinded bones and teeth of the pleistocene mamals in gravel form.

Shells:
1. *Vallonia pulchella* Müll.
2. *Vallonia costata* Müll.
3. *Helix striata* Müll.
4. *Helix hortensis* Müll.
5. *Buliminus tridens* Müll.
6. *Pupa muscorum* Müll.
7. *Vertigo* sp.

8. *Cionella lubrica* Müll.
9. *Succinea oblonga* Drap var. *elongata* Cless.
10. *Limnaeus truncatulus* Müll.
11. *Planorbis spirorbis* L.
12. *Pisidium* sp.
13. *Unio* sp.

Hájek near Neratovice.

Profile: *Arable soil:* 1—2 *dm.*
Tschernosiom: — $^3/_4$ *m* sandish. *Shells.*

Pleistocene: Sand and gravels.

Shells:
1. *Hyalinia nitens* Mich.
2. *Patula* sp. juv.
3. *Vallonia pulchella* Müll.
4. *Helix strigella* Drap.
5. *Helix striata* Müll.
6. *Buliminus tridens* Müll.
7. *Pupa muscorum* Müll.
8. *Cionella lubrica* Müll.
9. *Cionella lubrica var. exigua* Mke.
10. *Succinea elegans* Risso.
11. *Succinea Schuhmacheri* Andr.
12. *Succinea oblonga* Drap. var. *elongata* Cless.
13. *Carychium minimum* Müll.
14. *Limnaeus lagotis* Schrenk.
15. *Limnaeus pereger* Müll.
16. *Limnaeus palustris* Müll var.
17. *Limnaeus truncatulus* Müll.
18. *Limnaeus truncatulus* var.
19. *Aplexa hypnorum* L.
20. *Planorbis umbilicatus* Müll.
21. *Planorbis spirorbis* L.
22. *Planorbis Dazurii* Mörch.
23. *Planorbis albus* Müll.
24. *Planorbis limophilus* West.
25. *Planorbis crista* L. var. *Bielzii* v. Kim.
26. *Segmentina nitida* Müll.
27. *Acroloxus lacustris* L.
28. *Valvata piscinalis* Müll.
29. *Valvata cristata* Müll.
30. *Bythinia tentaculata* L.
31. *Pisidium* sp.
32. *Anodonta* cf. *piscinalis* Nilss in fragm.

Třeboratice near Prague.

Profile: *Arable soil*: ½ *m.*
Tschernosiom: . . .? *Shells.*
?

Shells:
1. *Agriolimax agrestis* L.
2. *Vallonia pulchella* Müll.
3. *Vallonia pulchella var.* (?).
4. *Buliminus tridens* Müll.
5. *Pupa muscorum* Müll.
6. *Cionella lubrica* Müll.
7. *Succinea oblonga* Drap *var. elongata* Cless.
8. *Limnaeus truncatulus* Müll.
9. *Pisidium* sp.

2. *The red holocene clays.*

We see from the geological Profile of *Lobkovice* that the age of the *first red clay* is older than the „*Tschernosiom*" from Holocene and in the archaeologic sense probably mesolitic and therefore correspondent with the youngest Postglacial (after Penck and Soergel).

The second red clay is a quite recent sediment though it belongs to the geologic past because in all three cases is it already covered with Arable soil. It does not content water-shells and it is doubtless a holocene red forest-clay.

This red clay layers which form the coast from the *Ohře* (Eger)-river have her own Fauna of land-shells. Quite the same circumstances we have at *Jiřice* on the Labe (Elbe)-river.

Bohušovice on the river Ohře.

Profile: *Arable soil*: 1—3 *dm.*
red clay: 1—2 *m. Shells.*

Pleistocene: river-sand and pebles: 1 *m.*

Shells:
1. *Hyalinia* sp.
2. *Hyalinia* sp.
3. *Vallonia pulchella* Müll.
4. *Helix bidens* Chemn.
5. *Helix hispida* L.
6. *Helix strigella* Drap.
7. *Helix incarnata* L.
8. *Helix fruticum* Müll.
9. *Helix arbustorum* L.
10. *Cionella lubrica* Müll.
11. *Succinea oblonga* Drap.

Jiřice on the Labe.

Profile: *Arable soil*: 1—2 *dm.*
red clay: 1—2 *m Shells.*
Pleistocene: river-sand.
Shells: 1. *Helix incarnata* L.
2. *Helix fruticum* Müll.
3. *Succinea putris* L.

Lobkovice:

Arable soil: 2—5

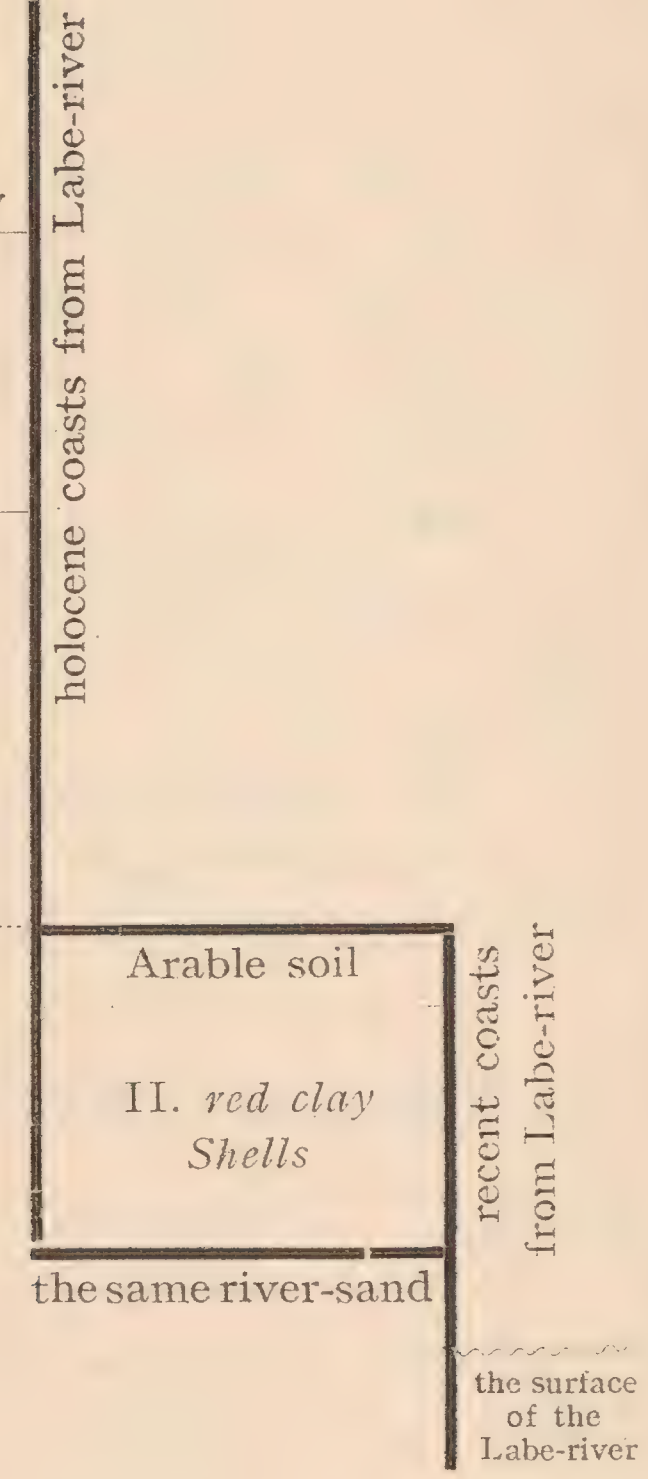
Tschernosiom: $^1/_2$—$1^1/_2$ *m*

With Helix striata: Fragment of the prehistoric pottery

I. *red clay:* $^1/_4$—1 *m*

Pleistocene: the youngest pleistoc. river-terace
sand with teeth of Equus caballus sp.

Jiřice:



III. *Holocene yellow clays.*

A very similar matter it is with the yellow holocene clays at *Veltrusy, Vlňoves, Brozánky.*

At *Veltrusy* we have two kinds of yellow holocene clays: a younger one the holocene *Tschernosiom* with xerophytic Fauna and a second one which is older and contents a Fauna of aquatic shells.

Also this layer belongs not to the Pleistocene-formation but belongs to the Postglacial formation.

The Profile of *Vlňoves* is significant through the *holocene Fauna, which is as a society strikingly analogical to the Loess-fauna.*

Alternating layers of sand and clay point to the dust drifting in the Holocene.
This is a new observation for our country.

Veltrusy near Kralupy.

I. profile: *Arable soil*: 1—1½ *dm.*
river-grawels; (sand) ½—2 *dm.*
I. *yellow sandish clay*: 5—6 *dm. Helix striata.*
graves and sand: 1—2 dm.
II. *yellow clay* (little sandish): 1—2 *m.*
Shells: *Bassommatophora.*
Cretaceous white clay.

Shells: (II. yellow clay):
1. *Limnaeus pereger* Müll. var.
2. *Planorbis lemniscatus Hartm. var. gothicus* W.

II. profile: *Arable soil*: 10—15 *cm*
I. *yellow sandish clay*: 40 *cm* (little gravels). *Helix striata* (neolitic periode).
Tschernosiom: 10 *cm*—1½ *m.*
river-pebbles: 5 *cm.*
(mesolitic periode).
II. *yellow clay*: 2—3 *m.*
Planorbis lemniscatus Hartm. var. gothicus W.

III. profile: Arable soil, I. *yellow sandy* clay } forms the same strata: 40 *cm.*
Tschernosiom: 120 *cm.*
river-gravels: 1—2 *dm.*
II. *yellow clay* with: *Planorbis lemniscatus var. gothicus.*

Vlňoves near Mělník on the Labe.

Profile: *Arable soil*: 40 *cm*; (with nests of river-gravels)

river-pebbles: 10—20 *cm*

yellow clay: 75 *cm*; (sandy); with granitic or syenitic blocks (80×50×40 *cm*). *Shells.*

fine sand
yellow clay
fine sand
yellow clay
fine sand
yellow clay
fine sand
?

} layers 5—15 *cm* high.

Shells:
1. *Vallonia tenuilabris.* A. Br
2. *Vallonia pulchella* Müll.
3. *Vallonia costata* Müll.
4. *Pupa muscorum* Müll.
5. *Cionella lubrica* Müll.
6. *Caecilianella acicula* Müll.
7. *Succinea oblonga* Drap var. *elongata* Cless.

Brozánky near Mělník.

I. profile: *Light coloured arable soil*: 20 *cm.*
Tschernosiom: 40 *cm.* Fragments of the prehistoric pottery.
I. *light coloured yellow clay*: 4 *dm* with: *Cionella lubrica* Müll.
river pebbles: 1—2 *dm.*
II. *light coloured yellow clay*: 4 *dm*—1 *m.*
with: 1. *Helix* sp. cf. *hortensis* (in fragm.).
2. *Helix striata* Müll.
3. *Caecilianella acicula*; verry.
Pleistocene: *river-sand*: 30 *cm* with nests from shells:
1. *Succinea putris* L.
2. *Succinea oblonga* Drap var. *elongata* Cless.
river-pebbles: ½ *m.*
Cretaceous whitish clay.
II. profile: *Arable soil*: ½ *m.*
Tschernosiom: 1 *m.* Fragments of the prehistoric pebbles.
I. *yellow sandy clay*: 2 *m. Shells.*
Pleistocene: *river-sand*: ¼ *m.*
Cretaceous whitish clay.
Shells: *Vallonia pulchella* Müll.
Helix striata Müll.

Želizy near Liběchov.

Yellowish clay usually every year washed down without any distinct stratigraphic sedimentation (5 *m* deep).
Shells:
1. *Amalia marginata* Drap.
2. *Hyalinia* sp.
3. *Vallonia pulchella* Müll.
4. *Vallonia costata* Müll.
5. *Helix obvia* Hartmann.
6. *Cionella lubrica* Müll.
7. *Succinea oblonga* Drap var. *elongata* Cless
8. *Succinea* sp.
9. *Limnaeus truncatulus* Müll.
10. *Physa fontinalis* L.

LITERATURE:

Jar. Petrbok: 1. *Neue Spuren des pleistozänen Menschen in Böhmen.* (Wiener Prähist. Zeitschr. 1922.)

,, 2. The others in the: *Über eine Steinzeichnung der jüngeren Bronzezeit.* (ibid. 1921 str. 72.)

,, 3. *The shells of Beroun-travertins.* (Časopis Českého Musea 1923.)

,, 4. *Valuable information concerning holocene and pleistocene Mollusks of Slovakia.* (Časopis pro mineralogii a geologii. Praha 1923.)

,, 5. *Deuxième contribution pour la connaisance des mollusques pléistocènes et holocènes de la Slovaquie.* (ibid. 1924.)

Kossowitzsch: *Die Schwarzerde.*

From the Geol.-palaeont. departement of the National Museum (Národní Museum) Praha.

The Polarisation of the Limiting Lines of the Total Reflexion. II.

By

Dr. MILOSLAV HAMPL,

Assistant of the Czech Technical High School, Prague.

Presented 24th Juni 1924.

This paper is a continuation of my dissertation with the same title, which was published in the „*Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême*“, *1924*. In the latter (which I signify for reference by *I*) I treated of the *T*-method, in this of the *S*-method. (For explanation thereof see *I*.)

To derive my formulae for the angle of Nicol's prism at which the limiting lines arising by the *S*-method disappear I use the same right-handed system of coordinates which I used in *I*.

In general two waves advance in the crystal to the limit plane of both mediums (crystal and air). Note the quicker by *3*, the slower by *4*. The relation between these waves is as follows:

$$n_3 \sin \varphi_3 = n_4 \sin \varphi_4,$$

where n is the index of light, φ the angle between the axis $+Z'$ and the normal of the wave. The incident waves are incoherent, therefore we can deal with each separately.

When only the wave *3* advances in the crystal, two waves are formed by reflexion back into the crystal (the slower I designate *1*, the quicker *2* and their angles of reflexion φ_1, φ_2) and one by refraction into the air (its angle of refraction I call i). Then there exists the relation:

$$n_k \sin \varphi_k = n_{air} \sin i = const\,, \qquad \text{for } k = 1, 2, 3, 4.$$

When only the wave *4* advances in the crystal, then the same waves *1*, *2* as in the latter case are reflected into the crystal and also the refracted wave progresses in the air in the same direction i. Only the *amplitudes* of *all* waves formed are in both cases different as is also the angle of polarisation of the *refracted* wave. Suppose that in the crystal there advances only the wave *3* with the amplitude *1*, the amplitudes of the

reflected waves being G_1, G_2, the components of the amplitude of the refracted wave being A_3, B_3 (the first one is *parallel*, the second *perpendicular* to the plane of incidence), then the equations for optical disturbances are:

$$\begin{aligned} l_3 + G_1 l_1 + G_2 l_2 &= A_3 \cos i \\ m_3 + G_1 m_1 + G_2 m_2 &= B_3 \\ n_3 + G_1 n_1 + G_2 n_2 &= A_3 \sin i \\ p_3 + G_1 p_1 + G_2 p_2 &= B_3 \sin i \cos i. \end{aligned} \tag{1}$$

In these equations there is:

$$l = \cos\varphi \cos\alpha, \quad m = \sin\alpha, \quad n = \sin\varphi \cos\alpha, \quad p = \sin\varphi\,(\sin\alpha \cos\varphi \pm \sin\varphi\, tg\, s).$$

where α is the angle of polarisation, s the angle between the ray and the normal of the wave.

When only the wave *4* advances in the crystal (again with the amplitude = 1), these eaquations remain the same only the index *4* will be in place of the index *3*, and besides the components of the refracted wave the amplitudes G_1, G_2 will in general also be changed.

Therefore we have:

$$A_k = \frac{\Delta_{Ak}}{\Delta}, \qquad B_k = \frac{\Delta_{Bk}}{\Delta}, \tag{2}$$

where:

$$\Delta_{Ak} = \begin{vmatrix} l_k & 0 & l_1 & l_2 \\ m_k & 1 & m_1 & m_2 \\ n_k & 0 & n_1 & n_2 \\ p_k & \sin i \cos i & p_1 & p_2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{Bk} = \begin{vmatrix} \cos i & l_k & l_1 & l_2 \\ 0 & m_k & m_1 & m_2 \\ \sin i & n_k & n_1 & n_2 \\ 0 & p_k & p_1 & p_2 \end{vmatrix} \tag{3$_1$}$$

for $k = 3, 4$ and

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos i & 0 & l_1 & l_2 \\ 0 & 1 & m_1 & m_2 \\ \sin i & 0 & n_1 & n_2 \\ 0 & \sin i \cos i & p_1 & p_2 \end{vmatrix} \tag{3$_2$}$$

These determinants I shall subsequently designate only by the *first* ine (*e. g.* $\Delta = |\cos i,\ 0,\ l_1,\ l_2|$, et c.).

ψ being the angle between the plane of polarisation of a Nicol's prism and the plane of incidence, then the amplitude of the light having passed through the Nicol's prism will be:

$$\begin{aligned} R &= A_3 \cos\psi + B_3 \sin\psi, \\ \text{or} \qquad S &= A_4 \cos\psi + B_4 \sin\psi. \end{aligned} \tag{4}$$

In the case of the $\left\{ \begin{matrix} inner \\ outer \end{matrix} \right\}$ limiting line the wave $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \right\}$ will coincide with the wave $\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\}$. Therefore in the *first* case we have $\Delta_{A3} = \Delta_{B3} = 0$, in the *second*: $\Delta_{A4} = \Delta_{B4} = 0$, seeing that two columns of (3$_1$) will coincide.

I. **Inner Limiting Line.**

We can write
on *left* or for $l < \bar{l}$:

$$R = r_1 \sqrt{\bar{l} - l} + r_2 (\bar{l} - l) + \ldots, \quad S = s_0 + s_1 \sqrt{\bar{l} - l} + s_2 (\bar{l} - l) + \ldots,$$
on *right* or for $l > \bar{l}$: (5)
$$R = \sqrt{-1}\, r_1 \sqrt{l - \bar{l}} + r_2 (\bar{l} - l) + \ldots, \quad S = s_0 + \sqrt{-1}\, s_1 \sqrt{l - \bar{l}} + s_2 (\bar{l} - l) + \ldots,$$

where $\bar{l} = sin\, I$ (I is here the *inner* angle of the total reflexion), $l = sin\, i$.

Then the intensity will be:

$$\text{on } \textit{left}: \quad J_l = s_0^2 + 2 s_0 s_1 \sqrt{\bar{l} - l} + (r_1^2 + s_1^2 + 2 s_0 s_2)(\bar{l} - l) + \ldots. \tag{6}$$
$$\text{on } \textit{right}: \quad J_r = s_0^2 + (- r_1^2 - s_1^2 + 2 s_0 s_2)(\bar{l} - l) + \ldots.$$

The derivative of J_l, J_r:

$$\frac{d J_l}{d i} = - \frac{s_0 s_1}{\sqrt{\bar{l} - l}} cos\, i - (r_1^2 + s_1^2 + 2 s_0 s_2)\, cos\, i + \ldots \tag{6'}$$
$$\frac{d J_r}{d i} = - (- r_1^2 - s_1^2 + 2 s_0 s_2)\, cos\, i + \ldots$$

It is evident that on *left* $\frac{d J_l}{d i}$ increases without limit. To remove this infinity, we must find such an angle ψ, that $s_0 s_1 = 0$. It is the wave *4* which causes that infinity. Usually just this wave is neglected in studying the inner limiting line — and even without a sufficient reason.

1. When we make $s_0 = 0$, we have

$$\frac{d J_l}{d i} = - (r_1^2 + s_1^2) cos\, i + \ldots,$$
$$\frac{d J_r}{d i} = + (r_1^2 + s_1^2) cos\, i + \ldots,$$

thus $\frac{d J}{d i}$ becomes *finite*, but it still remains *discontinuous*. I think that this is the case of the *minimal* visibility of the *inner* limiting line. The corresponding angle ψ is given by

$$tg\, \psi = - lim \frac{\Delta_{A4}}{\Delta_{B4}}.$$

2. When we make $s_1 = 0$, we shall get

$$\frac{d J_l}{d i} = - (r_1^2 + 2 s_0 s_2) cos\, i + \ldots, \quad \frac{d J_r}{d i} = - (- r_1^2 + 2 s_0 s_2) cos\, i + \ldots$$

It seems indeed that even in this case we have not yet removed the discontinuity. But we can prove, that when it is $s_1 = 0$, at the same time we have likewise $r_1 = 0$, which latter is Závišk a's condition for the disappearing of the *inner* limiting line.

With regard to this agreement of both conditions I arrive at the same formulae as Záviška (at least for the *uni-axial* crystals).

Let us write

$$r_k = a_k \cos\psi + b_k \sin\psi\,,\quad s_k = c_k \cos\psi + d_k \sin\psi\,,$$

where a_k, b_k and c_k, d_k are the coefficients in the development of A_3, B_3 and A_4, B_4 proceeding according to ascending powers of $\sqrt{l - l}$.

If we can prove that $a_1 d_1 = b_1 c_1$ we shall prove the agreement of both conditions.

We have

$$a_1 = -2 \lim A_3' \frac{\sqrt{l - l}}{\cos i}\,,\quad b_1 = -2 \lim B_3' \frac{\sqrt{l - l}}{\cos i}\,,$$

$$c_1 = -2 \lim A_4' \frac{\sqrt{l - l}}{\cos i}\,,\quad d_1 = -2 \lim B_4' \frac{\sqrt{l - l}}{\cos i}\,,$$

where $A_3' = \frac{d A_3}{d i}$ et c.

We deduce the derivatives $A'_{3,4}$, $B'_{3,4}$ from the equations $(3_{1,2})$. Thereby we can neglect those terms which do not become infinite. But only $l'_{2,3}$, $m'_{2,3}$, $n'_{2,3}$, $p'_{2,3}$ increases without limit, because $\lim_{i=I} \frac{d\varphi_{2,3}}{d i} = \infty$, on the other hand $\frac{d\varphi_{1,4}}{d i}$ remains finite.

Then it can be proved that $\lim \frac{d\varphi_3}{d\varphi_2} = -1$.

It suffices to express all coefficients of Kirchhoff's equation by its roots whereby we get *4* equations. After the differentiation of three of them with respect to φ_2 and after a proper elimination of the single derivatives we get the following relation:

$$\lim \left(\frac{1}{\sin^2 \varphi_2} + \frac{1}{\sin^2 \varphi_3} \frac{d\varphi_3}{d\varphi_2} \right) = 0.$$

In the case of the total reflexion the angle φ_2 coincides with φ_3 and we get the above written relation.

Now it is easy to prove that for $\lim i = I$ we get:

$$l_3' = -l_2',\ m_3' = -m_2',\ n_3' = -n_2',\ p_3' = -p_2'$$

and that for the *inner* limiting line we can write (neglecting those terms which do not become infinite — as I have said above):

$$\begin{aligned} \lim A_3' &= \frac{\Delta_{A3}}{\Delta} = \frac{2\,|\,l_2\,0\,l_1\,l_2'\,|}{|\,\cos i\,0\,l_1\,l_2\,|}\,; \\ \lim B_3' &= \frac{\Delta'_{B3}}{\Delta} = \frac{2\,|\,\cos i\,l_2\,l_1\,l_2'\,|}{|\,\cos i\,0\,l_1\,l_2\,|}\,, \end{aligned} \qquad (7)$$

where in all terms it is necessary to substitute the values corresponding to the case $lim\, i = I$.

Similarly we shall get

$$lim\, A_4' = \frac{\Delta\, \Delta'_{A4} - \Delta'\, \Delta_{A4}}{\Delta^2} =$$

$$= \frac{|\cos i\, 0\, l_1\, l_2| \,.\, |l_4\, 0\, l_1\, l_2'| - |\cos i\, 0\, l_1\, l_2'| \,.\, |l_4\, 0\, l_1\, l_2|}{|\cos i\, 0\, l_1\, l_2|^2}, \qquad (8_1)$$

$$lim\, B_4' = \frac{\Delta\, \Delta'_{B4} - \Delta'\, \Delta_{B4}}{\Delta^2} =$$

$$= \frac{|\cos i\, 0\, l_1\, l_2| \,.\, |\cos i\, l_4\, l_1\, l_2'| - |\cos i\, 0\, l_1\, l_2'| \,.\, |\cos i\, l_4\, l_1\, l_2|}{|\cos i\, 0\, l_1\, l_2|^2}. \qquad (8_2)$$

We shall prove that $a_1\, d_1 = b_1\, c_1$ when we prove that

$$A_3'\, B_4' = B_3'\, A_4', \quad i.\, e.$$

$$\frac{|l_2\, 0\, l_1\, l_2'|}{|\cos i\, 0\, l_1\, l_2'|} = \frac{|\cos i\, 0\, l_1\, l_2| \,.\, |l_4\, 0\, l_1\, l_2'| - |\cos i\, 0\, l_1\, l_2'| \,.\, |l_4\, 0\, l_1\, l_2|}{|\cos i\, 0\, l_1\, l_2| \,.\, |\cos i\, l_4\, l_1\, l_2'| - |\cos i\, 0\, l_1\, l_2'| \,.\, |\cos i\, l_4\, l_1\, l_2|}. \qquad (9)$$

But the numerator of the right fraction can be written

$$= -|\cos i\, 0\, l_4\, l_1| \,.\, |l_2\, 0\, l_1\, l_2'|$$

and its denominator

$$= -|\cos i\, 0\, l_4\, l_1| \,.\, |\cos i\, l_2\, l_1\, l_2'| \,.$$

I shall not give proofs of these results — they are proved generally *e. g.* in R. Weitzenböck's, *Komplex-Symbolik.*

Therefore we can maintain:

The *inner* limiting line disappears by the *S*-method when the angle of Nicol's prism ψ agrees with the following equation:

$$r_1 = a_1 \cos\psi + b_1 \sin\psi = 0,$$

i. e. when

$$tg\, \psi = -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{|l_2\, 0\, l_1\, l_2'|}{|\cos i\, l_2\, l_1\, l_2'|} \qquad (10)$$

Let us apply this equation to *uni-axial* and then to *bi-axial* crystals (in the case of the latter only for those special positions of the crystal at which the radius vector of the limiting line becomes extreme) — of course only in regard to the case of fhe *inner* limiting line.

Thereby we get the derivatives l_2', m_2', n_2', p_2' from the equations introduced in *I*. Besides this there exists also the following equation:

$$l_1\, n_2' + l_2'\, n_1 + m_1\, p_2' + m_2'\, p_1 = 0,$$

what we have got after the differentiation of

$$l_1\, n_2 + l_2\, n_1 + m_1\, p_2 + m_2\, p_1 = 0$$

(the so-called *Potier's relation*) with respect to i having neglected those terms which do not increase without limit.

When we use all these results, we get the following formulae for the angle ψ at which the *inner* limiting lines disappear:

1. *a) Uni-axial Positive Crystals*:

$$tg\,\psi = \frac{M\cos\mu\cos\varphi_1 + \sin I\cos I\,(M\cos\mu\sin\varphi_1 - N\sin\mu\cos\vartheta\cos\varphi_1)}{\sin\mu\sin\vartheta\,[2\sin\mu\cos\mu\cos\vartheta\cos\varphi_1\cos I + M\sin(\varphi_1 + I)]} \tag{11}$$

where

$$M = \sin^2\mu\sin^2\vartheta + \cos^2\mu, \quad N = \sin^2\mu\sin^2\vartheta - \cos^2\mu,$$

μ is the angle between $+Z'$ and $-Z$, ϑ the angle between the plane of incidence and the principal section of the crystal, φ_1 the *smaller* of both angles which agree with K i r c h h o f f's reduced equation:

$$\begin{aligned}(o^2\cos^2\mu + e^2\sin^2\mu)\,\mathrm{cotg}^2\varphi_1 - 2\,(o^2 - e^2)\sin\mu\cos\mu\cos\vartheta\,\mathrm{cotg}\,\varphi_1 - \\ - (o^2 - e^2)\,(1 - \sin^2\mu\cos^2\vartheta) = 0.\end{aligned} \tag{12}$$

This formula agrees with the formula of Z á v i š k a when we use $180^0 - \mu$ in the place of μ, since Z á v i š k a definies that angle otherwise than myself.

1. *b) Uni-axial Negative Crystals*:

$$tg\,\psi = -\frac{\sin\mu\sin\vartheta\cos(\varphi_1 - I)}{\cos\mu\sin\varphi_1 - \sin\mu\cos\vartheta\cos\varphi_1}, \tag{13}$$

where φ_1 is given by

$$\mathrm{cotg}\,\varphi_1 = +\sqrt{\frac{e^2 - o^2}{o^2}\cdot\frac{o^2\cos^2\mu + e^2\sin^2\mu\sin^2\vartheta}{o^2\cos^2\mu + e^2\sin^2\mu}}. \tag{14}$$

2. *Bi-axial Crystals*:

a) $\mathfrak{q}_2 = a,\ p_1 = 0,\ \varphi_2 = 90^0$:

$$tg\,\psi_a = \frac{\sqrt{1 - r_1^2}}{r_1}\sin I - \frac{\cos I}{r_1}\frac{N}{D}, \tag{15}$$

where

$$N = \left(k\,\frac{r_1}{a^2} + a_{23}\sqrt{1 - r_1^2}\right)[a_{12}\cos(\varphi_1 + I) - a_{23}\sin(\varphi_1 + I)] +$$

$$+ \sin I\cos\varphi_1\left[k\sqrt{1 - r_1^2} - a_{22}a_{23}r_1 + \frac{a_{12}^2}{\sqrt{1 - r_1^2}} + a_{23}^2\sqrt{1 - r_1^2}\right],$$

$$D = k\left\{\cos I\cos\varphi_1 - \frac{r_1}{a^2\sqrt{1 - r_1^2}}[a_{23}\cos(\varphi_1 + I) + a_{12}\sin(\varphi_1 + I)]\right\} +$$

$$+ (a_{12}\cos\varphi_1 - a_{23}\sin\varphi_1)(a_{12}\cos I - a_{23}\sin I)$$

and

$$k = a_{12}^2 - a_{11}(a_{22} - a^2).$$

The angle φ_1 is the *smaller* of both angles which agree with the equation:

$$\begin{aligned}&(a^2b^2r_3^2 + b^2c^2r_1^2 + c^2a^2r_2^2)\,\mathrm{cotg}^2\varphi_1 + 2a^2(b^2 - c^2)\frac{r_2r_3}{\sqrt{1 - r_1^2}}\,\mathrm{cotg}\,\varphi_1 + \\ &+ \left[(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)r_1^2 - a^2\left(a^2 - \frac{b^2r_2^2 + c^2r_3^2}{1 - r_1^2}\right)\right] = 0.\end{aligned} \tag{16}$$

The first term on the right-hand side of the formula for $tg\,\psi_a$ is Závišk a's formula. It is the first approximation when we neglect the values $\eta = \frac{b^2 - c^2}{b^2}$, $\eta\, tg^2\,\omega = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$ which are really very small.

When we develope the second term on the right-hand side of that formula in a series proceeding according to ascending powers of $\sqrt{\eta}$, we shall get a more precise formula than Závišk a:

$$tg\,\psi_a = tg\,\mu\,sin\,I + \sqrt{\eta}\,\frac{tg^2\,\omega\,sin\,\mu\,cos\,I + sin\,\vartheta\,cos\,\sigma}{cos\,\mu\,\sqrt{tg^2\,\omega + sin^2\,\vartheta}} - \eta\,\frac{cos\,\sigma\,cos\,\tau}{cos\,\mu\,cos\,I}\,; \quad (17)$$

where

$$r_1 = cos\,\mu\,, \quad r_2 = sin\,\mu\,cos\,\vartheta\,, \quad r_3 = sin\,\mu\,sin\,\vartheta \quad (18)$$

and

$$\left.\begin{aligned} cos\,\sigma &= cos\,\vartheta\,sin\,I + sin\,\vartheta\,sin\,\mu\,cos\,I \\ cos\,\tau &= sin\,\vartheta\,sin\,I - cos\,\vartheta\,sin\,\mu\,cos\,I \end{aligned}\right\}. \quad (19)$$

b) $q_2 = b, \quad p_2 = 0, \quad \varphi_2 = 90^0$:

The angle φ_1 is again the *smaller* of both angles which agree with the following reduced equation of Kirchhoff:

$$(a^2 b^2 r_3^2 + b^2 c^2 r_1^2 + c^2 a^2 r_2^2)\,cotg^2\,\varphi_1 - 2\,b^2\,(a^2 - c^2)\,\frac{r_1\,r_3}{\sqrt{1 - r_1^2}}\,cotg\,\varphi_1 -$$

$$- \left[(a^2 - b^2)\,(b^2 - c^2)\,r_2^2 + b^2\left(b^2 - \frac{c^2\,r_3^2 + a^2\,r_1^2}{1 - r_2^2}\right)\right] = 0. \quad (20)$$

When we write again $\eta = \frac{b^2 - c^2}{b^2}$ and

$$r_1 = sin\,\mu\,sin\,\vartheta, \quad r_2 = cos\,\mu, \quad r_3 = sin\,\mu\,cos\,\vartheta \quad (21$$

(μ, ϑ are evidently different from those μ, ϑ which we used in the previous case), the discriminant of the quadratic equation is as follows:

$$D = \eta\,.\,\delta^2\,(1 - \eta\,cos^2\,\mu)\,(1 + \eta\,tg^2\,\omega\,cos^2\,\mu), \quad (22)$$

where

$$\delta^2 = \eta\,tg^2\,\omega - tg^2\,\omega\,sin^2\,\vartheta + cos^2\,\vartheta. \quad (23)$$

It is evident that $D > 0$ when $\delta^2 > 0$, *i. e.* when

$$tg^2\,\vartheta = \frac{r_1^2}{r_3^2} < \frac{a^2}{c^2}\,\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}\,. \quad (24)$$

Only in this case we can use (10), which holds good only for the case of the *inner* limiting line.

Supposing that $\delta^2 > 0$ I shall consider two cases:

α) $tg^2\,\omega\,sin^2\,\vartheta - cos^2\,\vartheta < 0$ and besides this $\eta\,tg^2\,\omega$ can be neglected in regard to this term.

Then we get a formula which follows cyclically from $tg\,\psi_a$:

$$tg\,\psi_b = tg\,\mu\,sin\,I - \sqrt{\eta}\,\frac{-tg^2\,\omega\,sin\,\vartheta\,cos\,\sigma + cos\,\vartheta\,cos\,\tau}{cos\,\mu\,\sqrt{cos^2\,\vartheta - tg^2\,\omega\,sin^2\,\vartheta}} + \\ + \eta\,\frac{cos\,\sigma\,cos\,\tau}{cos\,\mu\,cos^2\,\omega\,cos\,I}\,. \qquad (25_\alpha)$$

Of course μ, ϑ and therefore also σ, τ are given now by (21).

β) $tg^2\,\omega\,sin^2\,\vartheta - cos^2\,\vartheta = n\,\eta\,tg^2\,\omega$, where $n \leq 1$.

I write no *lower* limit for n. I only add that n can be negative and — as concerns its absolute value — arbitrarily great. But when it is negative and so great that $\eta\,tg^2\,\omega$ can be neglected in regard to $|tg^2\,\omega\,sin^2\,\vartheta - cos^2\,\vartheta|$, then the formula (25_α) for $tg\,\psi_b$ is more correct. — We have now:

$$tg\,\psi_b = tg\,\mu\,sin\,I - \frac{sin\,I}{cos\,\mu}\,\frac{1}{\sqrt{1-n}}\,.\,\frac{|sin\,\vartheta\,cos\,\vartheta|}{sin\,\vartheta\,cos\,\vartheta}\,. \qquad (25_\beta)$$

The next member of the development is of the order η and therefore I neglect it.

Both these formulae hold good only when $D > 0$, *i. e.* when

$$tg^2\,\vartheta = \frac{r_1^{\,2}}{r_3^{\,2}} < \frac{a^2}{c^2}\,\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}\,.$$

If $D < 0$, then it concerns the *outer* limiting line and it is impossible to use the general equation (10).

II. Outer Limiting Line.

In this case only one, and that the slower wave *4* advances in the crystal to the limit plane of both mediums. Therefore we need not consider wave *3*. The equations (2), $(3_{1,\,2})$ for A_4, B_4 hold good again. In the case $i = I$ (I designates now the *outer* angle of the total reflexion) the waves *1* and *4* coincide and thence $\Delta_{A\,4} = \Delta_{B\,4} = 0$. Therefore the amplitude of the light emerging from the Nicol's prism can be developed in the neighbourhood of $i = I$ in the following series:

$$R = r_1\,\sqrt{\bar{l} - l} + r_2\,(\bar{l} - l) + \ldots,$$

where

$$l = sin\,i\,, \qquad \bar{l} = sin\,I\,, \qquad r_k = a_k\,cos\,\psi + b_k\,sin\,\psi\,.$$

The most important difference regarding the case of the *inner* limiting line lies in the fact that $tg\,\varphi_2$ has now a *complex* value and therefore the coefficients r_k are complex *too*. I shall write $r_k = \bar{r}_k + \sqrt{-1}\,\bar{\bar{r}}_k$, where $\bar{r}_k$, $\bar{\bar{r}}_k$ are *real* numbers.

Then on the *left-hand* side of the limiting line or for $l < \bar{l}$ we can write:

$$R_l = \bar{r}_1\,\sqrt{\bar{l} - l} + \bar{r}_2\,(\bar{l} - l) + \ldots + \sqrt{-1}\,\{\bar{\bar{r}}_1\,\sqrt{\bar{l} - l} + \bar{\bar{r}}_2\,(\bar{l} - l) + \ldots\},$$

on the *right-hand* (for $l > \bar{l}$):

$$R_r = -\overline{\overline{r_1}}\sqrt{l-\bar{l}} - \bar{r}_2(l-\bar{l}) + \ldots + \sqrt{-1}\left\{\bar{r}_1\sqrt{l-\bar{l}} - \overline{\overline{r_2}}(l-\bar{l}) + \ldots\right\}.$$

The intensity of the emerging light will be:

left

$$J_l = (\bar{r}_1^2 + \overline{\overline{r_1}}^2)(\bar{l}-l) + 2(\bar{r}_1\bar{r}_2 + \overline{\overline{r_1}}\,\overline{\overline{r_2}})(\bar{l}-l)^{\frac{3}{2}} + \ldots,$$

right

$$J_r = -(\bar{r}_1^2 + \overline{\overline{r_1}}^2)(\bar{l}-l) + 2(\overline{\overline{r_1}}\,\bar{r}_2 - \bar{r}_1\overline{\overline{r_2}})(l-\bar{l})^{\frac{3}{2}} + \ldots$$

The intensity is continuous again at the point $i = I$, but its derivative *does not increase without limit*, as it did in the previously considered cases. Still it is *discontinuous*. We could evidently remove the discontinuity of this derivative if we chose such value for the angle ψ which makes $\bar{r}_1^2 + \overline{\overline{r_1}}^2 = 0$. But that could only occur if it were at the same time $\bar{r}_1 = \overline{\overline{r_1}} = 0$. I shall not prove that this case is generally impossible.

Therefore as we cannot quite remove the *discontinuity*, we shall make the term $f(\psi) = \bar{r}_1^2 + \overline{\overline{r_1}}^2$ at least *minimal*. The limiting line will not quite *disappear*, only its visibility will be *minimal*.

Thus we get the condition for the corresponding angle ψ:

$$lim\left(\bar{r}_1\frac{d\,\bar{r}_1}{d\,\psi} + \overline{\overline{r_1}}\frac{d\,\overline{\overline{r_1}}}{d\,\psi}\right) = 0 \quad \text{supposing that} \quad \frac{d^2 f}{d\,\psi^2} > 0.$$

$f(\psi)$ is extremal for that ψ which is given by

$$tg\,\psi_{1,2} = \frac{-G \pm \sqrt{G^2 + 4F^2}}{2F}$$

where

$$F = a_1 b_1 + \overline{\overline{a_1}}\,\overline{\overline{b_1}}, \qquad G = \bar{a}_1^2 + \overline{\overline{a_1}}^2 - \bar{b}_1^2 - \overline{\overline{b_1}}^2$$

and

$$a_1 = \bar{a}_1 + \sqrt{-1}\,\overline{\overline{a_1}}, \qquad b_1 = \bar{b}_1 + \sqrt{-1}\,\overline{\overline{b_1}}.$$

Evidently $tg\,\psi_1 = cotg\,\psi_2$ or $\psi_2 = \psi_1 + 90^0$.

Let us designate by $\left\{\begin{matrix}\psi_1\\ \psi_2\end{matrix}\right\}$ the angle which corresponds to the $\left\{\begin{matrix}minimum\\ maximum\end{matrix}\right\}$ of $f(\psi)$. When we examine the second derivative we can see that

$$tg\,\psi_1 = \frac{-G - \sqrt{G^2 + 4F^2}}{2F}. \tag{26}$$

We must now find the values of a_1, b_1. We have

$$a_1 = -2\,lim\frac{d\,A_4}{d\,i}\frac{\sqrt{\bar{l}-l}}{cos\,i}, \qquad b_1 = -2\,lim\frac{d\,B_4}{d\,i}\frac{\sqrt{l-l}}{cos\,i}. \tag{27}$$

Calculating the derivatives of A_4, B_4 we again neglect the finite terms. Only the derivatives of those elements which correspond to the waves *1* and *4* become infinite. And we have again:

$$l_1' = -l_4', \quad m_1' = -m_4', \quad n_1' = -n_4', \quad p_1' = -p_4'.$$

Therefore

$$lim \frac{d A_s}{di} = \frac{\Delta \Delta'_{A\,4} - \Delta' \Delta_{A\,4}}{\Delta^2} = \frac{2}{\Delta}\left\{ | l_1, 0, l_1', \overline{l_2} | + \sqrt{-1} | l_1, 0, l_1', \overline{\overline{l_2}} | \right\}, \quad (28_1)$$

where $l_2 = \overline{l_2} + \sqrt{-1}\,\overline{\overline{l_2}}$ et c. (Only the elements corresponding to the wave *2* are complex.)

Analogically we have

$$lim \frac{d B_4}{d i} = \frac{2}{\Delta}\left\{ | \cos i, l_1, l_1', \overline{l_2} | + \sqrt{-1} | \cos i, l_1, l_1', \overline{\overline{l_2}} | \right\}. \quad (28_2)$$

After substituting these terms in (27), we get (when we designate the common factor by k)

$$\begin{aligned} \overline{a_1} &= k \,.\, | l_1, 0, l_1', \overline{l_2} | \quad , \quad \overline{\overline{a_1}} = k \,.\, | l_1, 0, l_1', \overline{\overline{l_2}} | \quad , \\ \overline{b_1} &= k \,.\, | \cos i, l_1, l_1', \overline{l_2} | \quad , \quad \overline{\overline{b_1}} = k \,.\, | \cos i, l_1, l_1', \overline{\overline{l_2}} | \end{aligned} \quad (29)$$

When we use these results to calculate those angles ψ at which the *outer* limiting line disappears, we get, in the special cases of crystals which we are considering in this paper, the following formulae:

1. *a) Uni-axial Positive Crystals:*

$$tg\, 2\psi = \frac{2 \sin \mu \sin \vartheta \,(\cos \mu \sin I - r^2 \sin \mu \cos \vartheta \cos I)}{\sin^2 \mu \sin^2 \vartheta \,(r^2 \cos^2 I + \sin^2 I) - (r^2 \sin^2 \mu \cos^2 \vartheta + \cos^2 \mu)}, \quad (30_1)$$

where $r^2 = \frac{o^2 - e^2}{o^2} \cdot \frac{o^2 \cos^2 \mu + e^2 \sin^2 \mu \sin^2 \vartheta}{o^2 \cos^2 \mu + e^2 \sin^2 \mu}$ is the coefficient of absorption.

When we neglect the terms of the order r^4, we get

$$tg\, \psi = -\, tg\, \mu \sin \vartheta \sin I + \\ + r^2 \frac{tg^2 \mu \sin \vartheta \,(\cos \mu \cos \vartheta - \sin \mu \sin^2 \vartheta \sin I \cos I)\,(\cos \mu \cos I + \sin \mu \cos \vartheta \sin I)}{\cos^2 \mu + \sin^2 \mu \sin^2 \vartheta \sin^2 I}. \quad (30_2)$$

1. *b) Uni-axial Negative Crystals:*

When we neglect the terms of the order of $\frac{(e^2 - o^2)^2}{o^4}$, which we practically can do, we get

$$tg\, \psi = \frac{cotg\, \mu \sin I}{\sin \vartheta}\left\{ 1 + \frac{e^2 - o^2}{o^2} \cdot \right. \\ \left. \frac{(M^2 \sin I + \sin^3 \mu \cos \mu \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \cos^3 I)\,(\cos \mu \cos I + \sin \mu \cos \vartheta \sin I)}{(\cos^2 \mu \sin^2 I + \sin^2 \mu \sin^2 \vartheta) \cos \mu \sin I \cos I} \right\}. \quad (31)$$

2. *Bi-axial Crystals.*

b) When $\frac{1}{b}$ is the *minimum* of the *outer* limiting line, we get the formula for ψ_b, when we substitute into the above derived equations the following values:

$$q_1 = b, \quad p_2 = 0, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2} .$$

For the angle $\varphi_{2,3}$ we have the equation (20), — of course now the corresponding discriminant $D < 0$ and also $\delta^2 < 0$ and therefore $cotg\, \varphi_{2,3}$ has complex values.

I consider again two cases:

α) $\eta\, tg^2\, \omega$ is very small in comparison to $tg^2\, \omega\, sin^2\, \vartheta - cos^2\, \vartheta$ and we can neglect it. Then we have

$$tg\, \psi_b = - tg\, \mu\, sin\, I \qquad (32_\alpha)$$

(the next member is of the order η and I neglect it).

β) $tg^2\, \omega\, sin^2\, \vartheta - cos^2\, \vartheta = n\, .\, \eta\, .\, tg^2\, \omega$, where $1 \leq n$.

As in the analogical case of the *inner* limiting line so also now I write no *upper* limit for n. The greater n is than 1, — so that we can neglect $\eta\, tg^2\, \omega$ in comparison to $tg^2\, \omega\, sin^2\, \vartheta - cos^2\, \vartheta$, — the more exactly the formula α) holds good. The nearer n is to 1, the more exactly the following formula β) holds good.

This approximative formula β) is as follows:

$$tg\, 2\, \psi_b = \frac{2\, (n-1)\, sin\, \mu\, cos\, \mu\, sin\, I}{(cos^2\, \mu + n\, sin^2\, \mu)\, sin^2\, I - (n-1)\, cos^2\, \mu} , \qquad (32_\beta)$$

where

$$n = \frac{tg^2\, \omega\, sin^2\, \vartheta - cos^2\, \vartheta}{\eta\, .\, tg^2\, \omega}$$

c) In the case of the *maximum* of the *outer* limiting line we have

$$q_1 = c, \; p_3 = 0, \; \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$$

and the angle ψ_c corresponding to the least visibility of the *outer* limiting line is given by

$$tg\, \psi_c = - tg\, \mu\, sin\, I = - \frac{\sqrt{1 - r_3^2}}{r_3}\, sin\, I. \qquad (33)$$

Summary.

The view of K a e m m e r e r and S c h w i e t r i n g that the limiting lines arise through a discontinuity of the *intensity* is not right, because the intensity varies continuously, as I have shown. A discontinuity lies only in the *derivative* of the intensity. Therefore I agree with Z á v i š k a

and K o l á č e k, that to remove the limiting lines we must remove (or make minimal) that discontinuity.

My formulae derived in the case of the *S*-method agree in the *first* approximation with the formulae of the latter named authors.

In some cases I have calculated the formulae in the case of the *inner* limiting line more exactly (up to the order of η). — I may add that the *second* member in the development for $tg\,\psi$ is only of the order of $\sqrt{\eta}$ and therefore can sometimes have a not inconsiderable influence on the value of ψ.

In the case of the *T*-method my formulae are quite different from those in the *S*-method, *i. e.* the differences of the corresponding angles ψ_T and ψ_S (which I get in the case of the *T*- and *S*-method) are perceptible already in the *first* member of the development for $tg\,\psi$.

Therefore I do not consider the affirmation of Z á v i š k a and K o l á č e k to be true that both methods lead to the same results. Those experiments by which Z á v i š k a and K o l á č e k seek to verify their theories are mostly of such especial kind that also by my formulae it is $\psi_T = \psi_S$ or the difference $\psi_T - \psi_S$ is very small. Besides which they sometimes use measurements made only by one method.

I think that it is necessary to make new measurements which, from among all the theories, could determine the true one. First of all that will be that measurement to which S c h w i e t r i n g appeals, *viz.*: the measurement on the *limestone* polished parallel with the optical axis ($\mu = 90^0$) immersed in *bisulphide of carbon* (whose index of refraction is $N = 1{\cdot}63190$) when the azimuth of the plane of incidence $\vartheta = 30^0$. Then for the *Na*-light the *inner* limiting line disappears according to

S c h w i e t r i n g	for	$\psi_S = 112^0\ 44{\cdot}5'$	and for $\psi_T = 123^0\ 55{\cdot}7'$,
Z á v i š k a	for	$\psi_S = \psi_T = 67^0\ 20{\cdot}8'$,	
my formulae	for	$\psi_S = 67^0\ 20{\cdot}8'$	and for $\psi_T = 74^0\ 11{\cdot}2'$
		$= 180^0 - 112^0\ 39{\cdot}2'$	$= 180^0 - 105^0\ 48{\cdot}8'$.

I am glad to be able here to express my best thanks to Prof. Dr. Z á v i š k a for directing my attention to this problem of the polarisation of the limiting lines and for his kind advice whenever I was in need of same.

Sur les rapports entre la représentation des quadriques de Pelz et l'axonometrie clinogonale.

Par J. SOBOTKA.

Présenté le 11 Janvier 1924.

1. Rapportons la conique centrale k à un système $O\,(x, y)$ de coordonnées orthogonales, dont l'origine est le centre de la conique, l'axe des x son axe principal, c. à d. celui qui contient les foyers réels, l'axe des y son axe latéral.

Soient A_1, B_1 les extrémités de deux demi-diamètres conjugués de k, soit, de plus, a_1 la longueur du demi-diamétre $O\,A_1$, b_1 celle du demi-diamètre $O\,B_1$; a la longueur du demi-axe situé sur l'axe des x, b celui du demi-axe situé sur l'axe des y; E l'excentricité linéaire réelle. En fin de compte, désignons par α_1, β_1 respectivement les angles $(x, O\,A_1)$, $(x, O\,B_1)$. On a les relations:

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2\,;\; a_1^2 \cos^2 \alpha_1 + b_1^2 \cos^2 \beta_1 = a^2\,;\; a_1^2 \sin^2 \alpha_1 = b_1 \sin^2 \beta_1 = b^2 \quad (1)$$

En retranchant la dernière de la seconde on obtient l'équation

$$a_1^2 \cos 2\,\alpha_1 + b^2,\ \cos 2\,\beta_1 = E^2 \qquad (2)$$

Il résulte de (1)

$$a^2 b^2 = a_1^4 \cos^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_1 + a_1^2 b_1^2 (\cos^2 \alpha_1 \sin^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_1 \sin^2 \alpha_1)$$
$$+ b_1^4 \sin^2 \beta_1 \cos^2 \beta_1 = (a_1^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + b_1^2 \sin \beta_1 \cos \beta_1)^2$$
$$+ a_1^2 b_1^2 (\sin \alpha_1 \cos \beta_1 - \cos \alpha_1 \sin \beta_1)^2\,.$$

Comme on a $a_1^2 b_1^2 \sin^2 (a_1 b_1) = a^2 b^2$, on obtient encore l'équation.

$$a_1^2 \sin 2\,\alpha_1 + b_1^2 \sin 2\,\beta_1 = 0 \qquad (3)$$

Ces équations ont lieu, que les longueurs a_1, b_1, a, b soient réelles ou imaginaires. Si l'on multiplie (3) par l'unité imaginaire, on obtient, en ajoutant cette équation à (2):

$$a_1^2 e^{2i\alpha_1} + b_1^2 e^{2i\beta_1} = E^2$$

ce qu'on peut écrire d'une manière plus générale

$$a_1^2 e^{2i(\alpha_1 + \omega)} + b_1^2 e^{2i(\beta_1 + \omega)} = E^2 e^{2i\omega}.$$

Donc, si l'on rapporte une conique à un système de coordonnées orthogonales quelconque ayant l'origine au centre de la conique et si les demi-diamètres conjugués $O\,A_1$, $O\,B_1$ font avec l'axe des x les angles α, β, on a l'équation

$$a_1^2\, e^{2i\alpha} + b_1^2\, e^{2i\beta} = E^2\, e^{2i\omega}, \tag{4}$$

où ω signifie l'angle que fait l'axe principal de la conique avec l'axe des x et où l'angle est déterminé à des multiples de π près.

Soient, maintenant A_1, B_1, E des nombres complexes déterminés, dans le plan complexe, par les points A_1, B_1 et un foyer réel; alors, on peut écrire la dernière équation dans la forme

$$\varepsilon\, A_1^2 + \varepsilon'\, B_1^2 = E^2, \tag{5}$$

où ε et ε' désignent l'unité positive ou négative; par suite, cette relation a lieu pour toutes les coniques centrales ordinaires.

L'équation (5) ne changeant pas, si l'on fait tourner les axes des coordonnées autour de O dans le plan de la conique, on peut considérer cette équation comme une relation géométrique entre les points A_1, B_1 et le foyer E.

2. Appliquons, tout d'abord (fig. 1.), l'équation (5) à la construction des foyers d'une ellipse déterminée par les demi-diamètres conjugués $O\,A_1$, $O\,B_1$. Pour cette courbe l'équation (5) est $A_1^2 + B_1^2 = E^2$, d'où il résulte

$$(A_1 + i\,B_1)\ (A_1 - i\,B_1) = E^2.$$

Comme B_1 exprime le vecteur $O\,B_1$, $i\,B_1$ exprime le vecteur qu'on obtient en faisant tourner $O\,B_1$ de $\frac{\pi}{2}$ autour du point O, et $-\,iB$ le vecteur obtenu en faisant tourner OB de $-\frac{\pi}{2}$. Donc, si l'on porte sur la perpendiculaire abaissée du point A_1 sur $O\,B_1$, partir du point A_1 dans les deux sens la longuer $O\,B_1$, on obtient les extrémités G, H. Si le segment $A_1\,G$ correspond à la rotation positive, $A_1\,H$ à la rotation négative, on a

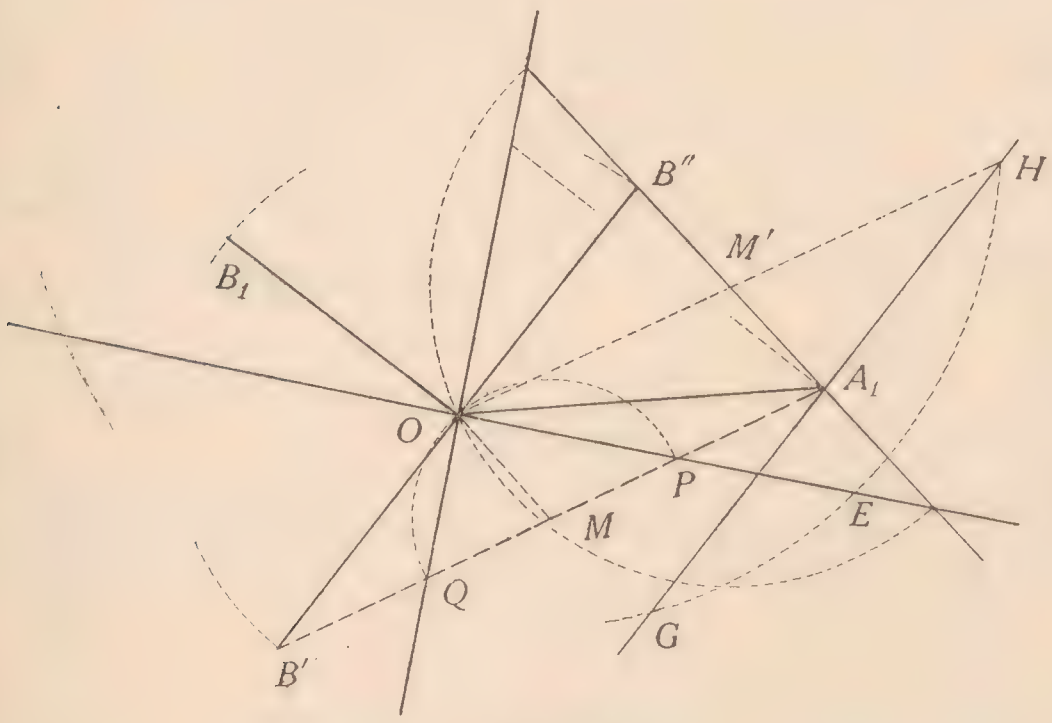


Fig. 1.

$$G = A_1 + i\,B_1,\ H = A_1 - i\,B_1,$$
et, par suite, $G\,.\,H = E^2$,

ce qui veut dire, que la droite $O\,E$ est la bissectrice de l'angle des vecteurs $O\,G$, $O\,H$. Les triangles $O\,A_1\,G$, $O\,A_1\,H$ donnent pour les valeurs absolues

$$O\,G^2 = a_1^2 + b_1^2 \pm 2\,a_1\,b_1\,sin\,(a_1\,b_1),\ O\,H^2 = a_1^2 + b_1^2 \pm 2\,a_1\,b_1\,sin\,(a_1\,b_1),$$

où il faut prendre, en même temps, les signes correspondants. En ajoutant et en retranchant on obtient

$$O\,G^2 + O\,H^2 = 2\,(a_1^2 + b_1^2),$$
$$O\,G^2 - O\,H^2 = \pm 4\,a_1\,b_1\ sin\ (a_1\,b_1) = \pm 4\,a\,b;$$

et, de plus

$$|\,O\,G\,|^2 = (a \pm b)^2,\ |\,O\,H\,|^2 = (a \mp b)^2$$

de sorte que

$$2\,a = |\,O\,G + O\,H\,|,\ 2\,b = |\,O\,G - O\,H\,|.$$

Il résulte, de plus, de la relation $G\,.\,H = E^2$, que la circonférence passant par les points G, H et dont le centre est situé sur la perpendiculaire à OE, coupe l'axe principal aux foyers de l'ellipse. On retrouve ainsi les constructions bien connues de Chasles.

Pour l'hyperbole, on peut écrire

$$A_1^2 - B_1^2 = E^2,\ \text{et, par suite}\ (A_1 + B_1)\ (A_1 - B_1) = E^2\,.$$

Donc, si l'on mène par le point A_1 une parallèle à $O\,B_1$, sur laquelle on porte les segments $A_1\,G = H\,A_1 = O\,B_1$, l'axe principal est bissecteur de l'angle des vecteurs $O\,G$, $O\,H$ et la relation $G\,.\,H = E^2$ donne, dans la suite, la même construction des foyers qu'auparavant.

Pour une conique centrale imaginaire l'équation (5) affecte la forme

$$-A_1^2 - B_1^2 = E^2,\ \text{ou bien}\ A_1^2 + B_1^2 = -E^2 = (i\,E)^2\,,$$

d'où il résulte que la valeur absolue de E équivaut à celle valable pour l'ellipse réelle remplaçant la conique en question, mais dont l'axe principal et latéral sont échangés.

Mais l'équation $A_1^2 + B_1^2 = E^2$, ayant lieu pour l'ellipse, donne encore une autre construction connue des axes de l'ellipse. On voit, tout d'abord, que l'ellipse ayant les demi-diamètres conjugués $O\,A_1$, $O\,B_1$ d'une part, et l'hyperbole concentrique ayant $O\,A_1$ pour demi-diamètre réel, et dont le demi-diamètre conjugué à celui-ci est perpendiculaire à $O\,B_1$ et possède la longueur $O\,B_1$ d'autre part, sont confocales; car pour l'ellipse on a l'équation donnée ci-dessus et pour l'hyperbole en question on a

$$A_1^2 - (i\,B_1)^2 = E^2,$$

ce qu'on peut énoncer encore de la manière suivante:

„Les demi-diamètres conjugués au diamètre commun d'une ellipse et d'une hyperbole confocales ont la même longueur absolue et sont perpendiculaires.“

Donc, si $O\,A_1$, $O\,B_1$ sont des demi-diamétres conjugués de l'ellipse et si l'on fait tourner l'un d'eux, p. ex. $O\,B_1$ de $\frac{\pi}{2}$ en un sens quelconque, dans la position finale $O\,B'$, l'hyperbole dont $O\,A_1$, $O\,B'$ sont des demi-diamètres conjugués, le deuxième étant imaginaire, a les axes et les foyers communs avec l'ellipse.

Les points $M = (A_1 + i\,B_1) : 2$ et $M' = (A_1 - i\,B_1) : 2$ sont situés sur les asymptotes de l'hyperbole. Si $B' = i\,B_1$ et $B'' = -\,i\,B_1$, le point M est le centre du segment $A\,B'$, le point M' celui du segment $A\,B''$; par conséquent, la circonférence au centre M et qui passe par le point O coupe $A\,B'$ aux points P, Q, dont celui qui se trouve avec A_1 dans le même angle complet des asymptotes appartient à l'axe principal, l'autre à l'axe latéral.

Les triangles $O\,A_1\,B'$, $O\,A_1\,B''$ donnent des relations pour les longueurs absolues, si l'on pose $O\,A_1 = a$, $O\,B_1 = b$ et si l'on désigne par a_0 la longueur du demi-axe principal, par b_0 celle du demi-axe latéral de l'ellipse:

$$A_1\,B'^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,cos\left(a\,b \pm \frac{\pi}{2}\right) = a^2 + b^2 \pm 2\,a\,b\,sin\,a\,b =$$

$$= a_0^2 + b_0^2 \pm 2\,a_0\,b_0 = (a_0 \pm b_0)^2,$$

$$A\,B''^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,cos\left(a\,b \mp \frac{\pi}{2}\right) = a^2 + b^2 \mp 2\,a\,b\,sin\,a\,b = (a_0 \mp b_0)^2,$$

où il faut prendre l'un signe ou l'autre. On a, par suite,

$$A_1\,B' = |\,a_0 \pm b_0\,|\,,\ A_1\,B'' = |\,a_0 \mp b_0\,|\,,$$

et, par conséquent

$$a_0 = \tfrac{1}{2}\,(A_1\,B' + A_1\,B''),\ b_0 = \tfrac{1}{2}\,|\,A_1\,B' - A_1\,B''\,|\,.$$

Si P est le point respectif de l'axe principal, on a

$$A_1\,P = b_0,\ B'\,P = a_0\,.$$

On aurait pu faire usage, pour la construction, du point M' d'une manière analogue à celle employée pour le point M.

Les équations (1) donnent, si l'on désigne par a_0', b_0' les longuers absolues des demi-axes de l'hyperbole considérée, les relations

$$a_0^2 - a_0'^2 = b_0^2 + b_0'^2 = b^2,\quad b_0^2 + a_0^2 = a_0^2 - b_0'^2 = a^2,$$

de sorte que

$$a'^2 = a_0^2 - b_0^2 = a^2 - b_0^2,\quad b_0'^2 = a_0^2 - a^2 = b^2 - b_0^2.$$

3. Supposons que la courbe k soit une parabole, dont le foyer soit encore E.

Par un point arbitraire O de cette courbe menons une parallèle ξ à la direction positive de l'axe et la tangente η; la parabole possède, alors, dans le système $O\,(\xi, \eta)$ l'équation

$$\eta^2 = 2\,p\,\xi\,.$$

On obtient la signification géométrique du paramètre p dans cette équation si l'on coupe ξ par la directrice de la parabole au point R et si l'on mène, par le point S symétrique à R par rapport au point O une paralléle à η. Cette paralléle coupe k en deux points réels C, D, pour lesquels $D\,S = S\,C$. Les droites $R\,C$, $R\,D$ sont tangentes à la parabole et comme elles se coupent sur la directrice, on a $R\,D \perp R\,C$; le foyer E de la parabole est le pied de la

perpendiculaire abaissée de R sur CD. Donc, la droite CD passe par le foyer E et $ER \perp CD$; de plus $OE = OR$ et $\sphericalangle(\xi, \eta) = \sphericalangle(\eta, EO)$. Pour $\xi = \overline{OS}$, on à $\eta = \overline{SC} = 2\overline{OS}$, de sorte que l'équation de la parabole donne $p = 2\overline{OS} = \overline{RS} = 2\overline{OE}$.

Prenons un système de coordonnées orthogonales $O(x, y)$ à l'origine O, pour lequel $+x = +\xi$, et si l'on projette un point M arbitraire de la courbe k parallélement à ξ sur η au point A, et parallèlement à η sur ξ au point B, il suit, de la relation établie ci-dessus, l'équation

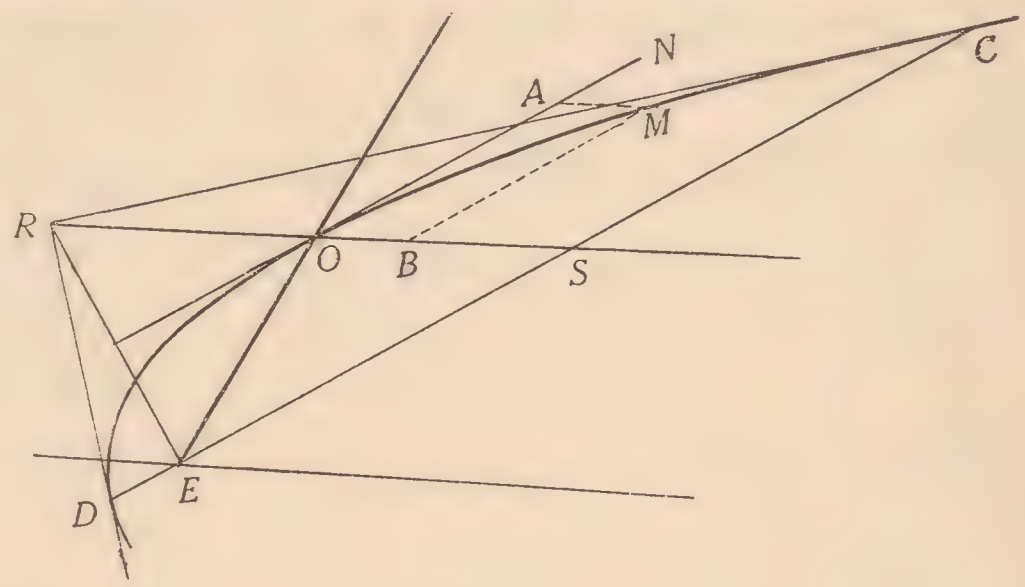


Fig. 2.

$$A^2 + 4BE = O. \qquad (6)$$

Cette relation ne change pas, évidemment, si l'on remplace x, y par d'autres coordonnées $O(x, y)$ orthogonales.

Si, cependant, on choisissait pour le sens positif de ξ le sens négatif de l'axe de la parabole, de sorte que $+\xi$ fût situé hors de la parabole, on obtiendrait, d'une manière analogue, l'équation

$$-A^2 + 4BE = O. \qquad (6')$$

Si le point M est imaginaire, η^2 est négatif; par suite OS change aussi de signe et les équations (6) et (6′) s'échangent. On peut comprendre les deux cas en une seule équation

$$\varepsilon A^2 + 4BE = O. \qquad (6'')$$

où ε est égal à $+1$ (ou à -1), si la parallèle à la tangente de la parabole au point O, menée par le point B, l'abscisse OB étant positive, coupe cette abscisse en un point réel (ou non).

4. Cela posé, projetons la quadrique centrale P^2 parallèlement sur le plan M. On peut supposer dans qui suit, sans aucune restriction de généralité, que ce plan passe par le centre O de la quadrique. Cherchons les rapports entre le contour k de la projection de la surface et les projections OX, OY, OZ de trois demi-diamètres conjugués. Soit x l'axe principal de la courbe k, y l'axe latéral. Si les droites OX, OY, OZ font avec $+x$ les angles α, β, γ et si l'on désigne par a, b, c les longueurs des projections des demi-diamètres $O(X)$, $O(Y)$, $O(Z)$ qui se projettent en OX, OY, OZ, et si, enfin, A_0 est la longueur du demi-axe principal et B_0 la longueur du demi-axe latéral de la conique k, on a

$$a^2 + b^2 + c^2 = A_0^2 + B_0^2, \quad \text{et de plus}$$
$$a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma = A_0^2 \qquad (7')$$
$$a^2 \sin^2\alpha + b^2 \sin^2\beta + c^2 \sin^2\gamma = B_0^2 \qquad (7'')$$

d'où il vient, en retranchant,

$$a^2 \cos 2\alpha + b^2 \cos 2\beta + c^2 \cos 2\gamma = E^2 \qquad (7)$$

où E est la longueur de l'excentricité.

Désignons par α_1, β_1, γ_1 les angles que font les droites OX, OY, OZ avec une droite arbitraire x_1 menée par le point O; on a

$$a^2 \cos^2 \alpha_1 + b^2 \cos^2 \beta_1 + c^2 \cos^2 \gamma_1 = A_1^2,$$

où A_1 désigne la distance du point O aux tangentes de la courbe k parallèles à l'axe des y_1; cette distance a, pour l'axe des x, une valeur extrême, par conséquent la derivée de la fonction à gauche de (7) par rapport à α doit être nulle. Cela donne la condition

$$a^2 \sin 2\alpha + b^2 \sin 2\beta + c^2 \sin 2\gamma = 0. \qquad (8)$$

On trouve cette condition aussi en employant le procédé dont on a fait usage pour la conique. Multiplions membre par membre les équations (7'), (7''); il vient

$$A_0^2 B_0^2 = \Sigma a^4 \cos^2\alpha \sin^2\alpha + \Sigma a^2 b^2 (\cos^2\alpha \sin^2\beta + \sin^2\alpha \cos^2\beta)$$
$$= (a^2 \cos\alpha \sin\alpha + b^2 \cos\beta \sin\beta + c^2 \cos\gamma \sin\gamma)^2 -$$
$$2 \Sigma a^2 b^2 \cos\alpha \sin\alpha \cos\beta \sin\beta + \Sigma a^2 b^2 (\cos^2\alpha \sin^2\beta + \sin^2\alpha \cos^2\beta),$$

et, par suite

$$4 A_0^2 B_0^2 = (a^2 \sin 2\alpha + b^2 \sin 2\beta + c^2 \sin 2\gamma)^2 + 4 \Sigma a^2 b^2 \sin^2 (a\,b).$$

Comme

$$a^2 b^2 \sin^2 (a\,b) + b^2 c^2 \sin^2 (b\,c) + c^2 a^2 \sin (c\,a) = A_0^2 B_0^2,$$

ce que j'ai fait voir ailleurs,[1]) cette équation donne, de nouveau, l'équation (8).

Si l'on multiplie l'équation (8) par l'unité imaginaire et que l'on l'ajoute à l'équation (7), on obtient l'équation

$$a^2 e^{2i\alpha} + b^2 e^{2i\beta} + c^2 e^{2i\gamma} = E^2 \,(mod\ \pi). \qquad (9)$$

Désignons, d'une manière analogue à celle employée plus haut, par A, B, C, E les nombres complexes exprimant les extrémités X, Y, Z et un foyer réel de courbe de contour k; on peut écrire l'équation (9) aussi dans la forme

$$\varepsilon_1 A^2 + \varepsilon_2 B^2 + \varepsilon_3 C^2 = E^2 \qquad (10)$$

où ε_1, ε_2, ε_3 désignent l'unité positive ou négative. Cette équation comprend les contours de toutes les quadriques centrales qu'on peut définir à l'aide d'une polarité réelle de l'espace. L'équation (9) a été établie pour les coordonnées, données par les axes de la conique k; mais on a, d' une façon générale, dans tout système de coordonnées orthogonale $O\,(x_1, y_1)$ l'équation

$$a^2 e^{2i\alpha_1} + b^2 e^{2i\beta_1} + c^2 e^{2i\gamma_1} = E^2 e^{2i\omega}, \qquad (9')$$

où α_1, β_1, γ_1 sont les angles (x_1, OX), (x_1, OY), (x_1, OZ) et ω l'angle (x_1, x). Par suite l'équation (10) ne change pas, si l'on transforme les coordonnées orthogonalement en conservant l'origine, de manière qu'on peut l'inter-

[1]) Bulletin 1924 Nro. 2.

préter comme une relation entre le point E et les points X, Y, Z par rapport à l'origine O.

5. La construction des foyers du contour k de la projection de la quadrique P^2 résulte de (10), de manières différentes. On peut construire, d'abord, les foyers d'une des coniques ayant, comme demi-diamètres conjugués, deux segments de ces trois: OX, OY, OZ. Faisons-le, p. ex., pour la conique k_3 donnée par les deux premiers; pour un de ses foyers réels, E_1, à lieu la relation (5)

$$\varepsilon_1 A^2 + \varepsilon_2 B^2 = E_1,$$

de sorte que (10) donne $E_1^2 + \varepsilon_3 C^2 = E^2$. D'où le théorème:

„Si a, b, c sont des projections parallèles données de trois demi-diamètres conjugués d'une quadrique, partant du point O, et E_1 un foyer réel de la conique ayant deux de ces projections pour demi-diamètres conjugués, alors la conique k_3', déterminée par la projection qui reste et par le segment OE_1 comme demi-diamètres conjugués, est confocale au contour k de la projection de la surface P^2."

Le point E_1 est la projection parallèle d'un point (E_1) dans le plan $O\,(X)\,(Y)$ de la conique (k_3) dont k_3 est la projection.

Désignons par (R) le plan $O\,(Z)\,(E_1)$ et soit f la droite perpendiculaire, dans le plan de projection, à OE_1; soit (f) la droite dans $O\,(X)\,(Y)$ dont f est la projection. Désignons par (S) le plan $O\,(Z)\,(f)$. Soit (r) la courbe d'intersection de la quadrique P^2 avec le plan (R) et (s) celle avec le plan (S). Le point $i\,E_1$ de la droite f est un foyer imaginaire de la courbe k_3; il est la projection d'un certain point imaginaire (E_1^*) du plan $O\,(X)\,(Y)$. La conique (k_3') donnée par les demi-diamètres conjugués $O\,(E_1)$, $O\,(Z)$ et la conique (k_3^*) donnée par les demi-diamètres conjugués $O\,(E_1^*)$, $O\,(Z)$ sont des figures affines respectivement à (r) et à (s) et possèdent, évidemment, la propriété que la conique (h) en laquelle un plan H quelconque, parallèle à $O\,(X)\,(Y)$ coupe P^2, se projette en une conique h, les foyers de laquelle, situés sur un axe, sont les projections des points d'intersection du plan H avec la courbe (k_3'), tandis que les foyers de l'autre axe sont les projections des points d'intersection du même plan avec la courbe (k_3^*).

On arrive par-là au théorème de Pelz:[1])

„Les foyers des projections parallèles des coniques d'une quadrique centrale, situées dans des plans parallèles, remplissent deux coniques confocales k_3', k_3^* qui sont confocales aussi avec le contour de la projection de la surface."

On peut, en effet, prendre un plan quelconque contenant le centre de la quadrique pour le plan $O\,(X)\,(Y)$ et son diamètre conjugué pour $O\,(Z)$; et comme nous avons démontré, plus haut, que la conique de contour k a les mêmes foyers réels que la conique k_3', celle a les mêmes foyers imaginaires que la conique k_3^*.

---

[1]) Ueber eine allg. Bestimmungsart der Brennpunkte von Contouren der Fl. 2. Fr. Sitzungsber. d. k. Akademie d. Wissensch. in Wien LXXV, 1877.

Le foyer E_1 est réel. Si C est un point d'intersection de la droite $O\,(Z)$ avec P^2, et si ce point est imaginaire, k_3' est une hyperbole pour laquelle OZ est un diamètre imaginaire. Par suite, k_3' contient les foyers réels des projections de toutes les sections avec les plans parallèles à $O\,(X)\,(Y)$ et k_3^* tous leurs foyers imaginaires. Les sections de la surface P^2 avec les plans réels parallèles à H sont, en ce cas, ou toutes réelles, ou toutes imaginaires. La surface P^2 elle-même est un hyperboloïde à une ou à deux nappes, ou bien elle est imaginaire.

Si, au contraire, C est un point réel, k_3' est une ellipse ayant les demi-diamètres conjugués $O\,E_1$, $O\,C$, tandis que k_3^* est une hyperbole aux demi-diamètres conjugués dont l'un joint les points O, $i\,E_1$, l'autre O, C. En ce cas, la surface P^2 est, ou un ellipsoïde: si $(\overline{C})$ est le point symétrique à C par rapport au centre O, les plane parallèles à H coupent la surface ou suivant des ellipses réelles dont les centres sont situés sur le segment $(C)\,(\overline{C})$, ou suivant des courbes imaginaires dont les centres sont situés en dehors de ce segment; les foyers réels des projections des premières sont sur k_3', ceux des projections des deuxièmes sur k_3^*. Ou bien, la surface P^2 est un hyperboloïde à une nappe pour lequel toutes les sections avec des plans parallèles à H sont des hyperboles réelles, qui dégénèrent, en (C) et $(\overline{C})$, en des droites, ou, en fin de compte, la surface est un hyperboloïde à deux nappes, pour lequel les plans parallèles à H, et qui coupent le segment $(C)\,(\overline{C})$, contiennent des courbes imaginaires dont les projections ont leurs foyers réels sur k_3'; le reste de ces plans contient des ellipses réelles dont les projections ont leurs foyers réels sur k_3^*.

6. On aurait pu aboutir à la relation (10) aussi par la considération suivante. Désignons par (h_3), (h_2), (h_1) les coniques de la surface P^2 situées, respectivement, dans les plans $O\,(X)\,(Y)$, $O\,(X)\,(Z)$, $O\,(Y)\,(Z)$; et par h_3, h_2, h_1 leurs projections. Si (M) est un point arbitraire de (h_3) et (m) la tangente à la courbe en ce point, le cylindre de la direction (m) circonscrit à P^2 la touche suivant une conique pour laquelle $(O\,M)$ et $O\,(Z)$ sont des demi-diamètres conjugués; il suit de là que les tangentes parallèles à la projection m de la tangente (m) à la courbe ayant les demi-diamètres conjuguées $O\,M$, $O\,Z$ sont tangentes à la conique de contour k et leurs points de contact sont sur k. Or, déterminons, pour (h_3) deux demi-diamètres conjugués $O\,(A_2)$, $O\,(B_2)$ de sorte que la projection de l'un d'eux $(O\,B_2)$ soit situé sur la droite $O\,Z$; alors la conique (h_1') aux demi-diamètres conjugués $O\,(B_2)$, $O\,(Z)$ et (h_2') aux demi-diamètres conjugués $O\,(A_2)$, $O\,(Z)$ ont la propriété que la projection de la première soit la droite $h_1' \equiv O\,Z$, celle de la seconde la conique h_2' ayant les demi-diamètres conjugués $O\,Z$, $O\,A_2$; $O\,A_2$ étant, en même temps, diamètre de la courbe k, dont le diamètre conjugué $O\,C'$ est situé sur $O\,Z$ et

$$OC'^2 = \pm\,\varepsilon_2\,OB_2^{\,2} + \varepsilon_3\,OC^2\,,$$

ce qui résulte de ce que $O\,(Z)$ et $O\,(B_2)$ sont deux diamètres conjugués de

la courbe (h_1') située dans le plan projetant et dont le diamètre, conjugué à la droite projetante menée par le centre O, se projette comme le segment OC' déterminé par la relation qui vient d'être établie.

Par conséquent, on a pour k l'équation

$$C'^2 \pm \varepsilon_1 A_2^2 = E^2,$$

qui donne, en vertu de la relation donnée ci-dessus, l'équation

$$\pm \varepsilon_1 A_2^2 \pm \varepsilon_2 B_2^2 + \varepsilon_3 C^2 = E^2$$

où il faut prendre à la fois les signes correspondants. Mais on a

$$\pm \varepsilon_1 A_2^2 \pm \varepsilon_2 B_2^2 = \varepsilon_1 A_1^2 + \varepsilon_2 B_1^2 = E_3^2,$$

où E_3 est un foyer de la courbe h_3. En substituant cette valeur de E_3 dans l'équation précédente, il vient

$$\varepsilon_1 A_1^2 + \varepsilon_2 B_1^2 + \varepsilon_3 C^2 = E^2,$$

ce qui est identique avec (10).

7. On peut faire des considérations analogues pour les paraboloïdes P^2. Soit (fig. 3.) O un point arbitraire du paraboloïde P^2; on peut supposer qu'il est situé dans le plan de projection; soit O (S) le diamètre du paraboloïde mené par le point O sur lequel on à choisi le point (S); le plan (H) contenant ce point et parallèle au plan tangent (T) du paraboloïde au point O, le coupe en une conique (h) réelle ou imaginaire. Faisons subir à (h) une translation parallèle à la direction (S) O telle que le point (S) coïncide avec le point O; on obtient ainsi la conique (h_0) contenue dans le plan (T). Par-là les demi-diamètres (S) (A), (S) (B) de la courbe (h) se changent en les demi-diamètres (O) (A_0), O (B_0) de la courbe (h_0).

La projection de la parabole de P^2 dans le plan O (S) (A) est la parabole exprimée par l'équation (6''); en tenant compte de la notation actuelle, on a $\varepsilon A_0^2 + 4 S E_\alpha = O$, où E_α est le foyer réel de cette projection et $\varepsilon = +1\ (-1)$, si le demi-diamètre O (A) est réel (imaginaire). On obtient, d'une manière analoque, pour le demidiamètre de la parabole de P^2 située dans le plan O (S) (B)

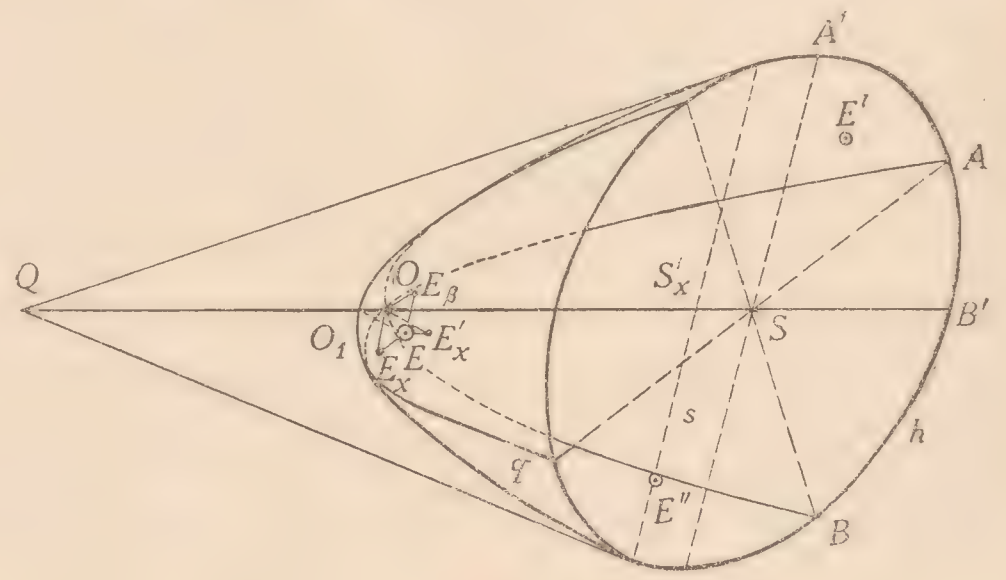


Fig. 3.

$$\varepsilon B_0^2 + 4 S E_\beta = 0,$$

où E_β est le foyer réel de cette projection. On obtient, en ajoutant ces équations,

$$E_0^2 + 4 S (E_\alpha + E_\beta) = O \qquad (10')$$

où E_0 est un foyer réel de la conique h_0, pour lequel on a

$$\varepsilon A_0^2 + \varepsilon' B_0^2 = E_0^2.$$

Si OA_0', OB_0' sont des demi-diamètres de h_0, dont OB_0' est situé sur OS, la projection de la parabole située dans le plan $O(S)(B')$ se réduit à une droite, et au foyer correspond le point E_β' pour lequel

$$\varepsilon' B_0'^2 + 4 S E_\beta' = O.$$

Si E_α' est le foyer de la projection p de la parabole (p) du plan $O(S)(A')$, on a $\varepsilon A_0'^2 + 4 S E_\alpha' = O$, et par suite

$$E_\alpha + E_\beta = E_\alpha' + E_\beta'.$$

Le contour de la projection de la surface P^2 est une parabole q, projection de la parabole (q) dont le plan est parallèle au plan diamétral conjugué aux droites projetantes; il en suit que les plans des courbes (q) et (p) sont parallèles et, par conséquent, le contour q est une parabole congruente et homothétique à p. Le point Q symétrique à (S) par rapport au point O est le sommet du cône circonscrit à la quadrique P^2 suivant (h). C'est pourquoi la parabole q touche la conique h aux points réels ou imaginaires en lesquels la courbe h est coupée par la polaire s du point Q. Cette polaire est parallèle à SA'; si elle coupe OS au point S_α et si O_1 est le centre du segment QS_α, la tangente de la courbe q au point O_1 est parallèle à s et à SA'. Ainsi cette courbe est parfaitement déterminée. On a, évidemment,

$$O_1O = \frac{1}{2} S_\alpha S, \quad QS \,.\, S_\alpha S = \varepsilon' SB'^2;$$

il résulte de ces équations

$$OO_1 = -\frac{\varepsilon' \,.\, OB'^2}{4 OS}.$$

Désignons, ici encore, par E le foyer du contour q; on a, en tenant compte de la congruence des paraboles p, q, l'équation vectorielle

$OE = OO_1 + OE_\alpha'$, ou, tout court, $E = O_1 + E_\alpha'$, et, par suite

$$E = -\frac{\varepsilon' B_0'^2}{4 S} + E_\alpha' = E_\beta' + E_\alpha' = E_\beta + E_\alpha$$

on arrive ainsi, en vertu de (10'), à l'équation

$$E_0^2 + 4 S E = O \tag{11}$$

qui correspond à l'équation (10).

Nous sommes parvenus, de cette manière, au résultat constructif suivant, concernant les paraboloïdes:

„Construisons les foyers reéls E_0, E_0' de la conique h; la parabole u ayant la corde E_0E_0' et le segment diamétral conjugué OS est confocale au contour de la surface."

On obtient, de cette manière, le foyer E du contour q et, comme nous connaissons, de plus, la direction de son axe et un point O, ce contour se trouve déterminé. Il résulte de cette construction, avant tout, que la

parabole u contient les foyers appartenant aux projections des sections de la surface avec les plan parallèles à H.

Si P^2 est un paraboloïde elliptique, les sections réelles situées dans ces plans donnent une parabole u_1, les sections imaginaires une parabole u_2. Ces deux paraboles contiennent le point O et ont le diamètre $O\,S$ commun; elles sont de sens opposés et les droites conjuguées à ce diamètre pour une de ces paraboles sont perpendiculaires aux droites conjuguées pour l'autre; pour un paraboloïde hyperbolique toutes les sections sont réelles, mais on obtient, dans ce cas encore, deux paraboles u_1, u_2, puisque au point O la direction des axes réels des courbes $h, \ldots$, qui sont les projections des sections en question, se changent en la direction des axes imaginaires, et viceversa.

Nous avons trouvé, ainsi, le résultat que les foyers des projections parallèles des coniques d'un paraboloïde, situées dans des plans parallèles, remplissent deux paraboles confocales au contour de la projection de la surface.

L'avant dernière équation donne ce résultat:

„Si l'on projette un paraboloïde P^2 parallèlement, il y a, entre les projections des paraboles de la surface, situées dans deux plan diamétraux conjugués quelconques dont la droite d'intersection est le diamètre à l'extrémité (O), et le contour k de la projection de la surface la relation suivante: si E_1, E_2 sont les foyers des paraboles mentionnées ci-dessus et E le foyer de la parabole k, on a l'équation vectorielle

$$O\,E_1 + O\,E_2 = O\,E.“$$

Pour une quadrique centrale on obtient, si E_1, E_2, E_3 sont les foyers respectifs des projections parallèles des courbes situées dans trois plans diamétraux conjugués, avec la notation employée plus haut:

$$E_1^2 = \varepsilon_1 A^2 + \varepsilon_2 B^2, \quad E_2^2 = \varepsilon_2 B^2 + \varepsilon_3 C^2, \quad E_3^2 = \varepsilon_3 C^2 + \varepsilon_1 A^2,$$

de manière que

$$E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 = 2\,E^2.$$

8. Pour les paraboloïdes, nous avons supposé, dans ce qui précède, qu'on peut mener un plan tangent parallèle à ceux des sections. Par suite, nous avons laissé de côté le cas où les plans des sections sont paralléles à l'axe de la surface, de sorte que ces sections soient des paraboles. Mais dans ce cas la relation trouvée ci-dessus est évidente. Ces paraboles (fig. 4.) sont égales et, par suite, leurs projections parallèles le sont aussi. Soit ϕ une de ces projections, P son sommet, E_π son foyer. On peut se figurer le paraboloïde engendré par la translation de la parabole respective (ϕ); dans cette translation les point de (ϕ) décrivent des paraboles égales. Il en suit que les sommets P de toutes les paraboles ϕ, projections des paraboles (ϕ) situées dans des plans parallèles, seront situés sur une parabole ϕ_0 et, par conséquent, leurs foyers E_π sur une parabole π, laquelle on obtient de ϕ_0

par une translation dont la grandeur est donnée par le vecteur $P E_\pi$. A une translation infinitésimale de la parabole (p) sur P^2 correspond une translation infinitésimale de la parabole p dans la direction de la tangente t_π au point E_π de la parabole. Donc, si t est la tangente à la parabole p, parallèle à t_π et T son point de contact, la courbe de contour q de la projection de la surface P^2 est une parabole touchée par t au point T. Comme t_π est une tangente de la parabole π, la droite symétrique à la droite $P E_\pi$ par rapport à t_π contient le foyer F de cette parabole; mais cette droite est identique à la droite $E_\pi T$, puisque le rayon vecteur du point T et la droite menée par ce point parallélement à la direction commune des axes de toutes les paraboles du plan de projection sont symétriques par rapport à la tangente t; mais comme t est aussi tangente à q au point T, la droite $E_\pi T$ passe aussi par le foyer de la parabole q. On voit ainsi que pour toute autre parabole $p, \ldots$, la droite analogue à $E_\pi T$ contient le foyer de la courbe π aussi bien que celui de la courbe q. Il en suit que toutes ces droites se coupent en un seul point qui est le foyer commun des paraboles π et q.

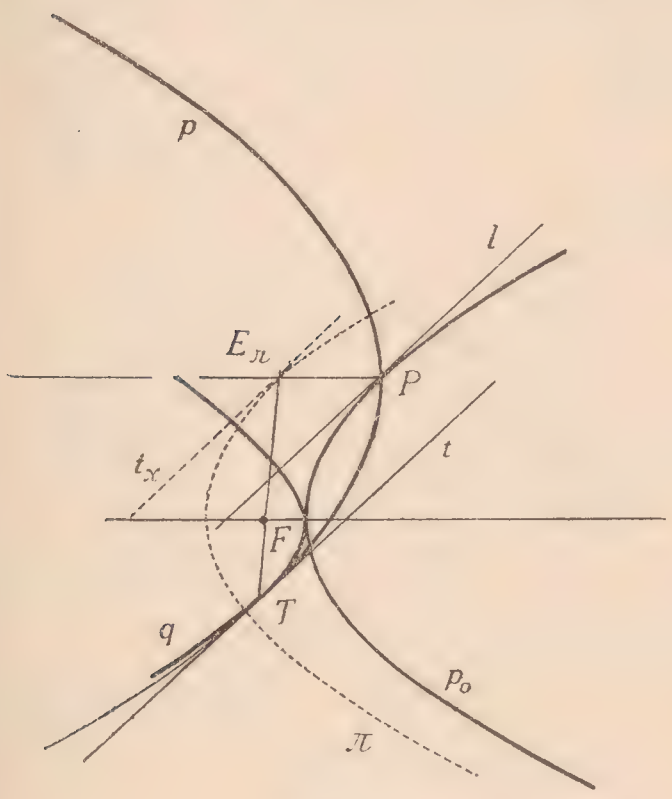


Fig. 4.

Le dernière proposition sur les paraboloïdes donne immédiatement ce résultat:

„Les foyers des paraboles p remplissent, à distance finie, la parabole π; la deuxième parabole qui intervient dans le cas précédent, se réduit à la droite à l'infini du plan de projection."

9. On n'a pas considéré, pour une quadrique centrale P^2, le cas où les plans parallèles la coupent en des paraboles $(p), \ldots$ Les paraboles $p, \ldots$ enveloppent la contour k de la projection de la surface, les plans des courbes (p) coupent le plan de la courbe (k) située sur la surface en des droites $(m), \ldots$ parallèles; pour cette raison, chacune des paraboles $p, \ldots$ touche la courbe k en des points (réels ou imaginaires) M_1, M_2 qui sont ses points d'intersection avec la droite m respective. Soit M le pôle de la droite m par rapport à k, M_0 le point où m coupe la droite $O M$ passant par le centre O du contour et $O N$ soit le diamètre de k conjugué à $O M$. Soient εa^2, εb^2 les carrés des longueurs des diamètres de k situées, respectivement sur $O M$ et $O N$, de sorte qu'on a

$$\frac{\overline{O M_0}^2}{\varepsilon a^2} + \frac{\overline{M_0 M_1}^2}{\varepsilon' b^2} = 1 .$$

Donc, si l'on pose $OM_0 = \delta$, on a

$$\overline{M_0 M_1}^2 = \frac{\varepsilon b^2}{\varepsilon' a^2} (\varepsilon a^2 - \delta^2) ;$$

la parabole p coupe OM au point P, pour lequel

$$2\,OP = OM + \delta = \frac{\varepsilon\,a^2 + \delta^2}{\delta}, \quad 2\,M_0P = OM - \delta = \frac{\varepsilon\,a^2 - \delta^2}{\delta}.$$

Considérons maintenant un système orthogonal de coordonnées $O\,(x, y)$, où la partie positive de l'axe des x coincide avec la droite $O\,M$. Faisons subir à p une translation parallèle à la direction MO, qui amène le point P à l'origine, et transportons le vecteur $M_0\,M_1$, qu'il soit réel ou imaginaire, dans la position OM_1' sur la droite ON. On a, pour le foyer E_0 de la parabole p_0 l'équation (10)

$$M_1\,M_1'^2 - 4\,M_0P\,.\,O\,E_0 = O,$$

et, par suite

$$\frac{\varepsilon'\,b^2}{\varepsilon\,a^2}\,(\varepsilon\,a^2 - \delta^2) - 2\,\frac{\varepsilon a^2 - \delta^2}{\delta}\,.\,OE_0 = 0,$$

d'où il vient

$$2\,O\,E_0 = \frac{\varepsilon'\,b^2}{\varepsilon\,a^2}\,\delta\,.$$

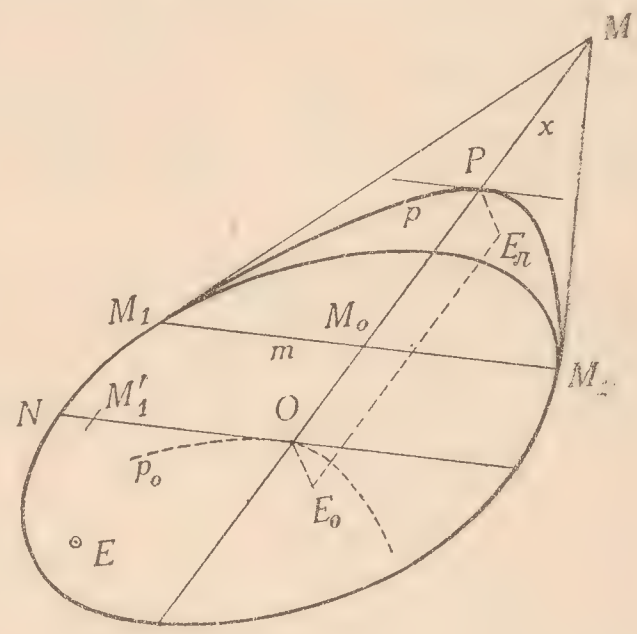


Fig. 5.

Comme on a, E_π étant le foyer de la parabole p, l'équation vectorielle

$$2\,O\,E_\pi = 2\,O\,E_0 + 2\,O\,P = \frac{\varepsilon'\,b^2}{\varepsilon\,a^2}\,\delta + \frac{\varepsilon\,a^2 + \delta^2}{\delta} = \frac{a^4 + \delta^2\,(2\,a^2 + \varepsilon'\,b^2)}{\varepsilon\,a^2\,\delta}$$

on peut écrire

$$2\,E_\pi\,.\,\varepsilon\,a^2\,\delta = a^4 + E^2\,\delta^2 \qquad (12)$$

où par E est désigné le foyer de la courbe k. Cette équation fait voir, si l'on fait changer δ, que le point E décrit une conique f. Il est facile d'établir son équation dans le système $O\,(x\,y)$. Si (e_1, e_2) sont les coordonnées du point E et (x, y) ceux du point E_π, on peut donner à l'équation (12) la forme suivante

$$2\,\varepsilon\,a^2\,\delta\,(x + i\,y) = a^4 + \delta^2\,(e_1 + i\,e)^2;$$

cette équation se décompose en deux, soit

$$2\,\varepsilon\,a^2\,\delta\,x = a^4 + \delta^2\,(e_1^2 - e_2^2), \quad \varepsilon\,a^2\,y = \delta\,e_1\,e_2;$$

en éliminant de ces deux équations δ, on obtient l'équation de la conique f

$$y^2\,(e_1^2 - e_2^2) - 2\,e_1\,e_2\,x\,y + e_1^2\,e_2^2 = 0. \qquad (13)$$

C'est une hyperbole, pour laquelle l'axe des x est une asymptote; l'autre est la droite $y = \dfrac{2\,e_1\,e_2}{e_1^2 - e_2^2}\,x$; par suite les droites

$$x = 0, \quad y = x\,\frac{e_1\,e_2}{e_1^2 - e_2^2}$$

sont deux diamètres conjugués de cette conique. Désignons par a_φ, b_φ

les vecteurs (réels ou imaginaires) donnant les longueurs effectives des demi-diamètres conjugués de la courbe f, ayant les extrémités (réelles) A_φ, B_φ. Comme l'équation (13) donne, pour $x = 0$:

$$y^2 = - \frac{e_1^2 e_2^2}{e_1^2 - e_2^2},$$

on a

$$A_\varphi^2 = (- i y)^2 = e_1^2 e_2^2 : (e_1^2 - e_2^2),$$

tandis que les points d'intersection de la seconde droite avec f ont les coordonnées

$$x = \varepsilon \sqrt{e_1^2 - e_2^2}, \quad y = \frac{e_1 e_2}{\sqrt{e_1^2 - e_2^2}},$$

de sorte que

$$B_\varphi = \varepsilon \sqrt{e_1^2 - e_2^2} + i \frac{e_1 e_2}{\varepsilon \sqrt{e_1^2 - e_2^2}},$$

et par suite

$$A_\varphi^2 + B_\varphi^2 = e_1^2 - e_2^2 + 2 i e_1 e_1,$$

d'où vient

$$A_\varphi^2 + B_\varphi^2 = E^2,$$

ce qui dit que les foyers de toutes les paraboles $p, \ldots,$ sont situés sur une hyperbole confocale au contour k.

10. On arrive à ce résultat aussi par des considérations simples d'ordre synthétique. Les droites conjugués et normales aux droites du faisceau M sont (fig. 6.) les mêmes pour les deux courbes k et p et enveloppent la parabole g, dite de Steiner-Pelz, dont le foyer G est situé sur la circonférence l, circonscrite au triangle $M_1 M_2 M$, étant conjugué harmonique avec M par rapport à M_1, M_2. Cette parabole est conjuguée normalement au faisceau des droites au centre M par rapport à toutes les coniques qui se touchent aux points M_1 et M_2; les centres de ces coniques sont situées sur la droite $O M$ et leurs axes sont les tangentes de la parabole g, pour laquelle $O M$ est directrice; une de ces coniques est la parabole p, dont l'axe o est la tangente au sommet de la parabole g et est, par conséquent, bissectrice du segment GM au point F_π. Comme la droite $M_1 M_2$ est aussi tangente à la parabole g et M_0 est situé sur la directrice, elle est bissectrice de l'angle $GM_0 M$, et puisque la tangente à p en P est bissectrice de l'angle que font la droite PM et le rayon vecteur du point P, ce rayon vecteur est parallèle à $M_0 G$ et est bissecteur du segment $G M$; par conséquent il passe par le point F_π. Il en suit que F_π est le foyer de la parabole p.

Si de $M_1 M_2$ on passe à une nouvelle position $M_1' M_2' \parallel M_1 M_2$, le point M se change en M' est le faisceau de droites $M_1 M_2$, $M_1' M_2' \ldots$, est, évidemment, homographique à la ponctuelle $M, M', \ldots$; la parabole g se changent en les paraboles g' dont les foyers $G', \ldots$ doivent être situés sur la droite $O G$, puisque toujours les axes de la conique k sont bissectrices

des angles faits par la droite $O\,M = O\,M'$ et la droite $O\,G'$. Puisque, toujours, la droite $M_0'\,G'$ est symétrique à $O\,M$ par rapport à $M_1'\,M_2'$, on a $M_0'\,G' \parallel M_0\,G$ et le foyer F_π' de la parabole p' est au centre du segment $M'\,G'$. De l'homographie des ponctuelles $M, M', \ldots$ et $M_0, M_0' \ldots$ et des systèmes de points $M_0, M_0', \ldots$ et $G, G', \ldots$ suit l'homographie des ponctuelles $M, M', \ldots$ et $G, G', \ldots$; par suite, les droites $G\,M, G'\,M', \ldots$ enveloppent une conique f. Dans la dernière homographie au point O correspond, dans les deux sens, les points à l'infini des droites $O\,G$ et $O\,M$. Par suite, cette conique est une hyperbole ayant les asymptotes $O\,G$, $O\,M$.

Les points $F_\pi, F_\pi', \ldots$ divisent en deux parties égales les segments déterminés sur ses tangentes par les asymptotes; dont, ce sont leurs points de contact. Les axes de cette hyperbole sont bissectrices des angles des asymptotes et coïncident, par suite, avec les axes ξ, η de la conique k. On a, par conséquent, le résultat que le lieu des foyers des paraboles $p, p', \ldots$ est l'hyperbole f trouvée plus haut. Si ξ est l'axe principal, η l'axe latéral, on sait que les circonférences ayant les cordes $G\,M, G'\,M', \ldots$ et dont les centres sont situés sur η, se coupent aux foyers E, E' de l'hyperbole f.

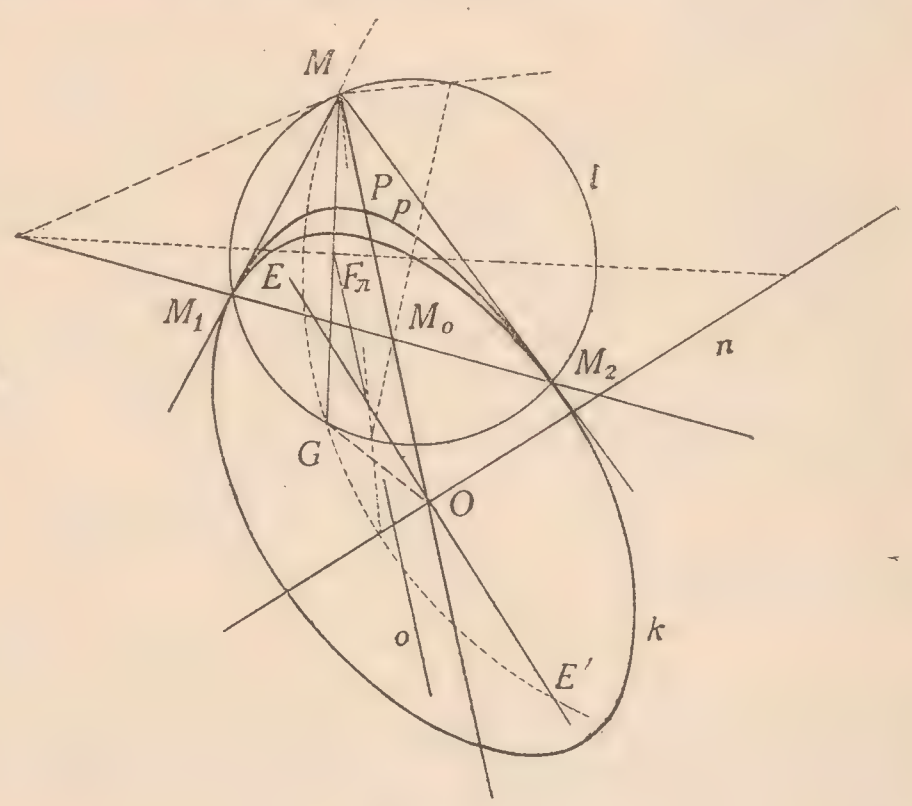


Fig. 6.

Considérons une quelconque des coniques k qui touchent les droites $M\,M_1$, $M\,M_2$ aux points M_1, M_2 et soit η^* son axe latéral; les tangentes, menées à g par le point M, qui sont aussi conjuguées et normales par rapport à k^*, font avec η^* un triangle circonscrit à la parabole g; par conséquent, la circonférence circonscrite à ce triangle, et passant, par suite, par le point M, passe aussi par le foyer G; elle coupe l'axe principal ξ^* de la conique en ses foyers. Si l'on choisit, pour la conique k^*, directement le contour k, on s'aperçoit que la circonférence passant par les points G, M et ayant son centre sur η, coupe ξ aux foyers du contour. Mais nous avons démontré que cette circonférence coupe ξ aux foyers E, E' de l'hyperbole f. Par conséquent, les conique k et f sont confocales. On a, ainsi, le résultat:

„Les foyers des projections parallèles appartenant aux sections d'une quadrique centrale situées dans des plans parallèles, qui la coupent suivant des paraboles, sont situés sur une hyperbole confocale au contour de la surface."

Dans le cas actuel, il ne reste des deux courbes qui sont, dans le cas général, le lieu des foyers des projections des sections parallèles, qu'une seule, tandis que la seconde se réduit à la droite à l'infini du plan de projection. On a démontré ainsi le théorène suivant de géometrie plane:

„Les foyers de coniques homothétiques, circonscrites à une conique k donnée, remplissent deux coniques u_1, u_2 confocales à k.“

Nous appelons, dans cet ordre d'idées, homothétiques les coniques ayant les mêmes points à l'infini; de sorte qu'il faut considérer comme homothétiques aussi deux hyperboles conjuguées.

Si les coniques circonscrites à la courbe k sont des paraboles, l'une des deux coniques u_1, u_2 dégénère et se réduit à la droite à l'infini double. Il suit de cette proposition:

„Si l'on projette centralement une quadrique, le lieu des foyers réels des projections appartenant aux coniques de la surface situées dans les plans d'un faisceau, dont l'axe est situé dans le plan central, sont deux coniques u_1, u_2 confocales au contour de la projection de la quadrique; si, cependant, l'axe de ce faisceau est tangent à la surface, une des deux coniques u_1, u_2 se réduit à la droite double à l'infini du plan de projection.“

11. Nous appliquerons les relations démontrées à la construction du contour k de la projection centrale d'une quadrique P^2, étant données les projections AA', BB', CC' de trois diamètres conjugués (A) (A'), (B) (B'), (C) (C'). Soit (O) le centre de la quadrique et A_∞, B_∞, C_∞ les points de fuite des diamètres; ils sont conjugués harmoniques avec le point O par rapport aux projections des points d'intersection des droites (A) (A'), (B) (B'), (C) (C') avec P^2. On sait comment on peut exprimer leurs projections, en cas où celles-ci sont, en partie ou toutes, imaginaires, à l'aide d'involutions elliptiques. Désignons par A, A'; B, B'; C, C' les projections de ces points d'intersection, même dans le cas où ces points sont imaginaires.

Soient A_0, B_0, C_0 les centres des segments AA', BB', CC'. A l'aide de ces points on construit le centre K de la conique k comme la projection du pôle du plan central par rapport à P^2. Le plan polaire du point (A^*), où la droite (A) (A') coupe le plan central, par rapport à P^2 est parallèle au plan (OBC); il coupe les plans (OAB), (OAC) suivant des droites qui ont leurs projections en $A_0 B_\infty$ et $A_0 C_\infty$; par suite, la projection de la polaire de la droite suivant laquelle le plan (OAB) coupe le plan centrale est la droite joignant le point d'intersection des droites $A_\infty B_0$, $B_\infty A_0$ au point C_∞. Le point K appartient à cette droite, donc, il est son point d'intersection avec la droite joignant le point A_∞ au point commun des droites $B_\infty C_0$, $C_\infty B_0$ et aussi avec la droite joignant le point B_∞ au point commun des droites $C_\infty A_0$, $A_\infty C_0$.

Le plan (K) mené par le point (K) parallèlement à (OBC) contient le point (A_0) et coupe P^2 suivant la conique (k_1). Sa projection k_1 à le pôle A_0 de la droite $B_\infty C_\infty$ et le point K est son centre, puisque la polaire du point (K) par rapport à toute conique de P^2, dont le plan passe par ce point, se trouve dans le plan central. Soit, de plus, (k_0) le conique suivant laquelle P^2 est coupée par le plan (OBC). Les coniques k_1, k_0 possèdent, évidemment, sur la droite $B_\infty C_\infty$, la même involution Γ de points conjugués

et $A_0 B_\infty C_\infty$ est un triangle polaire de la conique k_1; par conséquent, la droite $b = K A_0$ et la droite c menée parallèlement à $B_\infty C_\infty$ par le point K sont deux diamètres conjugués de la conique k_1.

Si M est le point d'intersection de $K A_0$ avec $B_\infty C_\infty$, on construit les extrémités B_1, B_1' du diamètre b à l'aide de la relation

$$K B_1^2 = K B_1'^2 = K M \,.\, K A_0.$$

Le pôle de la droite $B_\infty A_0$ par rapport à k_1 est le point C_∞, donc, la polaire du point P, où $B_\infty A_0$ coupe le diamètre c, est la parallèle menée à b par le point C_∞ ; si P' est son point d'intersection avec c, P et P' sont des points conjugués par rapport à k_1; par conséquent, on a, pour les extrémités C_1, C_1' du diamètre c, la relation

$$K C_1^2 = K C_1'^2 = K P \,.\, K P'.$$

Les droites b, c sont les projections des droites (b), (c) situées dans le plan de la conique (k_1), lequel coupe le plan central suivant une droite qui fait, avec (b) et (c), un triangle polaire de la courbe (k_1) ; si l'on joint, aux sommets de ce triangle, encore le pôle (A^*) du plan contenant (k_1) par rapport à la surface P^2, on obtient un tétraèdre polaire de cette surface. Les projections de ses arêtes sortant du point (K) sont b, c, et la droite a menée par le point K parallèlement à $A A'$, cette droite étant la projection de la droite (K) (A^*) ; les projections du reste de ses arêtes sont à l'infini.

Par conséquent, les projections k_2 et k_3 des coniques de P^2 situées dans les plans (b) (A^*) et (c) (A^*), ont les droites respectives a, b et a, c pour diamètres conjugués. On construit les extrémités A_1, A_1' du diamètre a comme les points de la conique k_2 situés sur le diamètre a conjugué au diamètre b, dont les extrémités sont connues, parce que nous connaissons encore les points (réels ou imaginaires) A, A' sur k_2.

Chacune des trois coniques ainsi obtenues, k_1, k_2, k_3 touche le contour k en deux points ; par-là, ce contour est déterminé. Ce contour est identique au contour de la projection parallèle de toute quadrique pour laquelle a, b, c sont les projections de trois diamètres conjugués et A_1, B_1, C_1, ou bien A_1', B_1', C_1', les projections de leurs extrémités.

12. Mentionons encore un complément des considérations de Pelz.

Si l'on projette une quadrique P^2, le point U étant centre de projection ; si, de plus, U_1, U_2 sont deux points d'une droite u qui ne passe pas par le point U et dont les points d'intersection avec P^2 soient P_1, P_2, alors les courbes k_1, k_2, . . . de la quadrique situées dans les plans du faisceau u ont les projections k_1', k_2', . . . passant par les points P_1', P_2', projections des points P_1, P_2. Les tangentes menées par les projections U_1', U_2' des points U_1, U_2 à une quelconque de ces coniques se coupent en quatre points dont le lieu sont deux coniques u_1', u_2', projections des coniques u_1, u_2 suivant lesquelles se coupent les cônes aux sommets U_1, U_2, circonscrits à la quadrique P^2. Les plans tangents menés par la droite $U U_1$,

communs d'ailleurs aux deux cônes U U_1 circonscrits à P^2 et ayant, respectivement, les sommets U, U_1, sont aussi les plans tangents de P^2 menés par la droite $U\,U_1$, leurs lignes d'intersection avec le plan de projection touchent le contour k' de la projection de la surface P^2; ils sont, en même temps, le contour de la projection du côme U_1; d'où il suit que les tangentes menées par le point U_1' à k' sont aussi tangentes aux courbes u_1', u_2'. On conclut, d'une manière analogue, que les tangentes menées par le point U_2' à k' sont les tangentes menées par le point U_2' aux courbes u_1', u_2'.

Si u se trouve dans le plan central et si U_1, U_2 sont les points unis de l'involution en laquelle u est coupée par l'involution orthogonale au sommet U, àlors les points U_1', U_2' sont les points cycliques du plan de projection et les tangentes menées par ces points à k_i' se coupent en ses foyers; donc, le lieu des foyers des courbes k_1', k_2', . . . se compose de deux coniques u_1', u_2', et comme les tangentes menées par les points circulaires à k' sont, en même temps, tangentes à u_1' et u_2', ces coniques sont confocales à k'. Si u est tangente à la surface, une des coniques u_1, u_2 se décompose en la droite double u et il ne reste qu' une conique propre.

Pelz fait usage ailleurs du théorème cité dans ce qui précède sous son nom pour construire le théorème de Pohlke.[1]) Les considérations qui viennent d'être faires simplifient legèrement cette construction. Soient, en effet, $O\,X$, $O\,Y$, $O\,Z$ les projections parallèles de trois segments, perpendiculaires l'un à l'autre et de longueures égales; on construit le contour de la sphère pour laquelle ces trois segments sont des diamètres en construisant les foyers E_1, E_1' de l'ellipse pour laquelle deux de ces segments sont des demi-diamètres conjugués, et puis les foyers E, E' de l'ellipse pour laquelle le troisième segment ainsi que $O\,E_1$ sont des demi-diamètres conjugués. Les points E, E' sont les foyers du contour k de la projection de la sphère et le carré du rayon de la sphère équivaut à la somme des carrés des projections orthogonales des segments $O\,X$, $O\,Y$, $O\,Z$ sur la droite menée par le point O perpendiculairement à $O\,E$.

Cette construction est comprise dans les constructions qui précèdent comme cas particulier; néanmoins je la donne explicitement par ce que je la tiens, dans cette forme, pour la plus simple construction des vraies longueurs des segments $O\,(X)$, $O\,(Y)$, $O\,(Z)$ et de la direction de projection.

13. Désignons par (a), (b), (c) les longueurs absolues de trois demi-diamètres conjugués de la quadrique; par cest rois longueurs sont déterminées huit quadriques, les longueurs effectives de ces demi-diamètres pouvant être réelles ou imaginaires. A chacune de ces quadriques, P, correspond une quadrique P', qu'on peut appeler complémentaire à P, définie par cette propriété que chacun des trois demi-diamètres, imaginaire pour

---

[1]) Sitzungsber. d. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. 1895: Zur klinogonalen Darstellung der Rotationsflächen.

l'une, est réel pour l'autre. Donc, on peut exprimer les projections parallèles de deux quadriques complémentaires par les équations

$$\varepsilon_1 a^2 + \varepsilon_2 b^2 + \varepsilon_3 c^2 = e^2$$
$$-\varepsilon_1 a^2 - \varepsilon_2 b^2 - \varepsilon_3 c^2 = e'^2$$

où ε_i désigne l'unité positive ou négative et e, e' sont les excentricités linéaires. En ajoutant ces deux équations, on obtient

$$e^2 + e'^2 = 0.$$

On voit, d'après les deux équations que les longueurs absolues des demi-axes des coniques k, k' sont les mêmes; mais si cette longueur est réelle pour k, la longueur du demi-axe correspondant est imaginaire, et viceversa.

En tenant compte de la dernière équation on voit que les deux coniques k, k' sont complémentaires, elles aussi. On a, par suite, le théorème:

„Les contours de deux projections parallèles de deux quadriques complémentaires sont deux coniques également complémentaires."

L'exactitude de ce théorème suit aussi de ce que pour deux quadriques complémentaires les courbes (k) et (k') sont situées dans un même plan diamétral, conjugué à la direction des droites projetantes, conjugué, en même temps, par rapport au cône asymptotique commun; par suite, ces courbes sont également complémentaires. Car ces quadriques sont homologues, l'homologie étant déterminée par le plan à l'infini comme plan d'homologie, le point O comme centre et par la caractéristique de valeur i.

Les rapports entre l'axonometrie oblique et les nombres complexes sont l'objet du travail: „Parallelperspektive, komplexe Zahlen und Trägheit ebener Massen" publié par M. E. Wälsch en 1912 dans les „Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung", t. 21. Ce mémoire contient aussi la construction de Pelz du problème de Pohlke avec une legère simplification mentionnée ci-dessus. Je profite de cette occasion pour constater que j'ai traité ce sujet au III congrès des naturalistes et médecins tchèques à Prague dès 1901 et j'en ai publié le résumé essentiel dans les comptes rendus (Věstník) de ce congrès, p. 169 et sq., où j'ai signalé, en même temps, la généralisation du triangle de racourcissement de l'axonometrie orthogonale pour le cas de l'axonometrie clinogonale.

La stratigraphie et les mollusques de la terasse pleistocène du Danube près de Parkaň.

Par

JAR. PETRBOK.

Présenté dans la séance du 24 octobre 1924.

Depuis le dernier travail de Peters[1]) ni les mollusques du holocène ni les mollusques du pleistocène des terasses du *Danube*, n'ont point été systématiquement élaborés, mais ils restent pour la plupart (la Serbie, la Roumainie, la Bulgarie) sans attention.

J'ai exécuté la découverte des mollusques de la terasse pleistocène à *Klosterneuburg*[2]) partitivement à *Russe, Galac, Parkaň*[3]) et la découverte des sédiments holocènes du Danube en Slovaquie.

Par l'étude systématique de la faune des terasses du pleistocène du Danube on aura la possibilité de déterminer où il s'agit des sédiments lacustres, et de fixer dans le terrain du delta Danubien les frontières des eaux braquiques, et en même temps les bords de la Mer Noire à l'époque du pléistocène.

La faune de ces terasses pléistocènes a l'importance comparative, d'un côté à cause de l'évolution de la faune locale du pléistocène de la *Slovaquie*, d'autre part pour la direction de la propagation de cette faune soit de l'aréal de la *Mer Noire* à l'ouest ou d'ici à la *Mer Noire*.

I. La stratigraphie de la terasse près de Parkaň.

Cette terasse atteint une hauteur inégale jusqu'à 15 *m* et contient dans les couches inférieures des sables et des cailloutis qui sont situés sur les gissement du tertaire marine.

Les graviers à gros grains sont sans coquilles car celles-ci ayant été trainées ont été pour la plupart broyées, et — quand le sédiment se formait — ces fragments étaient absorbés (par le milieu siliceux). Dans les sables plus fins (dont l'activité mechanique est plus faible) on trouve la faune bien conservée, quoique les effets de l'action chimique soient assez

peu importants parceque le sable est mélangé d'une certaine quantité d'argile. Sur ces sediments réposent d'une part des argiles de la terasse, d'autre part les loess.

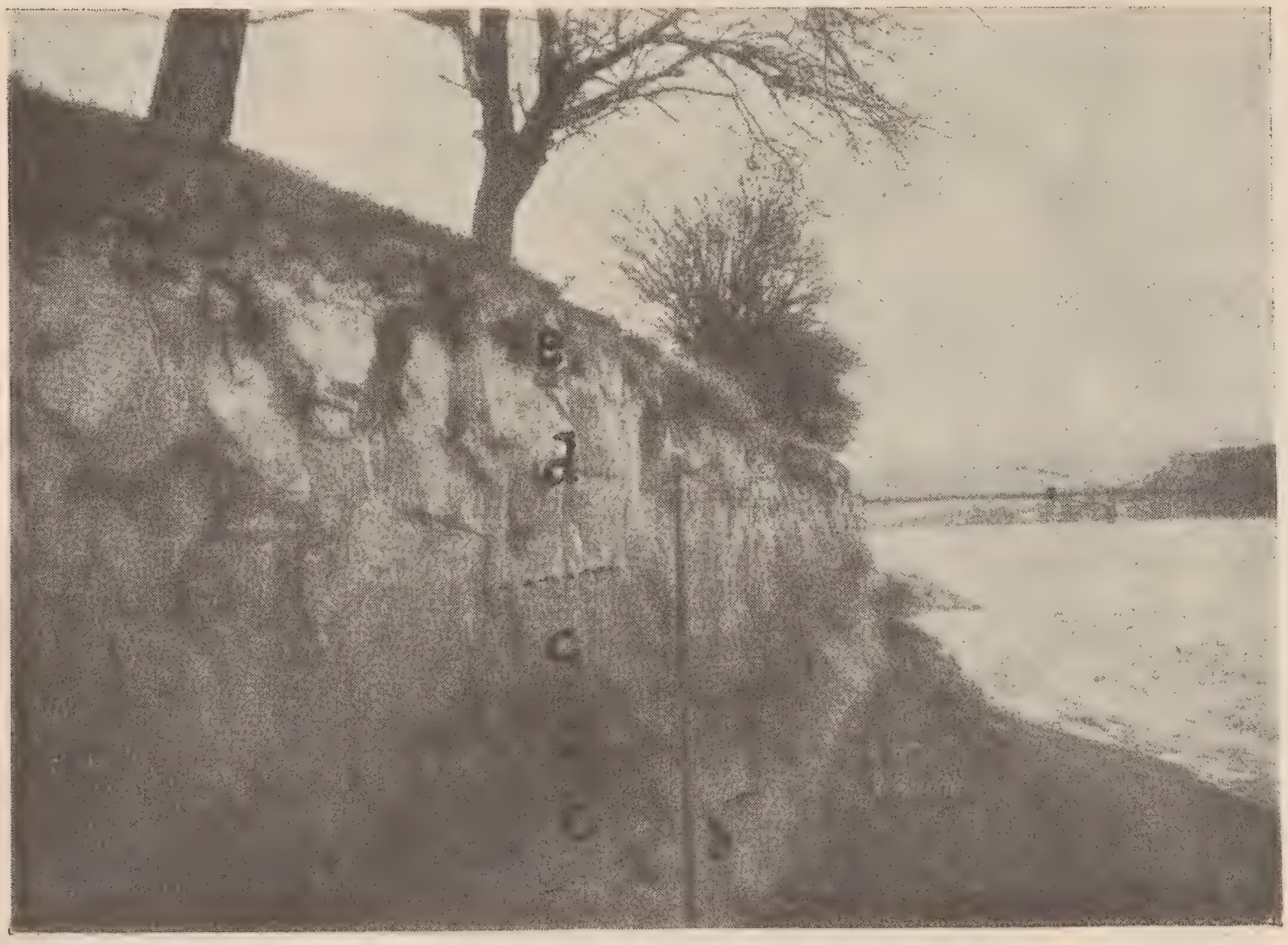
3. *Le profil de la (petite) sablière de la terasse dans le „Vinice"* (= *Vigne*). (prof. 1.)

	e: terre végétale clair:	1 *dm*
	d: argile foncée:	2 *dm*
	c: „loess" sabloneux:	$^3/_4$ *m*
← la terasse pleistocène	*b:* le cailloutis très fin:	$^3/_4$ *m*
	a: le sable très fin avec les nids de cailloutis	$1^1/_2$ *m* — ? *m* *Coquilles.*

Prof. 1. La terasse pléistocène de la sablière „ve vinici" (Vigne).

Dans le „loess" sablonneux (*c*) les coquilles n'ont pas été trouvées jusqu'à présent. Je ne fixe pas son âge definitivement parce-que nous ne connaissons pas d'ici (ni de littérature) les associations des mollusques du „loess" ni la chronologie de la couche couvrante la plus proche (*d*). Si nous jugions d'après le profil[5]) (pas loin du pont à Ostřihom (prof. 2):

e: *terre végétale* $^1/_4 - ^1/_2$ *m* (elle manque en quelques endroits),
d: *argile claire* $1 - 1\,^1/_2$ *m*: *coquilles.*
c: *la „tchernosiom" holocène* $^1/_4 - ^3/_4$ *m*: *coquilles.* Fragments préhistoriques.
b: *argile jaune-brune* $^1/_2$ *m,*
a: *terasse (pléistocène) du Danube*



Prof. 2: Le bord du *Danube* à *Parkaň* vis-à-vis *Ostřihom.*

nous pourrions constater que ce loess sablonneux est le plus jeune loess pléistocène, mais il est possible, qu'il ait encore changé de place (à l'époque postglaciale). Les cailloutis et les sables (*b, a*) appartiennent à la terasse la plus jeune (du pléistocène) et les cailloutis ils mêmes contiennent des coquilles (corrodées) très nombreuses. Leur âge pléistocène indique d'une part la hauteur verticale audessus du niveau de l'eau du *Danube,* d'autre part la cohérence avec les autres profils déjà[6]) déterminés:

Profil de la grande sablière:

terre végétale $^1/_4$ *m*
la „tchérnosiom" holocène $^1/_4 - ^3/_4$ *m* } coquilles de la faune locale d'aujourd'hui,
argile brune $^1/_4 - ^1/_2$ *m,*

pléistocène: *loess* $2 - 4$ *m* { argileux / sabloneux } coquilles,

pléistocéne: *terasse (plus jeune) du Danube:* { sable, / cailloutis

Par ce profil, où la terasse est recouverte par le loess pléistocène est ainsi naturellement déterminé l'âge de toutes les couches de la terasse liées avec elle.

La même chose est avec le profil du bord (tout près de la grande sablière[7]) prof. 3):

d: *la „tchérnosiom" holocène* $^1/_4 - ^1/_2$ *m*, en quelques endroits,
c: *argile grise* $^1/_2 - 1$ *m*,
pléistocène: *b*: *loess* 2—3 *m. Coquilles*,
a: *terasse du Danube* { sable, cailloutis,

Prof. 3. Le bord du Danube tout proche „de la grande sablière" de la *Parkaň*.

où le couvrement du loess est démontré par deux espèces d'argiles holocènes — sa faune par l'association des mollusques du loess — typiques à cette couche; d'aprèes ces marques est évidente la chronologie de cette terasse: le pleistocène, et, d'après la hauteur verticale: la terasse la plus jeune. Les couches de la terasse du profil 4 ont le même âge:

terre végétale (en quelques endroits: *la „tchérnosiom" holocène,*
pléistocène: *d*: *loess* 2 *m. Coquilles*,
terasse { *c*: sable argileux, sable horizontalement stratifié 6 *m*, coquilles,
b: cailloutis 3 *m*,
a: plaine dénudée.

Le loess (*d*) a la faune exlusivement de terre ferme, la terasse (le sable et le sable argileux) contient depuis la couche inférieure jusqu'à la couche supérieure en quantité énorme les espèces de faune de la terre ferme et de l'eau douce.

Prof. 4. La grande terasse pléistocène près de la *Parkaň*.

II. Les mollusques du loess et des couches de la terasse.

a) *les mollusques du loess*:

dans ces endroits (profil 3) où le loess repose directement sur le sable (non argileux) on trouve la faune, qui forme l'association typique du loess (très différente de notre association la plus courante par assez grand nombre de ces espèces).

Il y a dans ce profil les espèces suivantes:

1 *Vallonia pulchella* Müll.
2. *Helix* sp. frgm cf. *hispida* L (var.)
3. *Helix* sp. frgm cf. *strigella* Drap.
4. *Buliminus tridens* Müll (var?).
5. *Cionella lubrica* Müll.
6. *Succinea oblonga* Drap *var. elongata* A. Br.

lesquelles suivent celles du profil de la grande sablière (le recueil n'est pas complet):

7. *Conulus fulvus* Müll.

8. *Vallonia pulchella* Müll (var?).
9. *Trichia hispida* L (var).
10. *Trichia striolata* (var?).
11. *Tachea hortensis* Müll.
12. *Pupa dolium* Drap. *var. implicata* Branczik.
13. *Pupa muscorum* Müll.
14. *Vertigo Genesii* Gredler.
15. *Cionella lubrica* Müll. var.
16. *Succinea oblonga* Drap *var. elongata* A. Br. *for.*

Cette faune du loess est localement la plus variée et à cause de cela elle appartient au loess le plus jeune.

Il n'y a pas de doute, que le sédiment se formait par la voye aérienne bienqu'il continue aussi des formes qui n'appartiennent pas au loess. (*Tachea hortensis*) néanmoins aussi celles-ci sont admissibles à cette époque pourvu — qu'il s'agisse d'entraînement secondaire. Du reste les loess, les argiles du loess et leurs faunes ne sont nulle part definitivement élaborées.

La différence entre la faune des profils 1, 3, 4 et les loess plus âgés (*Trnava,*[8]) *Boleraz*[8]) en Slovaquie est évidente à première vue, car celles contiennent: *Pupa muscorum, Succinea oblonga elongata* et *Helix striata* ou *Vallonia tenuilabris* qui sont l'association identique du loess — aussi des loess qui se trouvent davantage au Nord (*Bohême, Allemagne centrale* etc.) au contraire les loess du Sud (p. e. *Dobroudcha*) ont l'association qui convient volontiers au terrain sec — et de cette manière de plus grande unité: *Helix striata* typ ? var., *Buliminus microtragus* et *Buliminus tridens,* qui (au moins chez nous) aiment plus l'humidité — la preuve de cela est sa retraîte de positions artificiellement déséchées et sa pénétration tardive dans des positions nouvelles (les plaines des dunes du holocène et du récent près de *Mesemvrie,* en *Dobroudcha*) contre *Helix obvia* Hartm. (ici var. *dobrudžensis* Zeleb) très nombreux dans ce pléistocène. Il est évident, que la différence parmi les associations des faunes du loess est reconnaissable aussi d'après la latitude.

La richesse et la signification de la faune pléistocène des mollusques de la terasse (pléistocène) du *Danube* de *Parkáň* démontre le mieux la liste suivante qui contient des espèces là retrouvées jusqu'à présent:

Les mollusques de la terasse pléistocène du Danube près de Parkaň.

les mollusques de la terasse „en vinice“ (vigne)		les mollusques de la terasse en profil 4	
		1.	Conulus fulvus Müll.
		2.	Hyalinia hammonis Ström.
		3.	Vitrea crystallina Müll.
4.	Vallonia tenuilabris A. Br.	4.	Vallonia tenuilabris A. Br.
		5.	Vallonia costata Müll.
6.	Helix (Trichia) hispida L	6.	Helix hispida L et var.
7.	Helix (Trichia) sp. in frgm.		
8.	Helix (Trichia) striolata C. Pfr.	8.	Helix striolata C. Pfr.
		9.	Helix (Euloba) fruticum Müll.
10.	Helix (Arianta) arbustorum L.	10.	Helix arbustorum L.
11.	Helix (arbustorum) var. alpicola Fér.		
		12.	Helix (Xerophila) striata Müll.
		13.	Helix (Xerophila) striata var.
		14.	Helix (Tachea) hortensis Müll.
		15.	Helix sp.
		16.	Buliminus (Chondrula) tridens Müll
		17.	Buliminus (Chondrula) Horusitzkyi Kormos.
		18.	Buliminus (Chondrula) sp. (frgm).
		19.	Pupa (Orcula) dolium Drap.
		20.	Pupa (Pupilla) muscorum Müll.
		21.	Pupa (Sphyradium) edentula Drap.
22.	Clausilia sp.	22.	Clausilia sp.
23.	Cionella (Zua) lubrica Müll.	23.	Cionella lubrica Müll.
		24.	Cionella lubrica var.
		25.	Succinea (Neritostoma) putris L var.
26.	Succinea (Amphibina) elegans Risso	26.	Succinea elegans Risso.
27.	Succinea (Lucena) oblonga Drap. typ.	27.	Succinea oblonga Drap typ.
28.	Succinea (Lucena) oblonga var. elongata A. Br.	28.	Succinea oblonga var. elong ata A. Br.
29.	Succinea (Lucena) oblonga var. (n?).		
		30.	Limnaea sp.
31.	Limnaea (Limnophysa) palustris Müll et varr.	31.	Limnaea palustris Müll et. varr.
		32.	Limnaea (Limnophysa) glabra Müll.

les mollusques de la terasse „en vinice“ (vigne)		les mollusques de la terasse en profil 4	
33.	Limnaea (Limnophysa) truncatula Müll et varr.	33.	Limnaea truncatula Müll.
		34.	Limnaea (Gulnaria) peregra Müll.
35.	Planorbis (Coretus) corneus L typ.	35.	Planorbis corneus L.
36.	Planorbis (Coretus) corneus var.		
37.	Planorbis (Tropidiscus) marginatus Drap.	37.	Planorbis marginatus Drap.
38.	Planorbis (Tropidiscus) marginatus var.		
		39.	Planorbis (Gyrorbis) vortex L.
40.	Planorbis (Gyrorbis) spirorbis L.	40.	Planorbis (Gyrorbis) spirorbis L.
		41.	Planorbis (Gyrorbis) septemgyratus Rssm.
42.	Planorbis (Bathyomphalus) contortus L.	42.	Planorbis contortus L.
		43.	Planorbis (Gyrorbis) cf. Rossmaessleri Auersw.
		44.	Physa fontinalis L. var.
		45.	Aplexa hypnorum L.
		46.	Bythinia Leachi Paasch cf. var. Goldfussi Kob.
		47.	Valvata pulchella Stud.
48.	Lithoglyphus naticoides C. Pf. (? et var.).		
49.	Sphaerium sp.		
50.	Pisidium amnicum Müll.		
		51.	Pisidium sp.

LITTÉRATURE:

[1]) K. F. Peters: *Grundlinien zur Geogr. u. Geol. der Dobrudscha.* (Denkschr. d. k. Akad. d. Wissensch. Wien 1867. p. 124—5, 202.)

[2]) Jar. Petrbok: *Ein Beitrag zur Kenntnis der pleistozänen Mollusken von Niederösterreich.* (Verh. d. k. k. geol. Reichsanst. Wien. 1916. Nro 10.)

[3]) Jar. Petrbok: *Valuable information concerning holocene and pleistocene Molluscs of Slovakia.* (Časop. pro miner. a geologii I, č. 2—3, 1923, Praha.)

[4]) Jar. Petrbok: *Holocaenní měkkýši Podunají.* (Přírodní Věda 1922.)

[5]) la litter. num. 3, page 63.

[6]) la litter. num. 3, page 61.

[7]) la litter. num. 3, page 62.

[8]) la litter. num. 3, page 64.

[9]) Th. Kormos: *Neuere Beiträge z. Geol. u. Fauna d. unteren Pleistozänschichten in d. Umgebung des Balatonsees.* (Result. d. wissensch. Erforsch. d. Balatonsees. 1910. Budapest.)

[10]) Art. Weiss: *Die pleistoz. Conchylienfauna d. Umgebung d. Batatonsees.* (ibid. 1902.)

[11]) Jar. Petrbok: *Deuxième contribution à la connaissance des mollusques pléistocènes et holocènes de la Slovaque.* (Časop. pro miner. a geologii I, č. 4, 1923, Praha.)

Remarques sur quelques dislocations transversales dans le paléozoïque de la Bohême centrale

(Avec 2 figures dans le texte.)

Par

ODOLEN KODYM (PRAGUE).

Présenté le 20 Juin 1924.

Le paléozoïque de la Bohême centrale — le Barrandien — est traversé par un grand nombre de dislocations longitudinales et transversales qui, par leur origine, leur âge et leur signification appartiennent à des catégories différentes. En somme, on peut dire que les dislocations transversales sont plus jeunes que les dislocations longitudinales, car les dislocations longitudinales ont été déplacées par les dislocations transversales. Jusqu'à présent, il n'y avait à cette règle que deux exceptions qui eussent été décrites. La première exception est la dislocation transversale parcourant la vallée du K a č á k dans le flanc Nord du Barrandien, au Sud de *Unhošt* qui, selon J. W o l d ř i c h, est antérieure à la faille inverse longitudinale.[1]) D'après les études de W o l d ř i c h, cette faille inverse se termine à la dislocation transversale et ne continue pas de l'autre côté de la vallée du Kačák. La deuxième exception a été démontrée par K o d y m[2]) dans la vallée de Saint Procope où une faille normale est limitée des deux côtés par des dislocations transversales.

L'âge des dislocations transversales diffère beaucoup. Parmi elles, beaucoup datent du tertiaire, car elles parcourent la formation crétacée, ailleurs elles sont postcarbonifères, car elles parcourent le permocarbonifère. D'autres dislocations transversales se sont formées à la périphérie du massif granitique de la Bohême centrale pendant son refroidissement comme fentes de contraction pendant la troisième phase du plissement varisque.

---

[1]) J. W o l d ř i c h : Morfologicko-tektonická studie z území Kačáku jižně od Unhoště. Sborník čes. spol. zeměvědné XXII, nos. 3 et 4, 1916.

L e m ê m e: Geologické poměry v údolí Kačáku mezi Unhoští a Nenačovicemi. Rozpravy Čes. Akademie XXV. no 37, 1916.

[2]) O. K o d y m : Tektonická studie v údolí Prokopském a jeho okolí u Prahy. Rozpravy Čes. Akademie XXVII, no 6.

Mais la plupart des dislocations transversales se sont formées pendant la deuxième phase du plissement varisque.[3])

Souvent il est très difficile de déterminer l'âge d'une dislocation transversale, et c'est même impossible dans les cas où il s'agit d'un terrain très éloigné du granit et non recouvert par des couches permocarbonifères et crétacées. La nature des dislocations transversales est aussi très différente. Ce sont des failles de contraction près des massifs granitiques, des failles normales (apparemment toutes les dislocations postcarbonifères), aussi des surélévations, où les massifs ont été entassés dans un moindre espace. Il est préférable de ranger cette dernière catégorie parmi les dislocations transversales. En outre, des déplacements horizontaux ont eu lieu d'après la plupart des dislocations transversales. Dans les cas où l'inclinaison du plan de la dislocation nous est connue exactement, nous pouvons distinguer entre décrochements horizontaux, dislocations radiales et surélévations. Mais dans la plupart des cas, toutes les dislocations transversales se présentent sur la carte de la même façon, causant toutes un déplacement des bandes des zones différentes.[4])

Par ces lignes, je veux seulement appeler l'attention sur une espèce de dislocations, qui ont été décrites comme „dislocations de Hlubočepy" des environs de Prague[5]) et d'ailleurs[6]). On les a trouvées surtout dans les calcaires de Hlubočepy $g\,\gamma$ et dans les schistes de Daleje $g\,\beta$ aux environs de Hlubočepy. En cet endroit, elles ont une direction anormale NNE/SSW h 1—2 et elles ont été désignées comme *euroulements*.[7]) Leur direction est tout à-fait anormale en comparaison de celle des autres dislocations transversales, car en règle générale, les dislocations transversales du Barrandien ont une direction NW/SE. La déviation atteint donc 60^0. Les dislocations transversales normales ont aussi des directions différentes comme il a été déjà souvent décrit, mais la différence entre les directions des dislocations différentes n'est jamais aussi frappante que dans le cas relevé par nous.

---

[3]) A voir: *a*) R. Kettner: Ueber die Eruptionsfolge etc. Jahrbuch d. k. k. geolog. R. A. 1917. T. 67.

b) O. Kodym: Druhá fáze vrásnění variského v Barrandienu. Sborník státního geologického ústavu ČSR. I. 1921.

[4]) Les mouvements qui ont eu lieu d'après les dislocations transversales, ont été souvent décrits. A voir par ex. entre autres

J. Woldřich, Die geologischen Verhältnisse der Gegend zwischen Litten–Hinter-Třebáň und Poučník bei Budňan. Sitzb. k. böhm. Ges. d. Wissensch. Prag 1914.

F. Wähner, Zur Beurteilung des Baues des mittelböhm. Faltengebirges. Jahrbuch d. k. k. geolog. R. A., t. 66. 1916.

[5]) 1. c. 2.

[6]) O. Kodym, La tectonique des anciens terrains paléozoïques des environs de Slivenec, principalement du Přídolí au Sud de Prague. Bulletin international de l'Académie des sciences de Bohême XXIII, 1921.

[7]) (l. c. 6.)

Les enroulements ne se trouvent que là où la direction des couches est anormale, dans la terminaison brachysynclinale du bassin, par ex. à *Hlubočepy*, à *Přídolí* près de *Slivenec*[8]), sur la *Dlouhá hora* près de *Králův Dvůr*, dans l'île dévonienne de *Koněprusy* et ailleurs. Une autre marque distinctive de ces dislocations est le fait qu'elles ne sont que d'un caractère purement local, n'ayant qu'une longueur insignifiante et ne parcourant qu'un seul flanc du brachysynclinal sans traverser l'axe tectonique du synclinal jusque dans l'autre flanc. Puis, elles sont caractérisées par le fait que l'orientation de leur direction est perpendiculaire à la direction des couches qu'elles parcourent, de façon qu'elles montrent souvent un arrangement en forme d'éventail dans la terminaison du bassin. Leurs plans de dislocation sont verticaux.

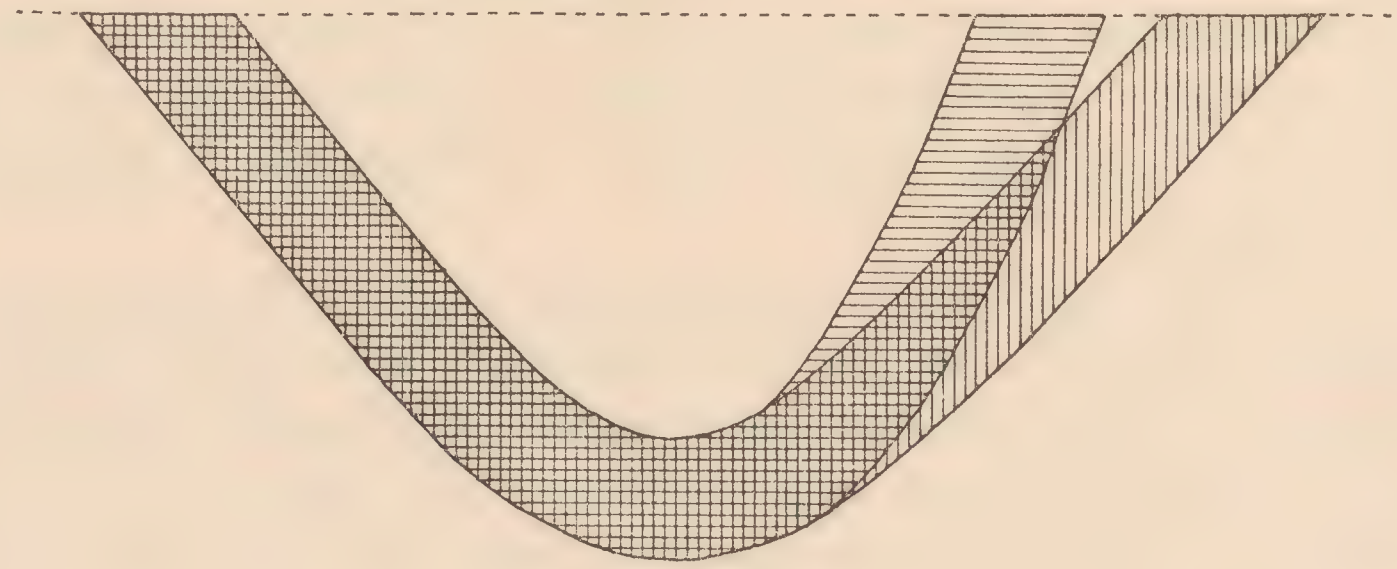


Fig. 1.

Coupe géologique idéalisée suivante un plan d'un enroulement. La figure montre deux massifs séparés par un enroulement. Le massif avec hachure verticale se trouve dans la position originale, le massif avec hachure horizontale a été redressé par un enroulement. A cause de clareté seulement une couche a été marquée.

Ces marques distinctives démontrent que les enroulements forment un groupe nettement déterminé, facile à distinguer des autres dislocations transversales. Il s'agit maintenant d'expliquer leur nature, leur formation et leur âge. En suivant les couches dans la vallée de saint Procope, où ces failles sont bien mises à nu dans les nombreuses carrières nous voyons qu'elles se montrent sur la carte et dans le terrain comme des décrochements horizontaux, où comme d'ordinaire, le massif oriental du flanc Nord du brachysynclinal a été déplacé vers le Nord, si on le compare avec le massif occidental. En observant l'inclinaison des couches dans les deux massifs tectoniques séparés par la dislocation, nous trouvons dans beaucoup de cas que dans un de ces massifs, l'inclinaison des couches est plus forte que dans le massif avoisinant. En outre les droites suivant l'inclinaison maxima des deux massifs forment à la dislocation un angle très aigu, dont le sommet est tourné vers la profondeur. En d'autres termes la dislocation se termine en coin et disparaît vers la profondeur (voir fig. I. p. 3).

---

[8]) (Voir: O. Kodym: l. c. 6.)

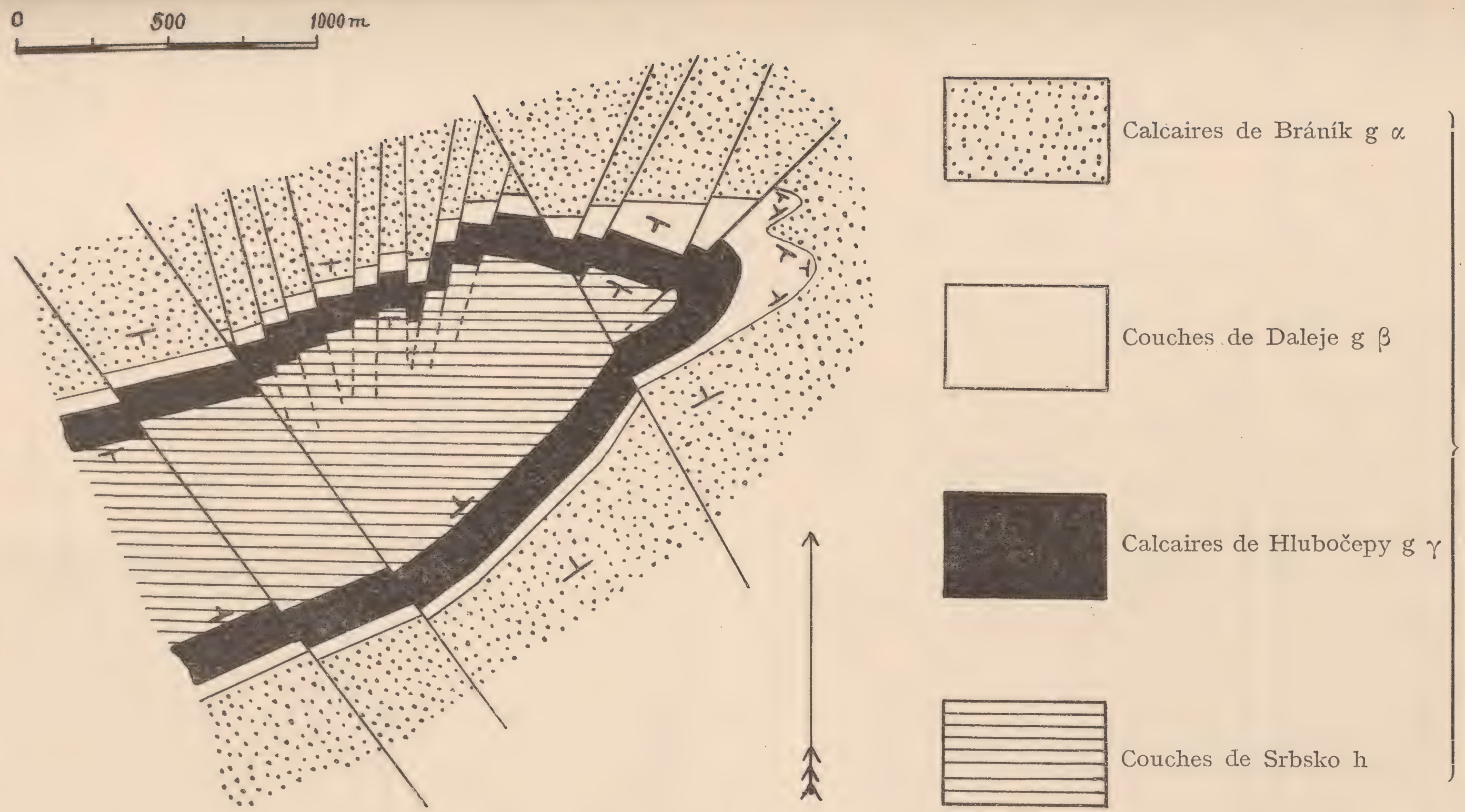


Fig. 2.

Carte géologique des environs de Hlubočepy, découverte et un peu idéalisée. Elle montre la terminaison périclinale du synclinal avec une quantité des enroulements dans le flanc NNW du synclinal.
Echelle 1 : 50.000.

Nous pouvons donc dire qu'un mouvement a eu lieu après ces dislocations, mouvement, que nous pouvons caractériser comme un redressement plus accentué des couches d'un massif en comparaison des couches du massif avoisinant, séparé par la faille d'enroulement. Ce mouvement n'est qu'une torsion des couches d'un des massifs autour d'un axe horizontal dans la profondeur, de même direction que les couches. Dans les cas où nous n'observons pas une inclinaison différente des couches, nous pouvons supposer qu'une telle différence existe à une certaine profondeur.

Ce caractère des enroulements démontre que nous ne pouvons pas les considérer comme des failles normales ou décrochements horizontaux réguliers, surtout comme elles ne sont développées toujours que dans un seul flanc du synclinal, sans traverser l'axe jusque dans l'autre flanc. Il nous faut donc chercher une autre explication pour leur formation. En premier lieu, c'est la relation entre ces dislocations et la terminaison brachysynclinale du bassin qui nous donne un indice. Les enroulements se sont formés comme effets directs de la formation de la terminaison du bassin, simultanément avec ce phénomène et entre ces deux phénomènes, il existe un rapport génétique.

La formation de la terminaison du bassin et la transformation du synclinal normal en brachysynclinal ont eu lieu apparemment au commencement de la deuxième phase du plissement varisque.[9]) Le plissement transversal s'est manifesté par une surélévation des couches, qui, en même temps, ont été renversées perpendiculairement et courbées en brachysynclinaux. Cependant, les couches déjà plissées en synclinal normal opposaient naturellement une résistance extraordinaire à la poussée orogénique. Bien entendu, cette résistance a été la plus forte là où les couches formaient la charnière synclinale, c'est-à-dire dans le noyau synclinal, tandis que les parties dans les flancs opposaient une résistance beaucoup moins forte. L'ensemble actuel répond exactement à cette hypothèse. Partout où les couches sont courbées en forme de brachysynclinal, nous pouvons constater une inclinaison maxima des couches dans les endroits où leur direction se rapproche de la direction normale, une inclinaison minima là où elle est perpendiculaire à la direction normale. C'est aussi le cas dans la terminaison brachysynclinale à Hlubočepy, dont nous donnons une coupe schématique dans la fig. 2. Tandis que le plus souvent dans cette région l'inclinaison des couches est très forte au couteau. au point où la courbure est maxima, l'inclinaison est très faible. Dans ce cas, les enroulements séparent des massifs, qui justement, opposaient une résistance différente et qui ont été redressés inégalement.

De cette manière, nous pouvons nous expliquer aussi encore un autre phénomène. Les failles à charnière sont toujours orientées perpendiculairenemt à la direction des couches. Dans l'exemple décrit ci-dessus, cette

[9]) (Voir 1. c. 3b.)

orientation des dislocations est très nette, car autrement, ces dislocations n'auraient pas du se produire.

On comprendra mieux le caractère de ces dislocations par l'étude des figures.

Le caractère tangentiel des enroulemets est déjà évident du fait qu'elles sont en rapport génétique avec la formation de la terminaison brachysynclinale des couches et il n'y a pas non plus de doute possible sur l'époque de leur formation pendant la deuxième phase du plissement varisque. Les failles d'enroulement comptent probablement parmi les dislocations transversales les plus anciennes du Barrandien. Elles se seraient formées en même temps que la terminaison brachysynclinale des couches si l'on en croit les hypothèses théoriques. Or nous savons précisément que ce phénomène date formation d'une époque ancienne à la plupart des dislocations transversales qui ont disloqué la terminaison. De plus, nous avons pu observé directement dans la vallée de Saint Procope et sur la Dlouhá hora, que les enroulements sont ils-mêmes disloqués par des dislocations transversales normales, ayant une direction de h 10, et qu'ils ont été rejetés par elles. Mais en même temps, toutes les enroulements sont plus récents que les dislocations longitudinales tangentielles, et, apparemment aussi, plus récentes que les dislocations longitudinales radiales.

Mars 1924.

Service géologique
de la république Tchécoslovaque.

The Polarisation of the Limiting Lines of the Total Reflexion. I.

(Dissertation.)

By

Dr. **Miloslav Hampl,**

Assistant of the Czech Technical High School, Prague.

Presented 25th January 1924.

In this paper I have derived new formulae for the angle of Nicol's prism at which the limiting lines disappear.

When the light advancing in the plane waves in an isotropic medium (the air) strikes on a doublerefracting crystal, then two waves of different speeds are formed by the refraction within the crystal and one wave is reflected back into the air. At a certain angle of incidence (the inner angle of the total reflexion I_1) the quicker wave is totally reflected and only the slower one arises in the crystal. At the same time the intensity of the reflected light becomes greater. At the outer angle of the total reflexion I_2 no more light arises within the crystal, but all the light is totally reflected. In a telescope we see in these two cases the limiting lines between the partial and the total reflexion.

When the light comes from the crystal into the air then inside the crystal two waves are formed by the reflexion and a wave emerges by the refraction into the air. When looking through a telescope in the direction I_1 respectively I_2 (these are the angles between the axis of the telescope and the normal of incidence) we see again the limiting lines as formerly.

Let us call according to K a e m m e r e r the first methode: T-method, the second: S-method.

The light coming into the telescope in these four cases is partially polarised. When we let the light proceeding from the crystal pass through a Nicol's prism standing between the crystal and the telescope, then at a certain angle ψ (which is the angle between the plane of polarisation of the Nicol's prism and the plane of incidence) the limiting lines disappear.

In this paper I occupy myself only with the T-method.

Ketteler[1]) was the first who occupied himself with the polarisation of the limiting lines. Kaemmerer[2]) in 1904 had some objections to his theory. About a year previous to this Závišk a[3]) had published a new theory of this problem which Koláček[4]) generalised a little later. Perhaps Koláček's paper was the principal motive for the Schwietring's[5]) dissertation in which he endeavoured to refute Koláček's theory. However Schwietring's theory in its application differs from the experimental results more than the older theory of Koláček. Therefore we can say that our problem is not yet solved.

The different theoretical results of above named authors arise from the various definitions of the origin of the limiting lines. There are two principal kinds of such definitions.

Kaemmerer and Schwietring maintain that the limiting line is caused by the difference of the intensities of light on both sides of the line. (See Kaem. loco cit. p. 110, Schw. p. 355.) With regard to this definition these two authors aduce the following consideration:

When the light incident on the crystal is so linearly uniradially polarised that within the crystal only the slower wave arises, then there is no cause for the origin of the inner lim. line as there is no cause for the discontinuity of the intensity in the neighbourhood of I_1. When only the quicker wave arises then at angles $i < I_1$ the light is reflected only partially, at $i \geqq I_1$ totally.

Therefore both authors are of opinion (with regard to their definition of the origin of the line) that *e. g.* the inner line is caused only by the quicker wave and that it disappears when the plane of polarisation of the Nicol's prism is perpendicular to the plane of polarisation of the quicker wave. They apply a similar consideration in the case of the outer line and in both cases at the S-method.

On the contrary the definition of the origin of the limiting line of Závišk a and Koláček is more mathematical and I suppose it to be more correct. But also these authors are mistaken.

They affirm rightly that the intensity J of the light which leaves the Nicol's prism varies quite continuously, but that the derivative $\frac{dJ}{di}$ has at $i = I$ a discontinuity. Závišk a points out that this discontinuity is the cause of the visibility of the limiting line, because in the

---

[1]) Wied. Annalen, 1886, *28*, p. 230, 520.

[2]) P. Kaemmerer, Dissertation, Neues Jahrbuch f. Mineral. Beil.-Bd XX, 1904.

[3]) Závišk a, O polar. hran. čar totál. refl., Rozpravy Akademie, r. XII, tř. II, č. 15, 1903.

[4]) Koláček, Ann. d. Physik, IV, *20* (1906), p. 433.

[5]) Schwietring, Neues Jahrbuch f. Mineral. Beil.-Bd. XXVI. 1908.

expression of that derivative there is also $\frac{\partial J}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{di}$ (φ denoting the angle of the refraction of that wave to which the line belongs) and then $\lim_{i=I-\varepsilon} \frac{d\varphi}{di} = \infty$ and $\lim_{i=I+\varepsilon} \frac{d\varphi}{di} = 0$, because — according to Záviška — φ is constant on the right side of the line. (This is not correct — φ is imaginary only, but not constant.) Therefore Záviška affirms that the lim. line disappears or its visibility is minimal when we remove in the intensity J the term $\frac{\partial J}{\partial \varphi}$ or when we make its absolute value a minimum. Kolářek in his theory develops the amplitude of the light emerging from the Nicol's prism in the following series:

Left, or for $i < I$:

$$R = A + B\sqrt{\sin I - \sin i} + C(\sin I - \sin i) + \ldots;$$

right, or for $i > I$:

$$R = A - B\sqrt{-1}\sqrt{\sin i - \sin I} + C(\sin I - \sin i) + \ldots$$

He says: "Das Unendlichwerden des Gradienten (für $i = I$), die Diskontinuität in den Reihenentwickelungen und auch die Sichtbarkeit der Grenzkurve wird durch das mittlere Glied bedingt" (p. *435*.) Therefore he is of opinion that the line disappears or becomes most indistinct when $B = 0$ or $|B|$ becomes a minimum.

On the contrary I affirm:

The line disappears when we turn the Nicol's prism so that that singularity vanishes, i. e. that the derivative $\frac{dJ}{di}$ *becomes continuous at* $i = I$.

To make $\frac{dJ}{di}$ continuous we must first remove the infinity of same. It can be done in two ways First we remove at the same time the discontinuity — the line disappears. In the second way we do not remove the discontinuity, only the infinity — I think, in the latter case the visibility of the line becomes minimal. But only the derivative of the intensity of that wave which belongs to the limiting line becomes infinite. Therefore it suffices to consider only this one wave advancing within the crystal. Here is again a difference between my theory and the theory of Záviška and Kolářek.

Suppose that the incident light is so linearly uniradially polarised, that within the crystal there arises only that wave to which the line considered belongs. A, B being the parallel and perpendicular components of the amplitude R of the reflected wave which has passed through the Nicol's prism, we can write:

$$R = A\cos\psi + B\sin\psi = r_0 + r_1\sqrt{\bar{l} - l} + r_2(\bar{l} - l) + \ldots,$$

where $$l = \sin i, \quad \overline{l} = \sin I$$

and $$r_m = a_m \cos \psi + b_m \sin \psi.$$

The intensity of that wave is: $J = |R|^2$, therefore

left (for $\overline{l} > l$):

$$J_l = r_0^2 + 2\, r_0\, r_1 \sqrt{\overline{l} - l} + (r_1^2 + 2\, r_0\, r_2)\, (\overline{l} - l) + \ldots,$$

right (for $\overline{l} < l$):

$$J_r = r_0^2 + (r_1^2 - 2\, r_0\, r_2)\, (l - \overline{l}) + \ldots$$

It is evident that $lim\, J_l = lim\, J_r = r_0^2$, therefore J is continuous.

Then

$$\frac{d\, J_l}{d\, i} = r_0\, r_1 \cdot \frac{-\cos i}{\sqrt{\overline{l} - l}} - (r_1^2 + 2\, r_0\, r_2) \cos i + \sqrt{\overline{l} - l}\, \{\ldots\},$$

$$\frac{d\, J_r}{d\, i} = \qquad + (r_1^2 - 2\, r_0\, r_2) \cos i + (\overline{l} - l)\, \{\ldots\}.$$

We can remove the infinity in $\frac{d\, J_l}{d\, i}$, when we make:

$$\alpha): \qquad r_0 = 0, \quad tg\, \psi_\alpha = -\frac{a_0}{b_0} = -\lim_{i = I} \frac{A}{B},$$

$$\text{or} \quad \beta): \qquad r_1 = 0, \quad tg\, \psi_\beta = -\frac{a_1}{b_1} = -\lim_{i = I} \frac{\frac{d\, A}{d\, i}}{\frac{d\, B}{d\, i}}.$$

In the case (α) it will be

$$lim\, \frac{d\, J_l}{d\, i} = -\, r_1^2 \cos I, \qquad lim\, \frac{d\, J_r}{d\, i} = r_1^2 \cos I.$$

The discontinuity remains. I think, in this case the line is least visible.

In the case (β) there is:

$$lim\, \frac{d\, J_l}{d\, i} = lim\, \frac{d\, J_r}{d\, i} = -\, 2\, r_0\, r_2 \cos I.$$

With regard to this continuity of $\frac{d\, J}{d\, i}$, I suppose the formula (β) to be the definition and equation of the disappearing of the limiting line by using the T-method.

The lim. line will be most visible, when the product $r_0\, r_1$ is maximal. That will be when

$$tg\, 2\, \psi = \frac{a_0\, b_1 + b_0\, a_1}{a_0\, a_1 - b_0\, b_1} = tg\, (\psi_\alpha + \psi_\beta).$$

In opposition to this result Koláček affirms that the line is most visible when the corresponding ψ is 90^0 greater than the ψ at which the line *disappears*.

My formulae are derived only for the case of the incident light being so *linearly uniradially* polarised that inside the crystal there arises only the wave to which the limiting line belongs. But these formulae also hold good for *arbitrary linearly* polarised light and in general for *natural* light.

We can decompose any linearly polarised light into two linearly polarised components which coincide with the *uniradially* polarised waves. And only the one of these waves — as I have said — causes the limiting line. And for that wave the equation (β) holds good again.

We can decompose *natural* light into two *elliptically* polarised waves and — as is known — *elliptically* polarised light into two *linearly* polarised *incoherent* waves, in our case into the *uniradial directions*. Therefore:

We can decompose *natural* light into two pairs of *incoherent linearly uniradially* polarised waves.

With regard to what I have said only the one pair of the *incoherent* — but *equally uniradially* polarised — waves causes the visibility of the limiting line. And that pair I shall now consider.

It is evident: when only either one of these incoherent waves strikes on the crystal, we always get for the extinction of the lim. line the same angle ψ_β. When both incoherent waves (with the same uniradial azimuts of polarisation) strike on the crystal, nothing is changed in the equations (2) from which I derive the formula (β) — only the intensity of the light emerging from the Nicol's prism will be:

$$J = J_1 + J_2 = k_1 \,|\, R_1|^2 + k_2 \,|\, R_2|^2.$$

But because we remove the discontinuity in $\frac{d\,J_1}{d\,i}$ and $\frac{d\,J_2}{d\,i}$ by the same angle ψ_β, it is evident that at the same time we remove the discontinuity in $\frac{d\,J}{d\,i}$. Therefore the equation holds equally good for *natural light*.

In my paper I derive further the values of the angles ψ_β 1.) for the uni-axial (positive and negative) crystals and 2.) for three particular positions of the bi-axial crystals. For this purpose I use the known equations (2) for the optical disturbances in the limiting plane of two mediums. Besides it I use an equation what I have proved in a former paper[6]) concerning the relation between the angle s of the ray and wave, the azimut of

---

[6]) See „Bulletin int. de l'Académie des Sc. de Bohême," 1922. Potiers Relation etc.

polarisation α of that wave and its angle φ of refraction in the case of the total reflexion. That equation is as follows:

$$\pm tg\, s = -\frac{cotg\, \varphi}{sin\, \alpha}. \qquad (1)$$

To derive my formulae I use the righthanded system of coordinates: The axis $+Z'$ denotes the normal of incidence (directed into the crystal), X' the line of intersection of the plane of incidence with the limit of both mediums, the positive direction of X' be that which makes an acute angle with the normal of the incident wave. The optical axes of the symmetry: X, Y, Z are defined as follows: The axis $+Z$ coincides with the optical axis of the crystal and makes an acute angle with $-Z'$. The axis $+X$ is in the principal section of the crystal and makes also an acute angle with $-Z'$. In this way the axes Y' and Y are completely defined.

The direction cosines of the system $X'\ Y'\ Z'$ and the optical system $X\ Y\ Z$ be given by the following scheme:

	X	Y	Z
X'	p_1	p_2	p_3
Y'	q_1	q_2	q_3
Z'	r_1	r_2	r_3

I may add: The quantities contained in the formulae for the angles ψ_α and ψ_β correspond only to the one wave belonging to the limiting line. The other wave has no influence on the value ψ_α and ψ_β. Therefore both formulae (α) and (β) hold good also in the case of the *outer* limiting line, although in this latter case the other wave which does not belong to this line has an imaginary amplitude.

If the amplitude of the only wave refracted into the crystal $= 1$, the equations for optical disturbances from which I have derived my formulae are the following:

$$\left.\begin{aligned} (E\cos\varepsilon - \Delta\cos\varrho)\cos i &= l, & (E\cos\varepsilon + \Delta\cos\varrho)\sin i &= n \\ E\sin\varepsilon + \Delta\sin\varrho &= m, & (E\sin\varepsilon - \Delta\sin\varrho)\sin i\cos i &= p. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

In these equations denote:

	amplitude	azimut of. polar.	angle
incident wave	E	ε	i
reflected wave	Δ	ϱ	$180^0 - i$
refracted wave	1	α	φ

s being the angle of the ray and wave refracted into the crystal in (2) denote:

$$l = \cos\varphi\cos\alpha \qquad n = \sin\varphi\cos\alpha$$
$$m = \sin\alpha \qquad p = \sin\varphi\,(\sin\alpha\cos\varphi \pm \sin\varphi\, tgs).$$

Hence we have:

$$A = \Delta\cos\varrho = \frac{n\cos i - l\sin i}{\sin 2i}, \qquad B = \Delta\sin\varrho = \frac{m\sin i\cos i - p}{\sin 2i}.$$

Therefore

$$tg\,\psi_\alpha = -\lim_{i=I}\frac{A}{B} = -\lim\frac{n\cos i - l\sin i}{m\sin i\cos i - p}$$

and

$$tg\,\psi_\beta = -\lim\frac{\frac{dA}{di}}{\frac{dB}{di}} =$$

$$= -\lim\frac{\sin 2i\left(\frac{dn}{di}\cos i - \frac{dl}{di}\sin i - n\sin i - l\cos i\right) - 2\cos 2i\,(n\cos i - l\sin i)}{\sin 2i\left(\frac{dm}{di}\sin i\cos i - \frac{dp}{di} + m\cos 2i\right) - 2\cos 2i\,(m\sin i\cos i - p)}.$$

If we multiply the numerator and denominator of the last fraction by the derivative $\frac{di}{d\varphi}$ we can write:

$$tg\,\psi_\beta = -\lim\frac{\frac{dn}{d\varphi}\cos i - \frac{dl}{d\varphi}\sin i}{\frac{dm}{d\varphi}\sin i\cos i - \frac{dp}{d\varphi}}, \tag{3}$$

because $\lim_{i=I}\frac{di}{d\varphi} = 0$ and the terms: l, m, n, p are finite.

a, b, c being the principal optical speeds of light in the crystal (let us suppose $a > b > c$) we can write:

$$a_{11} = a^2 p_1^2 + b^2 p_2^2 + c^2 p_3^2, \quad a_{23} = a^2 q_1 r_1 + b^2 q_2 r_2 + c^2 q_3 r_3, \quad \text{etc.}$$

$\mathfrak{q}$ being the velocity of the refracted wave we have:

$$tg\,\alpha = \frac{a_{22} - \mathfrak{q}^2}{a_{12}\cos\varphi - a_{23}\sin\varphi}.$$

The angle s is given by the following equation:

$$\pm tg\,s = \frac{(a_{11} - \mathfrak{q}^2)\sin\alpha\cos\varphi - a_{12}\cos\alpha - a_{13}\sin\alpha\sin\varphi}{\mathfrak{q}^2\sin\varphi}.$$

After differentiation with respect to φ we have:

$$\lim_{i=I}\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}\,cotg\,\varphi,$$

$$lim\ \alpha' = \frac{cos^2 \alpha}{a_{12} cos\ \varphi - a_{23} sin\ \varphi} \left\{ - 2\, a_{22}\, cotg\ \varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{tg\ \alpha}{sin\ \varphi} \left[a_{12} (1 + cos^2 \varphi) - a_{23} sin\ \varphi\ cos\ \varphi \right] \right\},$$

$$\pm lim \frac{d\, tg\, s}{d\, \varphi} = \frac{cos^2 \varphi}{sin^2 \varphi\ sin\ \alpha} (1 + 2\, cos^2 \alpha) + sin\ \alpha -$$

$$- \frac{sin\ \alpha}{\mathfrak{q}^2\ sin\ \varphi} (a_{11}\ sin\ \varphi + a_{13}\ cos\ \varphi) + \frac{\alpha'}{\mathfrak{q}^2\ sin\ \varphi\ sin\ \alpha} (a_{12} - \mathfrak{q}^2\ cos\ \varphi\ cotg\ \alpha).$$

To determine $\pm lim \frac{d\, tg\, s}{d\, \varphi}$ I have used the equation (1).

Substituting the values of $\mathfrak{q}'$, α', $\pm \frac{d\, tg\, s}{d\, \varphi}$ in (3) we get in general:

$$tg\ \psi_\beta = \frac{N}{D},\ \text{where}$$

$$N = cos\ \alpha\ cos\ (\varphi - I) - \alpha'\ sin\ \alpha\ sin\ (\varphi - I)$$

and

$$D = \frac{cos^2 \varphi\ cos^2 \alpha}{sin\ \alpha} - \frac{sin\ \alpha\ sin\ \varphi}{\mathfrak{q}^2} (a_{11}\ sin\ \varphi + a_{13}\ cos\ \varphi) -$$

$$- \alpha' \left\{ cos\ \alpha\ sin\ I\ cos\ I + \frac{cos^3 \alpha}{sin^2 \alpha} sin\ \varphi\ cos\ \varphi - \frac{a_{12}\ sin\ \varphi}{\mathfrak{q}^2\ sin\ \alpha} \right\}.$$

The particular formulae for the angles ψ_α and ψ_β are the following:

1. For the $\left\{ \begin{matrix} inner \\ outer \end{matrix} \right\}$ limiting line by $\left\{ \begin{matrix} positive \\ negative \end{matrix} \right\}$ uni-axial crystals:

$$tg\ \psi_\alpha = \frac{cotg\ \mu}{sin\ \vartheta\ sin\ I},$$

$$tg\ \psi_\beta = \frac{sin\ I\ cos\ \mu\ (1 - sin^2 \mu\ cos^2 \vartheta) - cos\ I\ sin^2 \vartheta\ cos\ \vartheta\ sin^3 \mu}{sin\ \mu\ sin\ \vartheta\ [1 - sin^2 \mu\ cos^2 \vartheta + sin\ \mu\ cos\ \mu\ cos\ \vartheta\ sin\ I\ cos\ I]}.$$

For the $\left\{ \begin{matrix} inner \\ outer \end{matrix} \right\}$ limiting line by $\left\{ \begin{matrix} negative \\ positive \end{matrix} \right\}$ uni-axial crystals:

$$tg\ \psi_\alpha = \frac{(cos\ \mu\ sin\ \varphi + sin\ \mu\ cos\ \varphi\ cos\ \vartheta)\ sin\ \mu\ sin\ \vartheta\ sin\ (\varphi - I)}{sin^2 \mu\ sin^2 \vartheta\ sin\ \varphi\ cos\ \varphi - (cos\ \mu\ sin\ \varphi + sin\ \mu\ cos\ \varphi\ cos\ \vartheta)^2\ sin\ I\ cos\ I},$$

where

$$tg\ \varphi = \frac{o^2\ cos^2 \mu + e^2\ sin^2 \mu}{(o^2 - e^2)\ sin \quad cos\ \mu\ cos\ \vartheta};$$

particularly for $\mu = \frac{\pi}{2}$, $tg\ \psi_\alpha = cotg\ \vartheta\ cos\ I$.

$$tg\ \psi_\beta = sin\ \mu\ sin\ \vartheta\ \frac{o^2\ sin\ \mu\ cos\ \mu\ cos\ \vartheta\ cos\ I + (o^2\ cos^2 \mu + e^2\ sin^2 \mu\ sin^2 \vartheta)\ sin\ I}{e^2\ sin^3 \mu\ sin^2 \vartheta\ cos\ \vartheta\ sin\ I\ cos\ I - \frac{o^2}{e^2} cos\ \mu\ (o^2\ cos^2 \mu + e^2\ sin^2 \mu\ sin^2 \vartheta)};$$

for

$$\mu = \frac{\pi}{2}, \qquad tg\ \psi_\beta = \frac{tg\ \vartheta}{cos\ I}.$$

In these formulae denote:

μ the angle between $+Z'$ and $-Z$,

ϑ the angle between the plane of incidence and the principal section of the crystal,

o and e the velocity of the ordinary and extraordinary wave.

2. Bi-axial crystals.

Those four positions of the crystal, at which the radius vector of the limiting line becomes extremal, are especially important. Three of these extremes are: $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$. The fourth extreme is a function of the three above named extremes and is of no importance for us. Those three positions are defined as follows:

When the extreme is $\left\{\frac{1}{a}\right\}$, $\left\{\frac{1}{b}\right\}$, $\left\{\frac{1}{c}\right\}$, the position of the crystal is defined by the equation $\begin{Bmatrix} p_1 = 0 \\ p_2 = 0 \\ p_3 = 0 \end{Bmatrix}$. Then the velocity of the wave considered within the crystal is $\begin{Bmatrix} q_1 = a \\ q_2 = b \\ q_3 = c \end{Bmatrix}$.

Writing

$$tg^2\ \omega = \frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}$$

we get the following equations for the angles ψ_α and ψ_β in the three above named cases:

$$a) \qquad tg\ \psi_\alpha = -\frac{\sqrt{1 - r_1^2}}{r_1\ sin\ I},$$

$$b) \qquad tg\ \psi_\alpha = -\frac{\sqrt{1 - r_2^2}}{r_2\ sin\ I},$$

$$c) \qquad tg\ \psi_\alpha = -\frac{\sqrt{1 - r_3^2}}{r_3\ sin\ I}.$$

$$a) \qquad tg\ \psi_\beta = \frac{[(1 - r_1^2)\ tg^2\ \omega + r_3^2]\ \sqrt{1 - r_1^2}\ sin\ I + r_1^2\ r_2\ r_3\ cos\ I}{r_1 \left\{r_2\ r_3\ \sqrt{1 - r_1^2}\ sin\ I\ cos\ I - r_3^2 - \frac{c^2}{a^2}\ (1 - r_1^2)\ tg^2\ \omega\right\}}.$$

$$b) \qquad tg\,\psi_\beta = \frac{[(1-r_2^2)\,sin^2\,\omega - r_3^2]\,\sqrt{1-r_2^2}\,sin\,I + r_1\,r_2^2\,r_3\,cos\,I}{r_2\left\{r_1\,r_3\,\sqrt{1-r_2^2}\,sin\,I\,cos\,I + r_3^2 - \frac{c^2}{b^2}\,(1-r_2^2)\,sin^2\,\omega\right\}}.$$

$$c) \qquad tg\,\psi_\beta = \frac{-[(1-r_3^2)\,cotg^2\,\omega + r_1^2]\,\sqrt{1-r_3^2}\;\,sin\,I + r_1\,r_2\,r_3^2\,cos\,I}{r_3\left\{r_1\,r_2\,\sqrt{1-r_3^2}\,sin\,I\,cos\,I - r_2^2 + \frac{b^2}{c^2}\,(1-r_3^2)\,cos\;c^2\,\omega\right\}}.$$

I think only an exact experiment can finally decide the correctness of my formulae for the angles ψ_α and ψ_β of Nicol's prism, at which the imiting lines are least visible or disappear.

Analyse des isothermes inférieures à la critique.

Par

R. N. Dr. **AL. WANGLER.**

Présenté le 23 mai 1924.

1. Par l'analyse des isothermes expérimentales supérieures à la critique, j'ai démontré[1]) qu'elles s'identifiaient avec un système de courbures déterminées par l'équation suivante:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = R\,\tau \qquad (1)$$

dans laquelle R est une constante absolue (indépendante de la température et déterminée par le choix des unités), a et b les constantes particulières à chaque substance. J'ai démontré, de plus, qu'à chaque isotherme expérimentale il fallait ajouter la valeur du paramètre τ („température individuelle des substances"), qui *n'est pas égale* à la température absolue T. Les valeurs τ et T, appartenant à la même isotherme, se distinguent peu à une température assez élevée, mais à mesure que celle-ci s'abaisse la différence positive $T - \tau$ ne fait que s'accrôitre; à la température critique absolue T_k, la „température critique individuelle de la substance" τ_k correspondante atteint une telle valeur que

$$\frac{R\,\tau_k}{p_k\,v_k} = \frac{8}{3}.$$

Il est cependant nécessaire de déterminer τ_k par extrapolation, car, pour les températures trop rapprochées de la critique, la régularité, qui

---

[1]) Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême 1923. Nous désignerons ici ce travail par I afin d'abréger. On trouvera de plus amples détails dans les „Rozpravy České Akademie", Roč. XXXII. Tř. II., čís. 7. (1923.)

se manifeste dans tout le domaine au-dessus du point critique, cesse, ce qui confirme la façon de voir de Kamerlingh Onnes et de Keesom, d'après lesquels dans le voisinage du point critique les isothermes sont déformées par l'influence d'une „fonction troublante".[2])

Pour déterminer les constantes a et b et le paramètre τ des isothermes expérimentales, je me suis servi d'une méthode qui permet de trouver b sans qu'il soit besoin de faire n'importe qu'elle supposition sur la valeur de a et de τ.

2. Il vient donc à l'esprit de faire également l'analyse de l'isotherme inferieure à la critique par le même procédé et de s'assurer si les divergences existant entre les isothermes de van der Waals et les isothermes expérimentales — et qui sont les plus grandes audessous du point critique — disparaissent on, tout au moins, diminuent, si nous prenons pour τ d'autres valeurs que T.

Sur l'isotherme inférieure à la critique les deux points les plus marquants sont ceux de condensation. Nous obtenons ses coordonnées, si nous combinons l'équation (1) avec le rapport de Maxwell

$$\int_{v_1}^{v_2} p\, d\, v = p_{12}\,(v_2 - v_1), \tag{2}$$

où v_1 et v_2 représentent les volumes des deux phases, liquide et gazeuse, coexistantes, p_{12} la tension des vapeurs saturées.

Si nous écrivons (comme nous l'avons fait dans I) l'équation (1) sous sa forme la plus caractéristique de vue physique, nous avons:

$$p = \frac{R\,\tau}{v - b} - R\,\tau_B \frac{b}{v^2}, \tag{3}$$

dans la quelle τ_B remplace $\dfrac{a}{R\,b}$ et représente ce qu'on appelle la température de Boyle. Aux points de condensation, nous avons en même temps

$$p_{12} = \frac{R\,\tau}{v_1 - b} - R\,\tau_B \frac{b}{{v_1}^2} = \frac{R\,\tau}{v_2 - b} - R\,\tau_B \frac{b}{{v_2}^2} \tag{4}$$

donc

$$\tau\left(\frac{1}{v_1 - b} - \frac{1}{v_2 - b}\right) = \tau_B\, b\left(\frac{1}{{v_1}^2} - \frac{1}{{v_2}^2}\right),$$

autrement dit:

$$\tau = \tau_B .\, b\, \frac{(v_1 - b)\,(v_2 - b)\,(v_1 + v_2)}{{v_1}^2\,{v_2}^2}. \tag{5}$$

[2]) Enc. d. math. Wissenschaften, V. 10. § 50*a*, *b*. 1912.

De plus, d'après (2)

$$\int_{v_1}^{v_2} \left(\frac{R\,\tau}{v-b} - R\,\tau_B \frac{b}{v^2} \right) d\,v = p_{12}\,(v_2 - v_1)\,.$$

Faisons l'intégration et écrivons les valeurs de p_{12} d'après (4) et de τ d'après (5), nous obtenons:

$$b\,\frac{v_1+v_2}{v_1\,v_2} + \frac{(v_1+v_2)\,(v_1-b)\,(v_2-b)}{v_1\,v_2\,(v_2-v_1)}\,lg\,\frac{v_2-b}{v_1-b} = 2\,. \qquad (6^a)$$

Cette équation nous permet de déterminer b, à la seule condition de connaître les volumes de condensation v_1 et v_2, c'est-à-dire *indépendamment de la valeur de* τ_B *et* τ. R. v. Hirsch[3]) s'eu est servi dans ce but pour quelques isothermes peu nombreuses du toluol, du xylols et des acides aliphatiques.

Pour pouvoir se servir directement des résultats donnés par l'expérience, il convient d'introduire dans l'équation les densités des deux phases exprimées par les rapports

$$v_1 = \frac{1}{s_1} \qquad v_2 = \frac{1}{s_2}\,, \qquad (7)$$

de sorte que le côté gauche de l'équation (6^a), prend la forme de

$$b\,(s_1+s_2) + \frac{(s_1+s_2)\,(1-b\,s_1)\,(1-b\,s_2)}{s_1-s_2}\,lg\,\frac{s_1\,(1-b\,s_2)}{s_2\,(1-b\,s_1)} = 2. \qquad (b^b)$$

Eliminons τ de (4) et de (5), il en résulte:

$$p_{12} = R\,\tau_B\,.\,\frac{b}{v_1\,v_2}\left[1 - b\,\frac{v_1+v_2}{v_1\,v_2}\right] \qquad (8^a)$$

ou, après avoir substitué (7)

$$p_{12} = R\,\tau_B\,.\,b\,s_1\,s_2\,[1 - b\,(s_1+s_2)]. \qquad (8^b)$$

Si nous posons succinctement

$$\frac{b}{v_1\,v_2}\left[1 - b\,\frac{v_1+v_2}{v_1\,v_2}\right] = b\,s_1\,s_2\,[1 - b\,(s_1+s_2)] = x \qquad (9)$$

l'équation (8^a), resp. (8^b), nous dit que

$$p_{12} = R\,\tau_B\,.\,x, \qquad (8^c)$$

c'est-à-dire que la pression des vapeurs saturées est proportionnelle à x. Et dès que, au moyen de l'équation (6^b), nous aurons déterminé b, se rapportant à une isotherme expérimentale donnée, nous pourrons, si

---

[3]) Wiedemann: Annalen d. Physik u. Chemie 69, p. 5 (1899).

nous connaissons la pression compétente des vapeurs saturées, d'après (8^c), déterminer τ_B et, si ce dernier est connu, l'équation (5) nous donne τ.

Avant de passer au calcul de b, τ_B et τ dans les isothermes expérimentales inférieures à la critique pour chaque substance, et avant de comparer ces résultats avec ceux qui résultaient de l'analyse des isothermes supérieures à la critique, il convient d'attirer l'attention sur une circonstance dont l'importance se marquera dans la suite.

Si nous prenions l'équation d'état, au lieu de sous la forme (3), sous la forme suivante:

$$p = \frac{R\tau}{v-b} - R\tau_B \frac{b}{v^2} + r$$

où r serait une simple fonction de la température, mais aucunement fonction du volume, il en résulterait de

$$p_{12} = \frac{R\tau}{v_1 - b} - R\tau_B \frac{b}{v_1^2} + r = \frac{R\tau}{v_2 - b} - R\tau_B \frac{b}{v_2^2} + r$$

de nouveau l'équation (5) sans modifications, et de

$$\int_{v_1}^{v} \left(\frac{R\tau}{v-b} - R\tau_B \frac{b}{v^2} + r \right) dv = \left(\frac{R\tau}{v_1 - b} - R\tau_B \frac{b}{v_1^2} + r \right) (v_2 - v_1)$$

de nouveau la même équation (6^a), car lorsque r est indépendant de v

$$\int_{v_1}^{v_2} r\, dv = r\,(v_2 - v_1).$$

Seule l'équation (8^a) se changerait en

$$p_{12} = R\tau_B . x + r. \qquad (10)$$

3. Les données expérimentales les plus complètes que nous ayons, aussi bien dans le domaine inférieur que supérieur à la critique, sont connues pour CO_2. C'est aussi la seule substance qui ait été examinée par l'auteur cité[4]) (mêmes préparations!) aussi bien par des températures supérieures à la critique assez élevées et sous des pressions atteignant jusqu'à la pression p_2, défini par le rapport

$$2\frac{\partial (pv)}{\partial p} = \frac{pv}{p} = 2b,$$

(dont on se servait autrefois[5]) pour déterminer b) — aussi bien que par

---

[4]) E. H. Amagat, Annales de chimie et de physique 29, p. 68 (1893).

[5]) I, p. 2 (point „2“).

des températures assez basses au-dessous du point critique. Aussi sera-ce pour cette substance que nous calculerons d'abord b, τ_B et τ, au moyen des équations (6^b), (8^c) et (5) et que nous les comparerons avec les résultats obtenus dans le domaine supérieur à la critique.

La table no 1 (voir la page 6), dans les parties II et III, contient, dans les colonnes 2 et 3, les dénsités des phases coexistantes d'après Amagat,[6]) dans la colonne 5 b calculé graphiquement d'après l'équation (6^b). Dans la I^e partie, nous avons mis les valeurs s_1 et s_2 calculées d'après les formules

$$s_1 = 0{\cdot}350 + 0{\cdot}0035\ t + 0{\cdot}101\ \sqrt{31 - t}$$

$$s_2 = 0{\cdot}5668 - 0{\cdot}00426\ t - 0{\cdot}084\ \sqrt{31 - t},$$

qui expriment les résultats de Cailletet et Mathias[7]) pour des mesures pratiquies entre -30^0 C et 0^0 C.

Cette table montre que de 0^0 à 10^0 C (partie II) b est constant, c'est-à dire

$$b = 0{\cdot}722\ \frac{cm^3}{g}. \qquad (CO_2)_A$$

A partir de 11^0 (partie III) il augmente avec la température se rapprochant de la critique. Pour des températures très près de la critique, $\frac{\Delta F(b)}{\Delta b}$ est trop petit, de sorte que la racine de (6^b) qu'il n'est possible de résoudre que graphiquement, ne peut plus être déterminée à 0·001 près. Dans la partie I.

$$b = 0{\cdot}723 \pm 0{\cdot}001, \qquad (CO_2)_{CM}$$

c'est donc aussi une constante et ce b de la préparation de Cailletet-Mathias ne diffère presque pas du b d'Amagat.

Afin de pouvoir comparer b, déterminé d'après l'équation (6^b) avec b déterminé sur l'isotherme superieure à la critique (b_A), il faut considérer que la racine de cette équation correspond au volume spécifique [ce qui est visible par la substitution (7)] tandisque les chiffres des volumes d'Amagat pour l'isotherme au-dessus du point critique indiquent combien de fois ce volume est plus grand que le volume de la même quantité de substance à 0^0 C sous la pression d'une atmosphère. Nous calculons donc b sur b_A d'après le rapport

$$b_A = \frac{b}{\frac{1}{s_0}} = b\ .\ s_0. \qquad (11)$$

---

[6]) Loc. cit. p. 136.

[7]) Journal de Physique (^{2}) 5, p. 549 (1886). Landolt-Börnstein, Phys. Chem. Tab. IV éd., tab. 63^a.

Table. no. 1. CO_2

	t	s_1	s_2	$s_1 + s_2$	b
	1	2	3	4	5
I.	— 30° C	1·034	0·0386	1·071	0·723
	— 25°	1·017	0·0448	1·062	0·724
	— 20°	1·001	0·0521	1·053	0·724
	— 15°	0·982	0·0610	1·043	0·723
	— 10°	0·961	0·0716	1·033	0·723
	— 5°	0·938	0·0841	1·022	0·722
II.	0°	0·914	0·096	1·010	0·722
	+ 1°	0·910	0·099	1·009	0·722
	2°	0·906	0·103	1·009	0·722
	3°	0·900	0·106	1·006	0·7215
	4°	0·894	0·110	1·004	0·722
	5°	0·888	0·114	1·002	0·722
	6°	0·882	0·117	0·999	0·721
	7°	0·876	0·121	0·997	0·722
	8°	0·869	0·125	0·994	0·722
	9°	0·863	0·129	0·992	0·722
	10°	0·856	0·133	0·989	0·722
III.	11°	0·848	0·137	0·985	0·723
	12°	0·841	0·142	0·983	0·723
	13°	0·831	0·147	0·978	0·725
	14°	0·822	0·152	0·974	0·726
	16°	0·806	0·164	0·970	0·725
	18°	0·786	0·176	0·962	0·727
	20°	0·766	0·190	0·956	0·728
	22°	0·743	0·208	0·951	0·727
	24°	0·717	0·228	0·945	0·727
	26°	0·688	0·252	0·940	0·728
	28°	0·653	0·282	0·935	0·726

D'après cela, à $b = 0{\cdot}722$ correspond

$$b_A = 0{\cdot}722 \times 0{\cdot}0019768^{8}) = 0{\cdot}001426,$$

à $b = 0{\cdot}723 \pm 0{\cdot}001$, $b_A = 0{\cdot}001428 \pm 0{\cdot}000002$.

Pour les isothermes supérieures à la critique de 40° à 198° C, nous avons déjà[9]) trouvé

$$b_A = 0{\cdot}00143 \pm 0{\cdot}00001.$$

Les deux résultats concordent parfaitement; mais maintenant l'exactitude est plus grande.

Pour CO_2 b est donc une constante dans tout le domaine au-dessus et au-dessous du point critique experimentalement étudié, à l'exception d'un certain intervalle de température dans lequel se trouve la température critique.

Par là se confirme de nouveau la façon de voir, exprimée plus haut,[10]) de Kamerlingh Onnes et de Keesom, d'après lesquels il existe aux environs du point critique une „fonction troublante", dont il résulte qui'il est, il est vrai, possible de déterminer la même équation d'état (toute empirique qu'elle soit) pour l'isotherme aussi bien inférieure que supérieure à la critique, mais pas cependant aux alentours du point critique.

La limite inférieure jusque à laquelle la fonction troublante s'exerce peut être fixée avec assez d'exactitude en se servant de la table no 1, le cas échéant de la fig. no 1, dans laquelle est indiqué la dépendance de b avec la température (b détermine sur l'isotherme supérieure à la critique, y est calculé sur le volume spécifique). C'est environ une température de 11° C.

Maintenant, nous pouvons déterminer, d'après l'équation (5), le rapport $\frac{\tau}{\tau_B}$, c'est-à-dire le rapport de la température individuelle à la constante τ_B. La table no 2, colonne 3 (voir la page 9), présente ce calcul pour l'intervalle de température correspondant aux mesures d'Amagat, dans lequel b est une constante (= 0·722). (Nous laissons hors de considération le domaine dans lequel la „fonction troublante" déforme l'isotherme.) Pour se servir directement des données expérimentales, il est commode de se servir de la substitution (7) ramanée (5) à la forme suivante:

$$\frac{\tau}{\tau_B} = b\,(1 - b\,s_1)\,(1 - b\,s_2)\,(s_1 + s_2) \qquad (12)$$

et de l'employer ainsi dans les calculs.

En faisant l'analyse de l'isotherme supérieure à la critique, il ressortait de quelques équations[11]) que l'isotherme à laquelle appartient la valeur du paramètre $\tau = \frac{\tau_B}{4}$ est singulière. Nous nous sommes done bornés à constater[12]) qu'il s'agissait de l'isotherme inférieure à la critique. Pour en déterminer la forme, nous introduisons dans (3) $\tau = \frac{\tau_B}{4}$, de sorte que

$$p = \frac{R\,\tau_B}{4}\left(\frac{1}{v - b} - 4\,\frac{b}{v^2}\right) = \frac{R\,\tau_B}{4}\,\frac{(v - 2\,b)^2}{(v - b)\,v^2}\,. \qquad (13)$$

---

[8]) Landolt-Börnstein, Phys. Chem. Tab. IV ed. (1912), tab. no 104.
[9]) I., pag. 5.
[10]) I., pag. 9.
[11]) I., p. 2 (9), p. 3 (8).

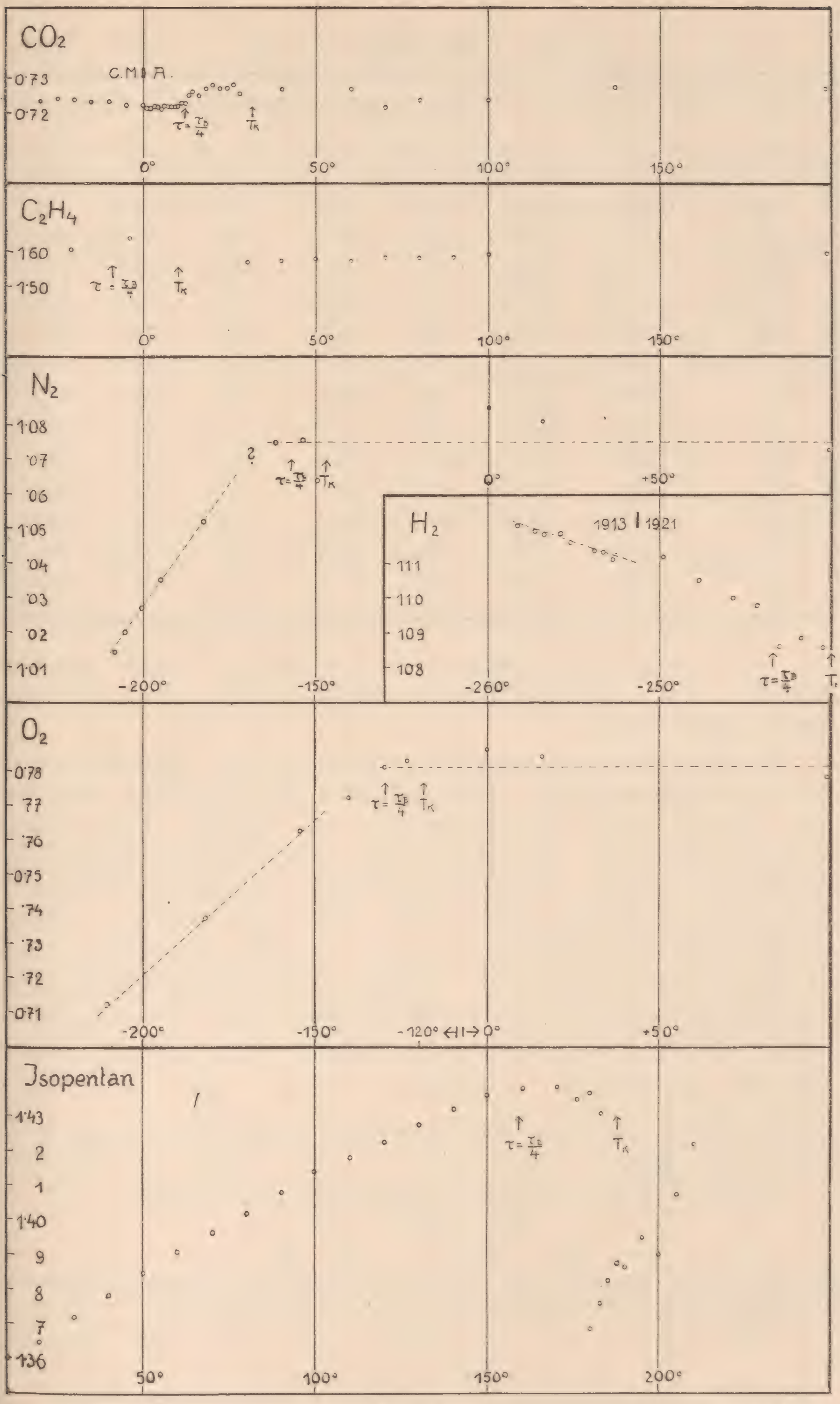

CO2
C.M.A.
0·73
0·72
τ = τD/4
TK
0°
50°
100°
150°
C2H4
1·60
1·50
τ = τD/4
TK
0°
50°
100°
150°
N2
1·08
·07
·06
1·05
·04
·03
·02
1·01
?
τ = τD/4
TK
0°
+50°
-200°
-150°
H2
1913 | 1921
111
110
109
108
τ = τD/4
TK
-260°
-250°
O2
0·78
·77
·76
0·75
·74
·73
·72
0·71
τ = τD/4
TK
-200°
-150°
-120° ←I→ 0°
+50°
Isopentan
I
1·43
2
1
1·40
9
8
7
1·36
τ = τD/4
TK
50°
100°
150°
200°

Fig. 1.

Table no. 2. CO_2

t	b	$\frac{\tau}{\tau_B}$	x	$p_{12} = 1540\,x + 8\,0$	p_{12} exper.	Δ (6—7)	$\tau = \frac{\tau}{\tau_B} .826$	T
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0^0		0·2308	0·01716	34·4	34·3	— 0·1	190·6	273·1
$+1^0$		2320	1766	35 2	35 2	0·0	191·6	274·1
2^0		2332	1829	36·1	36·1	0·0	192·7	275·1
3^0		2349	1885	37·0	37·0	0·0	194·0	276·1
4^0		2366	1953	38·1	38·0	— 0·1	195·4	277·1
5^0	0·722	2382	2022	39·1	39·0	— 0·1	196·8	278·1
6^0		2399	2077	40·0	40·0	0·0	198·0	279·1
7^0		2415	2144	40·9	41·0	+ 0·1	199·4	280·1
8^0		2433	2214	42·1	42·0	— 0·1	200·9	281·1
9^0		2448	2281	43·1	43·1	0·0	202·1	282·1
10^0		2466	2350	44·2	44·2	0·0	203·5	283·1
11^0	0·723	2484	2418	45·3	45·3	0·0	205·1	284·1
12^0	0·723	0·2500	2498	46·3	46·4	+ 0·1	206·5	285·1

Cette équation nous montre que cette isotherme touche l'axe v au point $v = 2\,b$ (à $p = 0$) appartient la double racine $v_{1,2} = 2\,b$) — mais si dans sa partie instable.

On voit ensuite par la table no 2 que pour le CO_2 cette isotherme est celle qui correspond à 12^0 C. C'est justement une température située à la limite entre la partie dans laquelle b est une constante et les environs du point critique où se fait sentir la „fonction troublante". D'après cela, tous les isothermes au dessous de la critique qui courent en entier — c'est-à dire aussi dans la partie instable — au-dessus de l'axe v, diffèrent des isothermes déterminées au moyen de l'équation applicable au reste du domaine de la température au-dessus et au-dessous de la critique, autrement dit, d'après la terminologie de Kamerlingh Onnes et Keesom, ils sont déformés par la „fonction troublante". C'est seulement pour les isothermes inférieures $\left(\tau < \frac{\tau_B}{4}\right)$ qu'il s'opère un retour à la constante à cette même constante qui a été determinée d'après les isothermes supérieures à la critique.

Dans la colonne 4 de la table no 2, nous avons calculé

$$x = b\,.\,s_1\,s_2\,[1 - b\,(s_1 + s_2)\,].$$

D'après (8^c) la pression des vapeurs saturées doit être proportionnée à cette grandeur:

$$p_{12} = R\,\tau_B\,.\,x. \qquad (8^c)$$

[12]) I., p. 12, 8.

Afin de pouvoir examiner l'exactitude de ce rapport, la fig. 2 montre les pressions (d'après Amagat[13]) figurées dans leur relation avec x; et l'on y voit que p_{12} *est, il est vrai, une fonction linéaire de x, sans être cepen-*

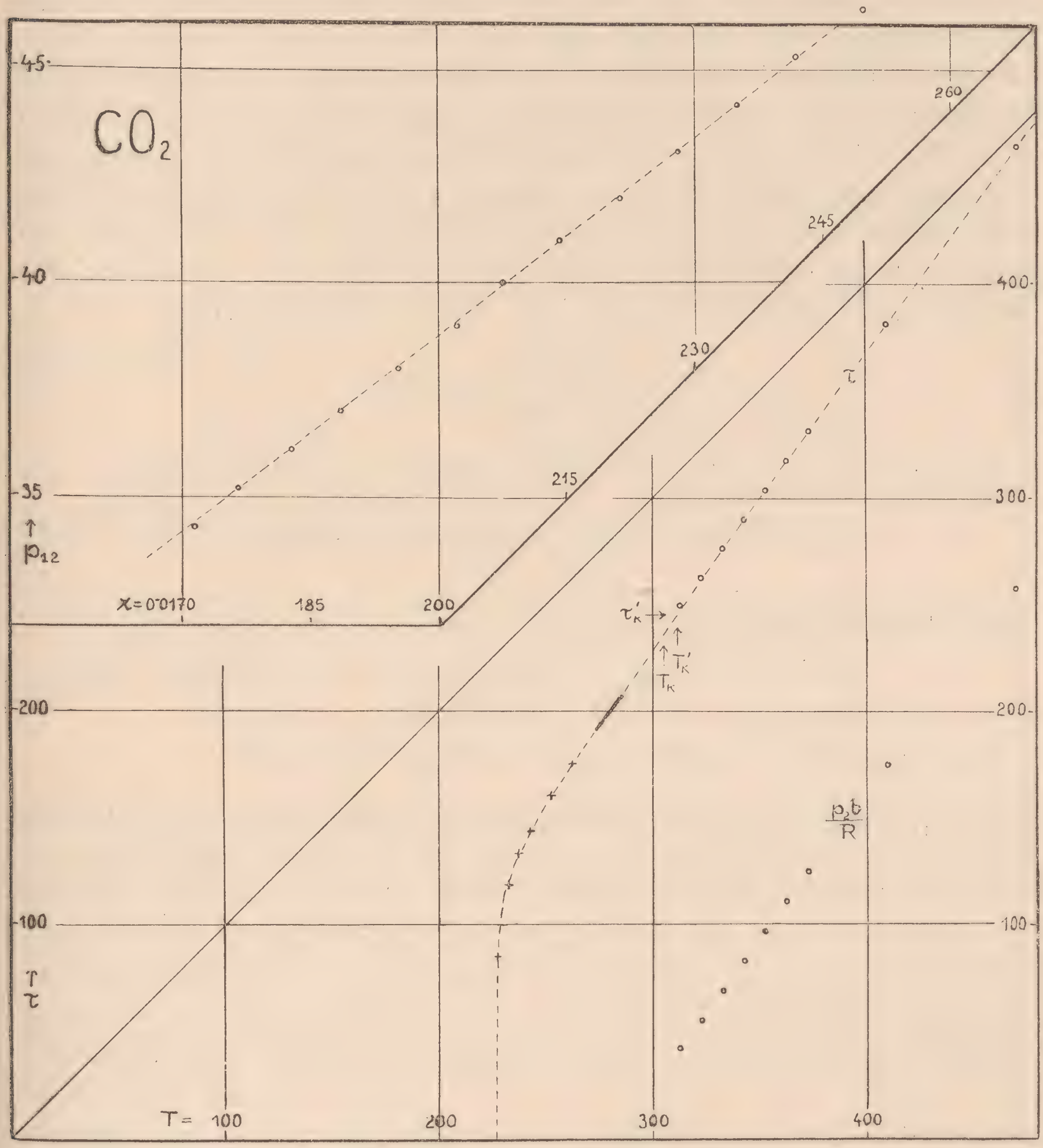


Fig 2.

dant directement proportionnel à x. L'équation de la droite sur la quelle se trouvent les points des coordonnées x, p_{12} est exprimée par

$$p_{12} = 1540\, x + 8{\cdot}0. \qquad (14)$$

Dans la cinquième colonne, on trouvera p_{12} calculé d'après (14), dans la sixième p_{12} déterminé expérimentalement et dans la septième la différence entre les deux.

---

[13]) Annales de chimie et de physique 29, p. 136 (1893).

Ce résultat c'est la forme (10) et il est

$$R\,\tau_B = 1540\,\frac{cm^3}{g}\,.\,\text{atm.} \qquad r = 8{\cdot}0\ \text{atm.} \tag{15}$$

Comme nous l'avons déjà exposé (p. 4.), les équations (6^b) et (5) qui est identique à (12) restent valables, même dans ce cas, sans changement. Sans nous occuper pour le moment de l'importance de la constante r, qui, à l'encontre de toute attente, se retrouve dans l'équation (14), nous calculerons τ_B d'après (15). En ce faisant, il est nécessaire d'observer que, en déterminant la valeur de x d'après l'équation (9), nous avons pris pour b le chiffre du volume spécifique. Si le volume est exprimé en cette unité et la pression en atmosphères, la constante des gaz à valeur

$$R = \frac{22.412}{273{\cdot}09\,M} = 1{\cdot}865\,, \tag{16}$$

où M représente le poids moléculaire (pour $CO_2 = 44{\cdot}00$). Donc

$$\tau_B = 1540 : 1{\cdot}865 = 826 \quad \text{et} \quad \frac{\tau_B}{4} = 206{\cdot}5\,. \tag{CO_2}$$

D'après les isothermes supérieures à la critique nous avons déterminé[14])

$$205{\cdot}4 < \frac{\tau_B}{4} < 211{\cdot}7.$$

Ici aussi *l'accord est complet, mais l'exactitude plus grande.*

Le peu d'exactitude avec laquelle fut déterminé plus tôt $\frac{\tau_B}{4}$ (environ 3 %), avait pour conséquence que τ également, calculé d'après l'équation

$$\tau = \frac{p_2\,b}{R} + \frac{\tau_B}{4}\,,^{15})$$

n'était pas suffisamment exact, bien que le premier membre fût déterminé, au moyen de la méthode du point „2″ au 0·1° C. En nous servant maintenant de la valeur nouvelle, plus exacte $\frac{\tau_B}{4} = 260{\cdot}5$, nous obtenons, dans le domaine supérieur à la critique, les valeurs suivantes:

$t =$	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	137°	198°
$\frac{p_2\,b}{R} =$	42·3	55·7	69·2	83·6	96·8	110·8	124·9	175·1	258·1
$\tau =$	248·8	262·2	275·7	290·1	303·3	317·3	331·4	381·6	464·6
$T =$	313·1	323·1	333·1	343·1	353·1	363·1	373·1	410·1	471·1

[14]) I., tab. no 1, col. 6 et p. 5.
[15]) I., équ. (19) p. 16.

Si nous multiplions $\frac{\tau}{\tau_B}$, de la colonne 3 de la table no 2, par 826, nous obtenons τ pour le domaine inférieur à la critique (colonne 8). La deuxième partie de la fig. 2, dans laquelle les τ au-dessus de la critique sont représentés par des cercles et dans laquelle les τ au-dessous de la critique sont reliés entre eux par une ligue, nous montre que les deux genres de τ sont situés sur une même courbe que l'on peut interpoler pour les environs de la température critique.

Des conditions connues pour le point critique, il resulte que

$$\tau_k = \frac{8}{27}\tau_B, \quad v_k' = 3b, \quad p_k' = \frac{3}{8}\frac{R\tau_k}{v_k'} = \frac{R\tau_B}{27b}. \tag{17}$$

Donc pour le CO_2

$$\tau_k = 244{\cdot}7, \quad v_k' = 2{\cdot}166\,\frac{cm^3}{g}, \quad p_k' = 79{\cdot}0 \text{ atm.} \qquad (CO_2)$$

D'après le graphique, à $\tau_k = 244{\cdot}7$ [chiffre plus exact que celui de 248.9°, determiné indirectement autrefois[16])] correspond

$$T_k' = 311^0.$$

Les chiffres que nous avons ainsi obtenus pour les coordonées critiques sont plus grands que les valeurs fournies par l'expérience:

$$T_k = 304{\cdot}5^0 \quad v_k = 2{\cdot}15\frac{cm^3}{g} \quad p_k = 72{\cdot}9 \text{ atm.} \qquad (CO_2)$$

Comme nous l'avons indiqué plus haut,[17]) la formule empirique de Kamerlingh Onnes de 25 constantes individuelles même au même résultat. Le point critique, sous l'influence de la fonction troublante, est déplacé de telle sorte que ses coordonnées (τ_k, v_k, p_k) sont plus petites que celles déterminées par l'équation d'état qui, excepté pour un certain intervalle aux environs du point critique, s'accorde parfaitement avec les résultats de l'expérience (coordonées du point critique de l'équation non interrompue τ_k', v_k', p'_k).

Pour CO_2 on a trouvé[17])

$$\frac{T_k'}{T_k} = 1{\cdot}016 \qquad \frac{v_k'}{v_k} = 1{\cdot}038 \qquad \frac{p_k'}{p_k} = 1{\cdot}066$$

tandis que d'après les calculs données au-dessus nous avons:

$$\frac{T_k'}{T_k} = 1{\cdot}02 \qquad \frac{v_k'}{v_k} = 1{\cdot}01 \qquad \frac{p_k'}{p_k} = 1{\cdot}08.$$

Pour se faire une idée exacte de cette concordance, il faut se rappeler que les valeurs expérimentales T_k, v_k, p_k sont introduites a priori dans

---

[16]) I., pag. 10.
[17]) I., p. 10. rem. 4.

l'équation de Kamerlingh Onnes $\left(\text{coefficient } K_4 = \frac{R T_k}{p_k v_k}\right)$, tandisque nous avons déterminé b et τ_B d'après des isothermes considerablement éloignées de la critique et que nous en avons calculé v_k', p_k' et T_k'.

4. Les résultats que nous avons obtenus pour CO_2, en comparant les données expérimentales avec l'équation de van der Waals, peuvent donc se résumer sous forme:

L'équation

$$p = \frac{R\tau}{v - b} - R\tau_B \frac{b}{v^2} + r, \tag{18}$$

[*dans laquelle* b *et* τ_B *sont des constantes* $\left(b = 0{\cdot}722 \frac{cm^3}{g}, \tau_B = 826\right)$ *et* r *une fonction, qui pour* $T > T_2 > T_k$ *égale* **0**, *pour* $T < T_1 < T_k$ *égale 8·0 atm.*] *concorde avec l'expérience dans les environs des points marquants des isothermes supérieurs à la critique („1" et „2"), détermine correctement la courbe de la tension des vapeurs saturées et les points de condensation des isothermes inférieures à la critique, et détermine la déplacement du point critique d'accord avec la formule empirique la plus exacte — mais il est nécessaire de donner au paramètre* τ *des valeurs différentes de* T, *comme l'indique la fig. 2.*

Dans l'intervalle de T_1 jusque à T_2 il est évident que r a la signification d'une fonction troublante inconnue, qui déforme l'isotherme; on peut donner à sa valeur constante au-dessous de la température T_1 l'importance de la tension superficielle (K dans la formule de Laplace?). En déterminant les constantes de l'équation d'état, on n'a pas jusqu'à present fait attention à la discontinuité de pression, qui est occasionnée par la tension superficielle à la limite des deux phases coexistantes. Nos résultats nous autorisent à penser que la fonction troublante aux environs de la température critique est en étroite connexion avec la formation de membranes superficièlles pendant la refroidissement au dessous du point critique. Ce qui a de l'importance pour la théorie du point critique — qui ofera l'objet de considérations spéciales — c'est la circonstance que la fonction troublante s'exerce jusque sur la plus basse isotherme, laquelle, toute entière — c'est à dire même dans sa partie instable — court au-dessus de l'axe v (pressions positives, partie instable possible).

On peut extrapoler la courbe τ (fig. 2) en supposant que l'équation (14) est aussi applicable aux températures inférieures à 0^0 C (jusqu'à quel point vont les mensurations d'Amagat) et en nous servant des tables établies par J. P. Dalton.[18]) On y trouve établis, d'après la formule de van der Waals, les températures réd. ites, pressions et volumes des phases coexistantes correspondant les uns aux autres (ϑ, π, ω_1, ω_2). On peut employer immédiatement ces tables avec l'équation (18), en prenant

---

[18]) J. P. Kuenen: Eigenschaften der Gase, p. 279.

$\vartheta = \frac{\tau}{\tau_k}$ et $\pi = \frac{p_{12} - r}{p_k'}$. Le τ, indiqué par une croix dans la fig. 2, a été calculé de la façon suivante: Les pressions des vapeurs saturées, d'après J. P. Kuenen et W. G. Robson,[19]) ont été diminuées de $r = 8{\cdot}0$ atm. et la différence divisée par $p_k' = 79{\cdot}0$ atm. Pour le π, ainsi déterminé, on a cherché dans les tables de Dalton le $\vartheta = \frac{\tau}{\tau_k}$ correspondant et l'on a multiplié ce dernier par $\tau_k = 244{\cdot}7$.

En examinant la courbe entière de τ — même si nous n'en prenons la dernière partie extrapolie entre -30^0 et -45^0 qu'avec la plus grande réserve (il n'y a qu'à une température de -30^0 que nous avons constaté que b est constant) — nous voyons que la différence $T - \tau$ croît à mesure que la température s'abaisse et qu'en conséquence pour une certaine $T = T_0$ sera $\tau = 0$ (la courbe coupe l'axe T). L'équation (18)

$$p = \frac{R\tau}{v - b} - R\tau_B \frac{b}{v^2} + r \qquad (18)$$

que l'on peut écrire sous la forme de

$$\left(p + R\tau_B \frac{b}{v^2} - r\right)(v - b) = R\tau, \qquad (19)$$

se réduit, quand $T = T_0$, c'est-à dire $\tau = 0$, à

$$v - b = 0 \qquad \text{où} \qquad v = b \qquad (20)$$

quelle que soit la pression p.

L'équation (20) est évidemment *l'équation d'état pour les liquides idéaux, incompressibles.* Nous eu arrivons à un nouveau résultat:

L'équation (3), le cas échéant l'équation (18), qui *pour de grands* τ ($\doteq T$) *et v devient l'équation des gaz idéaux, devient pour* $T = T_0$ *l'équation des liquides idéaux.*

L'importance de la constante b apparaît ici sous un autre jour. Elle signifie le volume spécifique à la température T_0. En fait, les substances atteignent une densité égale au triple de la densité critique encore à l'état liquide et cela immédiatement avant de se solidifier. Ainsi on trouve

pour CO_2 solide	à $T = 191^0$	$s = 1{\cdot}53$[20])	$3\,s_k = 1{\cdot}38$
,, CO_2 liquide	à $T = 213^0$	$s = 1{\cdot}19$	

L'équation de van der Waals employée avec la température individuelle (τ) n'est donc pas en contradiction avec le fait d'expérience que le volume limite des substantes est plus petit que le tiers du volume critique. D'après elle les substantes à une certaine température limite T_0 (très proche du point de congélation?) deviennent des liquides idéaux, incom-

[19]) Phil. Mag. (6) 3 p. 155 (1902).
[20]) Landolt-Börnstein, Phys. Chem. Tab. IV éd. tab. 63.

pressibles, ayant une densité égale à trois fois la densité critique. Cependant, cela ne correspond pas non plus à la réalité, car un liquide est à toute température, quelque peu compressible qu'elle soit, et la température de congélation dépend dans une certaine mesure de la pression. L'équation (18) ne correspond donc aux basses températures avec la réalité qu'autant que l'on peut considérer comme idéal, incompressible, un liquide réel s'approchant de la congélation. L'accord qualitatif est donc ici meilleur que dans le cas limite de l'équation originale de van der Waals.

5. Nous avons parlé en général de quelques résultats obtenus jusqu'à présent bien qu'ils n'aient été confirmés encore que pour une seule substance. Nous avons ainsi agi afin de ne pas troubler le cours de notre exposé par des excursions incessantes. Il s'agit cependant de montrer maitenant que d'autres substances se comportent de la même façon. A cet effet nous avons choisi les mêmes substances que dans notre précédent travail sur le domaine supérieure à la critique, afin que l'on puisse comparer les résultats. Mais les données expérimentales sont ici fragmentaires et nous devrons nous contenter de la confirmation de certains faits pour quelques substances et d'autres faits pour d'autres. En revanche nous rencontrons une démonstration qui probablement se réaliserait pour le CO_2 à des températures plus basses que celles atteintes par les données expérimentales nécessaires.

Pour *l'éthylène* Cailletet et Mathias[21]) ont trouvé

pour	$t =$	$-\ 21{\cdot}0^0$ C	$-\ 3{\cdot}7^0$ C	$+\ 4{\cdot}3^0$ C	$+\ 6{\cdot}2^0$ C
,,	$s_1 =$	0·414	0·353	0·332	0·310

et ils ont établi pour s_2, dans l'intervalle de $+\ 8{\cdot}9^0$ C jùsqu'à $-\ 30^0$ la formule empirique suivante:

$$s_2 = 0{\cdot}1929 - 0{\cdot}00188\,t - 0{\cdot}0346\,\sqrt{9{\cdot}2 - t},$$

d'après laquelle aux témpératures ci-dessus correspond

$$s_2 = 0{\cdot}0421 \qquad 0{\cdot}0756 \qquad 0{\cdot}1110 \qquad 0{\cdot}1237.$$

D'après les équations (6^b) et (12), nous avons pour

$-\ 21{\cdot}0^0$	$b = 1{\cdot}61$	$\dfrac{\tau}{\tau_B} = 0{\cdot}2286 < \dfrac{1}{4}$
$-\ 3{\cdot}7^0$	$b = 1{\cdot}64$	$\dfrac{\tau}{\tau_B} = 0{\cdot}2595 > \dfrac{1}{4}$.

Les autres températures sont encore trop près de la critique pour qu'on puisse déterminer b avec une exactitude suffisante pour les raisons exposées à la page.

En prenant CO_2 comme analogie, nous devons penser que la température $-\ 3{\cdot}7^0$ C $= 269{\cdot}4$ absolue est plus grande que T_1, c'est à dire qu'elle est située dans l'intervalle où se fait sentir encore l'effet de la fonction

[21]) Journal de Physique (2) 5, p. 553 (1886).

troublante $\left(\tau > \frac{\tau_B}{4}\ !\right)$, tandisque la température $-\ 21{\cdot}0^0$ C $= 252{\cdot}1$ absol. est plus petite que T_1 $\left(\tau < \frac{\tau_B}{4}\right)$; b dans ses environs doit être constant et correspondant à b des isothermes supérieures à la critique. Et, en fait, en le calculant sur l'unité d'Amagat, d'après l'équation (11), nous obtenons:

$$b_A = b\ .\ s_9 = 1{\cdot}61 \times 0{\cdot}001252^{22}) = 0{\cdot}00201\,;$$

déjà[23]) nous avons trouvé que b dans l'intervalle de $+\ 30^0$ à $+\ 198{\cdot}5^0$ C est situé entre 0·00197 et 0·00200. (Voir fig. 2 dans laquelle les b supérieurs à la critique sont calculée sur le volume spécifique.)

Il n'existe pas d'autres données expérimentales dont nous puissions nous servir.

Pour *l'azote*, on a mesuré les densités de condensation pour un nombre considérable de basses températures dans le laboratoire de Leiden. Nous les avons marquées dans les colonnes 2 et 3 de la table no 3, d'après le rapport de E. Mathias[24]) et nous nous en sommes servi dans d'autres colonnes pour calculer b d'après l'équation (6^b). Leur dépendance de la température est indiquée par la fig. no 1, dans laquelle nous avons aussi marqué la température critique et la température à laquelle correspond $\tau = \frac{\tau_B}{4}$ (la température T_1). C'est environ celle du $-\ 157^0$, comme il ressort de la colonne 5 de la table no 3, dans laquelle $\frac{\tau}{\tau_B}$ est déterminé d'après l'équation (12). En outre, on trouve marqués dans la fig. no 1 les b, calculés sur le volume spécifique, déterminés déjà dans notre analyse des isothermes supérieurs à la critique.

Tab. no 3. N_2

t	s_1	s_2	b	$\frac{\tau}{\tau_B}$
1	2	3	4	5
— 208·36	0·8622	0·00089	1·015	.
— 205·45	0·8499	0·00136	1·020	.
— 200·43	0·8265	0·00278	1·027	.
— 195·09	0·8043	0·00490	1·035	.
— 182·51	0·7433	0·01558	1·052	.
— 173·73	0·6922	0·02962	1·065	.
— 161·20	0·6071	0·06987	1·075	0·2339
— 153·65	0·5332	0·1177	1·076	0·2608
— 149·75	0·4799	0·1638	1·064	.

[22]) Landolt-Börnstein, Phys. Chem. Tab. IV éd. 1912, tab. 104.

[23]) I., p. 4.

[24]) Recueil en l'honneur de H. Kamerlingh Onnes, p. 179. Leiden 1922.

Il résulte du graphique que N_2 se comporte de la même façon que CO_2. Immédiatement au-dessous de la température critique b n'est plus constant, bien qu'il devienne constant, quoique d'une manière peu durable, aux environs de la température à laquelle correspond $\tau = \frac{\tau_B}{4}$. Il serait nécessaire de connaître davantage de points de condensation entre — 155° et — 170° C pour pouvoir constater à partir de quelle température il cesse d'être constant, pour descendre ensuite de façon presque complétement linéaire à mesure que la température décroît (voir fig. no 1, où 1 % = 5 *mm*!) De même, il serait nécessaire de connaître les points de condensation de CO_2 pour les températures au-dessous de — 35°, pour qu' il soit possible de constater s'il se produit une semblable décroissance aux basses températures. Cependant il est permis de dire que, *dans l'intervalle qui s'étend entre T_k jusqu'à une certaine température au-dessous de la critique, les deux substances se comportent de la même façon* et cela dans les environs des températures correspondantes $\left(\tau = \frac{\tau_B}{4}\right)$. Cela apparaît encore mieux si nous calculons la *constante* b d'après l'équation (11)

$$b_A = b \,.\, s_0 = 1{\cdot}075 \times 0{\cdot}0012514^{25}) = 0{\cdot}001345$$

et si nous comparons ce dernier chiffre avec la valeur trouvée en faisant l'analyse des isothermes superieures à la critique[26])

$$b_A = 0{\cdot}00135 \pm {}^3/_4\,\%.$$

Ils sont d'accord.

Et puisque nous avons pour N_2 au moins deux températures dans l'intervalle où b est constant, nous pouvons essayer de voir si dans cet intervalle on peut arriver à exprimer la pression des vapeurs saturées de la même façon que pour CO_2. D'après l'equation (9) nous avons

pour — 161·20° C	$x = 0{\cdot}01241$
,, — 153·65° C	$x = 0{\cdot}02021$

et les pressions correspondantes 16·04 atm. et 24·13 atm.[27])

à — 161·20° C	$p_{12} = 1040\,x + 3{\cdot}1 = 16{\cdot}0$
à — 153·65° C	$p_{12} = 1040\,x + 3{\cdot}1 = 24{\cdot}1.$

Ainsi donc ici aussi p_{12} est une fonction linéaire de x sous la forme (10), c'est à dirè que

$$R\,\tau_B = 1040.$$

Et puisque pour N_2

$$R = \frac{22.412}{273{\cdot}09\,.\,M} = \frac{82{\cdot}068}{28{\cdot}02}$$

[25]) Voir [22]).

[26]) I., p. 5.

[27]) W. H. Keesom: Recueil de H. K. Onnes p. 124 et 125. Leiden 1922.

il résulte que

$$\tau_B = 355.$$

Quant à la signification de la circonstance que b, constante dans un certain domaine inférieur à la critique, s'abaisse plus tard proportionnellement à la température, nous en parlerons dans la conclusion.

Pour *l'oxygène* nous observons en somme le même processus que pour l'azote bien que moins clairement marqué. La table no 4 a été dressée de la même façon que la table no 3 et nous avons également pris, même ici, pour base du calcul le même rapport de Mathias.[24]) La température individuelle étant $\tau = \frac{\tau_B}{4}$ (— 129·9° C), la valeur de b est

$$b = 0{\cdot}7810 \frac{cm^3}{g},$$

qui, calculée d'après l'équation, (11) donne

$$b_A = b \,.\, s_0 = 0{\cdot}7810 \times 0{\cdot}0014296^{28}) = 0{\cdot}001115,$$

en concordance avec notre résultat autérieur $b_A = 0{\cdot}00111$.[29])

Puisqu'ici nous n'avons pas de second point qui serait sûrement situé dans l'intervalle des b constants, nous ne pouvons essayer l'équation de la tension des vapeurs saturées.

Aussi *l'isopentane* [table no 5 d'après les mesures de Young[30])] présente — comme il ressort de la fig. no 1 — des particularités semblables à celles de l'azote. Au-dessous de la température critique, b oscille d'abord irrégulièrement, puis, dans les environs de la température individuelle égale à $\frac{\tau_B}{4}$, il demeure constant, ensuite s'abaisse proportiennellement à la température. Dans la fig. no 1 nous avons marqué aussi b déterminé déjà[31]) par la méthode du point „2" dans le voisinage de la température critique.

Tab. no 4. O_2

t	s_1	s_2	b	$\frac{\tau}{\tau_B}$
1	2	3	4	5
— 210·4°	1·2746	0·0001	0·7122	.
— 182·0°	1·1415	0·0051	0·7372	.
— 154·51°	0·9758	0·0385	0·7624	.
— 140·2°	0·8741	0·0805	0·7721	.
— 129·9°	0·7781	0·1320	0·7810	0·2501
— 123·3°	0·6779	0·2022	0·7832	0·2721

[28]) Voir [22]).

[29]) I., pag. 5.

[30]) Zeitschrift für phys. Chemie 29, pag. 193 (1899).

[31]) I., pag. 9.

Tab. no 5. Isopentan

t	s_1	s_2	b	$\frac{\tau}{\tau_B}$
1	2	3	4	5
10°	0·6295	0·0016	1·360	.
20°	6196	24	1·365	.
30°	6092	33	1·372	.
40°	5988	35	1·3785	.
50°	5881	60	1·385	.
60°	5769	78	1·391	.
70°	5656	0·0101	1·3965	.
80°	5540	128	1·402	.
90°	5413	162	1·408	.
100°	5278	203	1·414	.
10°	5140	251	1·418	.
20°	4991	311	1·4225	.
30°	4826	383	1·4275	.
40°	4624	473	1·433	.
50°	4445	583	1·436	0·2394
60°	4206	729	1·438	0·2510
70°	3914	932	1·4385	0·2638
76°	3694	0·1103	1·435	.
80°	3498	1258	1·437	.
183°	3311	1422	1·431	.

Il faut encore attirer l'attention sur le fait que ces substances, elles aussi, atteignent une densité égale au triple de la densité critique encore à l'état de liquide. C'est[32])

pour N_2 solide à $T = 20{\cdot}5^0$ $s = 1{\cdot}0265$
liquide à $T = 62{\cdot}5^0$ $s = 0{\cdot}8792$ $\quad 3\,s_k = \frac{1}{b} = 0{\cdot}930$,

pour O_2 solide à $T = 21{\cdot}5^0$ $s = 1{\cdot}4256$
liquide à $T = 62{\cdot}6^0$ $s = 1{\cdot}2746$ $\quad 3\,s_k = \frac{1}{b} = 1{\cdot}280$;

pour l'isopentan liquide à $T = 20{\cdot}3^0$ $s = 0{\cdot}704$[33]) $\quad 3\,s_k = \frac{1}{b} = 0{\cdot}695$.

Pour *l'hydrogène,* il y a deux séries d'expériences[24]) faites en 1913 et 1921 pour déterminer les points de condensation (voir table no 6 et fig. no 1). Les plus récentes s'occupent de l'intervalle dans lequel est situé $\tau = \frac{\tau_B}{4}$. Il résulte de la fig. no 1 que la dépendance de b de la tempé-

[32]) Landolt-Börnstein, Phys. Chem. Tab. IV éd 1912, tab. no 63.

[33]) Calculée d'après Seitz, Alterthum et Lechner: Annalen der Physik [4] 49, p. 85 (1916).

rature est pour cette substance différente que pour les autres: b pour les températures allant jusqu'à $\frac{\tau_B}{4}$ *diminue* proportionnellement à la température, à partier de $\frac{\tau_B}{4}$ jusqu'à T_k sa ligne est irrégulière, en conformité avec les résultats précédents. Il semble que, pour H_2, b diminue sans cesse même dans le domaine supérieur à la critique. Cela confirme les valeurs trouvées[34]) pour b par la méthode des points „2" à des températures $0{\cdot}0^0$, $+ 15{\cdot}4^0$ et $47{\cdot}3^0$ C

$$b = 0{\cdot}00062 \text{ jusqu'à } 0{\cdot}00064.$$

(Dans la fig. no 1, la droite pointillée prend une direction telle que à $47{\cdot}3^0$ C elle atteint ces valeurs.) Seulement pour l'hydrogène ce b n'etait pas égal à $\frac{v_k}{3}$, mais beaucoup plus petit.

Tab. no 6. H_2

t	s_1	s_2	b	$\frac{\tau}{\tau_B}$
1	2	3	4	5
— 258·27⁰	0·07631	0·00020	11·208	.
— 257·23⁰	7538	31	11·195	.
— 256·75⁰	4594	38	11·183	
— 255·99⁰	7421	49	11·18	.
— 255·19⁰	7344	64	11·16	.
— 253·76⁰	7192	0·00101	11·14	.
— 253·24⁰	7137	116	11·135	.
— 252·68⁰	7081	135	11·11	.
— 249·83⁰	6724	254	11·12	0·1903
— 247·73⁰	6416	405	11·05	0·2095
— 245·73⁰	6050	613	11·00	0·2286
— 244·30⁰	5740	806	10·98	0·2422
— 243·03⁰	5402	0·01081	10·86	0·2569
— 241·83⁰	5001	1366	10·88	.
— 240·57⁰	4316	1922	10·86	.

6. En terminant il faut souligner la raison qui fait que les résultats, auxquels nous sommes arrivés en comparant l'équation de van der Waals avec les données de l'expérience, sont complétement différents de ceux obtenus jusqu'à présent. Cette raison c'est que jusqu'à présent on a recherché la dépendance des constantes a et b de la température d'après

[34]) I., pag. 5.

les rapports qui n'exprimaient pas les qualités particulières des isothermes. Ainsi, par exemple, on peut écrire:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \frac{R}{v-b} \tag{21}$$

mais seulement en supposant que a aussi bien que b dans l'équation (1) sont indépendants de la température et que RT (R étant constant) exprime exactement la dépendance de la température. Si une série d'auteurs[35]) ont trouvé que $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$ (déterminé experimentalement) était variable avec la température, quoique, b étant constants il devrait être d'après l'équation (21) également constant, il n'est pas démontré par là que l'équation à un b constant ne pourrait pas correspondre à l'expérience. Car lorsque $a = f(T)$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \frac{R}{v-b} - \frac{1}{v^2}\frac{da}{dT}.$$

Cette équation serait encore plus compliquée, si nous admettions d'abord la possibilité que $\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-b)$ est une certaine fonction de T inconue d'avance. Par une comparaison donc de l'équation (21) avec l'expérience, il appert seulement que a et b ne peuvent pas être en même temps constantes et membre énergitique égal à RT, mais rien de positif n'est demontré par la.

En faisant une analyse conséquente, il est nécessaire d'éprouver la dépendance d'une certaine constante (b) sans faire aucune supposition sur une autre constante ou paramètre. Dans notre façon de procéder nous n'avons exclu d'avance aucune correction possible de l'équation de van der Waals par suite de l'introduction de quelque autre dépendance de la température.

Comme il a été déjà[36]) indiqué, il faut encore prêter une autre signification au résultat obtenu, d'après lequel, b et a étant constantes, on peut arriver à faire accorder l'équation (1) avec l'expérience eu y introduisant, au lieu de T, une certaine fonction de la température absolue τ (marquée pour CO_2 dans la fig. 2). On peut en effet corriger le membre RT de façon à conserver T et pour chaque isotherme nous mettons, à la place de R absolue $\mathfrak{R}$ individuel (dépendant de la substance et de la température) de sorte que

$$\mathfrak{R}T = R\tau.$$

Cet $\mathfrak{R}$ diminuerait en même temps que la température. Si dans l'équation (1) v indique le volume spécifique $\left(\frac{cm^3}{g}\right)$ et p la pression en atmosphères, alors

---

[35]) J. P. Kuenen: Eigenschaften der Gase, pag. 248.

[36]) „Rozpravy České Akademie", Roč. XXXII. Tř. II., čís. 7 (1923).

$$R = \frac{22.412}{273{\cdot}09\,.\,M} = \frac{82{\cdot}068}{M} = \frac{H}{M}. \qquad (16)$$

Il est de même possible d'écrire

$$\Re = \frac{H}{m},$$

ou H est constante absolue (= 82·068) et m un nombre choisi de façon que

$$\frac{H}{m}\,.\,T = R\,\tau \quad \text{c'est-à-dire} \quad m = \frac{H}{R}\,.\,\frac{T}{\tau}$$

$$m = M\,.\,\frac{T}{\tau}.$$

Il est évident que m croît à mesure que la température diminue. La fusion du produit de deux variables $\Re$ et T $\left(\text{resp. } \frac{1}{m}\,.\,T\right)$ en une seule et l'introduction de la notion de témperature individuelle rendirent possible l'emploi direct de toute théorie bien connu de l'équation de van der Waals, que ce n'ait pas éte là seulement une simplification de forme, c'est ce que montreront les considérations théoriques au sujet de l'énergie kinétique du gaz comprimé, auxquelles la présente analyse voudrait donner une base solide.

A la deuxième possibilité (d'après ce qui a été dit), on peut donner cette importance: à mesure que la température s'abaisse l'association des molécules augmente et par là aussi le poids moléculaire. C'est ce qu'a fait A. Brandt[37]) dans un travail récemment publié, mais d'une manière qui n'apporte aucune connaissance nouvelle. Car supposer sans raison que a et b sont constantes, choisir pour elles une valeur *arbitraire* (son $b = 0{\cdot}78\frac{cm^3}{g}$ et son a pour CO_2 correspond à $\tau_B = 875$) et ensuite pour chaque température et pour chaque volume donner à m une valeur telle qu'il en résulte exactement le p expérimental — c'est ce qu'on peut taujours faire mais on ne prouve pas par là ni la valeur de l'équation d'état emplyée, ni l'autorisation de la théorie de l'association.

Il semble cependant que la courbe de τ dans la fig. 2 est vraiement en étroite connexion avec la courbe d'association et que ces differénces que présente encore l'équation de van der Waals après correction sous la forme (18) soit une vraie contribution à la théorie de l'association. Ce qui en témoigne, c'est le changement subit de la constante b dans le domaine inférieur à la critique, par exemple pour N_2, ainsi que la régularité avec laquelle b diminue ensuite à mesure que la température s'abaisse.

---

[37]) A. Brandt: Annalen der Physik [4] 73, p. 415, Februar 1924.

Découvertes nouvelles dans le silurien inférérieur $d\,\alpha$ ($D\,d_1\,\alpha$) en Bohême.

Par

C. KLOUČEK, Prague.

Présenté dans la séance du 24 octobre 1924.

Le gisement de minerai „Ouzký“, près de Holoubkov, situé à plus de 60 *km* au sud-ouest de Prague, dont la faune (brachiopodes et cystidées) publiée par Barrande dans son ouvrage „Système silurien . . .“ a été considérée jusqu'à maintenant comme appartenant infailliblement au $d\,\beta$ ($D\,d$, β), quoique ses minerais de fer, siliceux ou non oolithiques, différassent du minerai typique du $d\,\beta$ et que, jusqu'à nos jours, la faune de Ouzký n'ait jasais été trouvée dans aucun endroit du $d\,\beta$.

C'est là ce qui eveilla les doutes de l'auteur quant aux assertions qui prétendaient que le gisement d'Ouzký appartient au $d\,\beta$ et il examina, dans le courant de l'année, les débris de roches d'anciennes haldes de minerai à Ouzký sur lesquels le géologue D. N. Andrusov avait attiré son attention.

Le résultat fut surprenant, car l'auteur y découvrit la faune *Euloma Niobe* (Trémadoc) tout comme en 1914 dans le $d\,\alpha^2$ près de Olešná (à 9 *km* à l'ouest d'Ouzký) et en 1921 près de *Úvaly* (à 23 *km* à l'est de Prague et à plus de 80 *km* d'Ouzký) ceci en collaboration avec J. Koliha.

A Ouzký on a trouvé, jusqu'à maintenant, des trilobites là, où autrefois on n'en avait pas du tout trouvé: *Euloma, Apatocephalus,* Olenid n. sp. I., Olenid n. sp. II, puis *Cheirurus, Amphion* (?), *Symphysurus, Hemibarrandia* (?) et un pygidium inconnu à côté de toute une série de brachiopodes, de cystidées et enfin une conularie.

Voilà donc ce qui prouve probablement que le gisement d'Ouzký appartient au $d\,\alpha^2$ ($D\,d\,1\,\alpha$ *moyen*) *et non pas au* $d\,\beta$. En plus l'auteur a décou-

vert, dans le courant de l'année, sur la colline *Bukov* près de Zbiroh dans le sud-ouest de la Bohême, dans les grauwackes à hématite d'anciennes haldes de mines *Obolus* (Lingula) *lamellosus* Barr. et *Lingulella Arachne* Barr. (Lingulella libečovensis Koliha) qui, jusqu'à ce jour, n'étaient connues que provenant d'une unique localité „na Močidle" près de Libečov à plus de 20 *km* à l'ouest de Prague. Le Bukov se trouve à la distance de 40 *km* de Libečov.

Prague, septembre 1924.

Le mésozoique de Belá, dans la région bordière Est du bassin du Turiec en Slovaquie.

Par

ODOLEN KODYM et ALOIS MATĚJKA, Prague.

(Avec une figure dans le texte.)

Présenté le 9 mai 1924.

Au cours des explorations effectuées l'été dernier en vue de dresser la carte géologique du bassin du Turiec, nous avons eu l'occasion de perfectionner notre connaissance de la géologie des contreforts montagneux qui bordent ce bassin. En outre, en beaucoup de lieux, on a pu compléter et corriger les anciennes cartes de la région, qui d'ailleurs datent, sauf les cartes de Vetters[1]) et de Vigh[2]), de l'époque où l'Institut géologique impérial de Vienne commençait à travailler. La carte d'Uhlig[3]) a été complétée dans la partie qui comprend le territoire situé sur la rive gauche du *Váh.* Dans les lignes qui suivent, nous voulons traiter de la structure géologique de la région bordière du bassin du Turiec, située entre *Necpálov* et *Belá,* région qui, comme l'ont prouvé nos explorations, est fort différente de ce qu'on peut lire dans les anciennes descriptions qui sont ainsi considérablement complétées.

Sur les anciennes cartes géologiques était dessinée sur la bordure Est du bassin du Turiec entre *Blatnice* et *Necpálov* de la dolomie de *Choč,* et plus au Nord entre *Necpálov* et *Belá,* des *calcaires marneux néocomiennes.*

D'après les anciennes cartes, le jurassique affleure dans la vallée de Belá seulement au Nord de *Hradiště* (côte 889) comme le note Štúr.[4])

---

[1]) H. Vetters: Beiträge zur Geologie des Zjargebirges und des angrenzenden Teiles der Mala Magura in Oberungarn. Denkschriften d. Akad. d. Wissenschaften, Vienne, vol. LXXXV.

[2]) J. Vigh: Geologische Beobachtungen in den Grenzgebirgen der Comitate Nyitra, Turoč und Trencsén. Jahresbericht d. k. ung. geolog. Reichsanst. f. 1914.

[3]) V. Uhlig: Beiträge zur Geologie des Fatra-Kriván-Gebirges. Denkschriften d. k. Akad. d. Wissensch. Vienne, vol. LXXII.

[4]) D. Štúr: Aufnahmen im Wassergebiet der Waag und Neutra. Jahrbuch d. geol. Reichsanst. Vienne, vol. XI.

La carte indique là des *couches de Kössen.* Les *dolomies* qui affeurent sur la bordure Est du bassin du Turiec, paraissent de la même constitution que d'habitude, c'est-à-dire que ce sont des *dolomies karpatiques de Choč.* Elles vont du gris clair au blanc pur, forment des bancs épais, sont souvent stratifiées d'une manière peu nette, sont très fissurées et donnent naissance à des éboulis acutangulés. Par endroits, elles renferment des calcaires grenus jaunâtres, développés surtout dans le Sud (par exemple près de *Šebestov*). Cependant leur caractère lithologique n'est point uniforme et même ailleurs, des parties dolomitiques et de calcaires purs alternent. Jusqu'à présent, elles ont été considérées toujours comme appartenant au crétacé inférieur et elles ont été classées dans le néocomien, tout comme les autres dolomies karpatiques de Choč.

D'après nos études, elles s'étendent sur la bordure Est du bassin jusqu'à la rive droite de la *Necpálka.* Sur la colline Chelín (côte 727·9) le *mur* des dolomies affleure Ce sont des *calcaires foncés* et même *noirs,* un peu dolomitiques, bitumineux, traversés par des nombreuses veines d'un calcaire blanc, secondaire. Ils sont visiblement en *concordance* avec les dolomies, l'inclinaison et la direction de leurs bancs sont les mêmes que celles des couches dolomitiques. Le contact des deux roches est normal, sans aucune dislocation. Des calcaires semblables se rencontrent encore dans de beaux affleurements situés sur la route menant de la côte 719 au sommet du *Hradiště* (côte 889) et jusqu'à la vallée qui se dirige du village de *Dulice* vers le Sud-Est jusqu'à la dite route. La direction de leurs couches y varie entre h 7—9, leur inclinaison dans la charnière anticlinale est d'un côté vers le Nord-Est, et de l'autre vers le Sud-West.

Il s'agit maintenant de savoir comment classer ces calcaires au point de vue stratigraphique et jusqu'à quel point, leur existence est compatible avec la détermination ancienne de l'âge des dolomies dans leur toit. D'après leur caractère lithologique, nous pouvons surtout les comparer avec le *calcaire de Guttenstein* de l'étage anisien du *triasique moyen.* Ils *sont tout-à-fait* semblables à quelques affleurements de ce calcaire situés dans les montagnes de *Žjar* et dans la région dont la carte géologique a été dréssée par V i g h. Par ce fait, l'opinion d'après laquelle ces dolomies dans toit dateraient du crétacé est naturellement ébranlée et nous trouvons là la première preuve de leur origine triasique. Puisque, sur le bord opposé du bassin du Turiec, Vigh a considéré comme triasiques la plus grande partie des dolomies de Choč il n'y a rien d'étonnant à cela.

Il est remarquable, que déjà en 1877 M. H a n t k e n[5]) avait trouvé dans les calcaires des fossiles démontrant que les dits calcaires ainsi que les dolomies de „Choč" qui les accompagnent datent du trias. A Blatnica, il trouva dans ces couches de nombreuses Gyroporelles. Il est remarquable

---

[5]) H a n t k e n-M i k s a : Adalékok a Karpátok földtani ismeretéhez. Budapest 1877.

que même cette découverte paléontologique si importante ne le décida pas à abandonner l'ancienne hypothèse qui attribuait ces dolomies et ces calcaires à l'infracrétacé, pour les attribuer au trias. La raison en était que dans les Petites Carpathes, on avait trouvé des calcaires analogues avec une faune de Gyroporelles et qu'ils avaient été rangés dans le Crétacé inférieur par suite de leur superposition jugée normale au-dessus des marnes infracrétacées.

Aujourd'hui, après les nouvelles études géologiques affectuées dans les Petites Carpathes,[6]), on a renoncer à attribuer à l'infracrétacé ces calcaires à Gyroporelles de Štúr et Paul, il a été démontré que leur superposition au-dessus des couches infracrétacées est d'ordre tectonique et qu'ils appartiennent au trias. C'est aussi le cas pour les nombreux dépôts de dolomies de Choč dans les chaines situées plus à l'Est et aux environs du bassin du Turiec.

En raison de tout ce que nous avons dit, il faut supposer que les „dolomies de Choč" et les calcaires les accompagnant sur le bord oriental du bassin du Turiec entre Necpálov au Nord et Háj (à l'Est de Štubnianske Teplice) au Sud appartiennent au trias. Toutes les études futures devront s'efforcer de déterminer avec plus de précision leurs relations tectoniques avec les couches avoisinantes. L'étude de H y n i e[7]) est le premier pas dans cette voie.

Si les dolomies dans le mur desquels on trouve ces calcaires foncés sont vraiment triasiques, il faudra naturellement admtetre que leur position au toit des marnes crétacées est tectonique. Mais, en réalité, l'ensemble de ces marnes indiquées sur les cartes anciennes comme appartenant au néocomien, embrasse des roches de différents caractères lithologiques et d'un âge géologique différent. Au surplus, la limite de ces couches vers le paléogène, affleurant aux environs de *Jaseno,* n'a été indiquée que fort approximativement, de manière qu'en réalité les relations entre les roches mésozoïques et paléogènes y sont beaucoup plus compliquées et leur distribution tout différente.

A cause de leur même caractère lithologique, nous pouvous regarder les *calcaires marneux et les marnes* qui se trouvent sur la bordure Est du bassin du Turiec à l'Est de la ligne *Belá, Dulice, Necpálov* et au Nord des couches triasiques, puis dans la vallée de l'affluent de droite du ruisseau de Belá jusqu'en aval du moulin de Belá, comme représentant un seul ensemble de couches. Les couches les plus anciennes de cet ensemble sont des *calcaires dont la couleur varie du gris foncé au noir,* pour la plupart *oolithiques.* Dans leur toit, nous trouvons des *marnes allant du brun foncé au noir* et des

---

[6]) B e c k - V e t t e r s : Zur Geologie der Kleinen Karpathen. Beitr. z. Geol. u. Pal. Österr. Wien Bd. 16.

[7]) O. H y n i e : Montanisticko-geologické poměry rudního obvodu staro-horsko-šaniedolinského na Slovensku. Sborník Stát. geol. ústavu R. Č. S., t. III. 1923.

marnes schisteuses avec des intercalations de *calcaires sableux,* en dalles *du brun foncé au noir.* Ces couches peuvent être regardées comme correspondant aux *argiles liasiques de Gresten.* Dans les régions étudiées récemment aux environs du bassin du Turiec, elles correspondent entièrement aux couches de Gresten décrites par V e t t e r s[8]) en quelques endroits des Monts de Žjar. Celui-ci remarque aussi que là encore, des calcaires oolithiques se trouvent dans ces couches.

Au toit des couches de Gresten et s'en détachant par une transition insensible des *calcaires marneux* clairs, d'un *gris-bleuâtre* ou *jaunâtre, en dalles* avec des plans de couches inégaux et bosselés affleurent, et en se désagrégeant, prennent une couleur bariolée jaune et rouge. Ils correspondent *en partie au liasique supérieur,* en partie, si l'on en juge d'après leur puissance assez considérable, à des horizons supérieurs. A quels horizons appartiennent ces couches, c'est ce qu'on ne pourra déterminer qu'après des études géologiques détaillées et surtout d'après les fossiles de ces couches. Dans les argiles de Gresten, nous avons déjà trouvé des fossiles. Dans les calcaires marneux, on n'a trouvé jusqu'à présent que des fragments d'ammonites. Ces fossiles seront déterminés quand la récolte sera evenue plus ample.

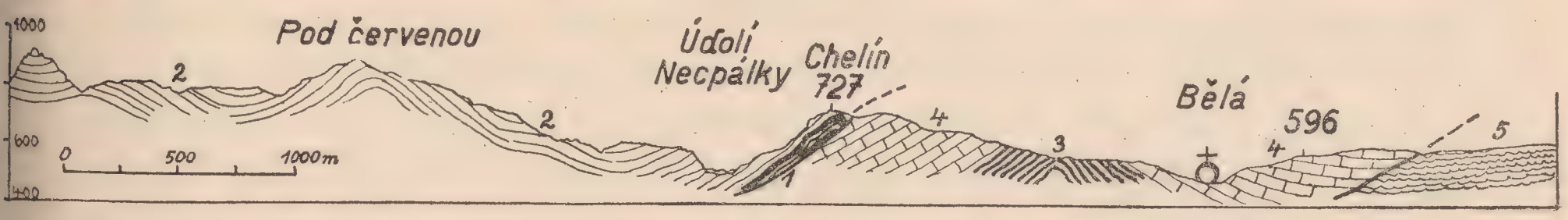


Fig. 1. Coupe de la bordure Est du bassin du Turiec entre Necpálov et Belá.

1. calcaire de Guttenstein, 2. dolomies et calcaires (triasique moyen et supérieur), 3. couches de Gresten, 4. calcaires marneux en dalles (liasique supérieur et jurassique), 5. paléogène.

Les *couches de Gresten* affleurent dans la dite région, dans une bande qui s'étend de l'extrémité Sud-Est du village de *Dulice,* d'abord vers le Sud-Est,puis vers l'Est-Sud-Est jusqu'à la route déjà mentionnée de la côte 719 sur le Hradiště. Leurs couches affleurent dans la charnière anticlinale et leur présence se révèle aussi dans les formes du terrain, car, résistant moins à la désagrégation que les calcaires marneux en dalles du toit, elles forment un vallon dans le terrain. Les couches jurassiques de la vallée du ruisseau, affluent du Nord-Est du ruisseau de Belá, sont toujours des calcaires marneux. A l'extrémité Est du village de Belá, elles ont la direction h 5, l'inclinaison 15^0—25^0 vers le Nord, et elles gardent cette direction presque jusqu'au moulin de Belá. Ce n'est que près de ce dernier qu'elles se tournent vers h 3—4. L'inclinaison continue d'être faible, par endroits, les couches sont faiblement ondulées.

Les marnes crétacées indiquées sur les cartes anciennes à l'Ouest de la ligne *Necpálov, Dulice, Belá* comme formant le contrefort entre la

---

[8]) Voir l. c. 1.

jonction du ruisseau de Belá et de celui de Necpálov n'existent pas en réalité. Ce coin se compose de graviers, d'argiles et d'argiles marneuses du *néogène*.

Le deuxième groupe de l'ensemble des marnes crétacées indiquées sur les cartes anciennes est représenté par les couches situées entre *Zábor, Dolní* et *Horní Jaseno*, affleurant surtout le long des routes de Horní à Dolní Jaseno près de la côte 757. Ce sont des marnes schisteuses et des schistes marneux dont la couleur va du gris foncé au noir, avec des intercalations de calcaires marneux noirs, souvent sableux ou de calcaires marneux bleu foncé. D'après la découverte d'une faune d'ammonites par Štúr on les peut classer dans le *néocomien*. Les couches paléogènes développées en grès à Nummulites les recouvrent en beaucoup d'endroits en transgressivité. La direction de ces couches du crétacé inférieur est le plus souvent h 4—5, des variations fréquentes sont dues surtout à la présence des dislocations. Par endroits, on peut distinguer des plis, anticlinaux et synclinaux secondaires.

Il y a lieu encore de noter la disposition des couches jurassiques qui affleurent au Sud-Est de Belá non seulement par rapport aux couches triasiques mais aussi par rapport aux marnes du crétacé inférieur et au paléogène qui repose en transgression sur lui dans les environs de Jaseno.

La disposition des *couches jurassiques par rapport au triasique* est assurément d'origine *tectonique*. Les observations qui suivent le prouveront: Sur la route située au Nord de la côte 797 (Chelín) vers la côte 719 et le sommet du Hradiště, les calcaires marneux du jurassique confinent d'abord — pour autant qu'on puisse l'observer dans des affleurements favorables — avec les calcaires foncés de Guttenstein, — si l'on s'avance davantage vers l'Est, ce sont les marnes schisteuses de Gresten avec une direction de h 10 qui confinent avec les mêmes calcaires formant un anticlinal, dont l'axe présente la direction d'environ h 7—8. Encore plus à l'Est, les calcaires triasiques confinent de nouveau avec les calcaires marneux du jurassique. Il faut donc présumer une dislocation suivant laquelle les couches plus anciennes du triasique auraient été surélevées au-dessus des couches plus récentes du jurassique. Quelle est sa nature ? est-ce un simple pli-faille ou bien peut-être une dislocation de charriage, les deux couches en contact tectonique sont-elles aussi en rapport stratigraphique, les couches jurassiques appartenant peut-être au toit stratigraphique de l'ensemble triasique — tous ces problèmes ne peuvent être encore résolus, vu l'insuffisance des observations faites jusqu'à présent. Ces problèmes ne seront résolus qu'après des études géologiques plus étendues dans les régions avoisinantes. Mais nous considérons comme fort probable que les calcaires et dolomies triasiques y forment une nappe surélevée au-dessus des autres couches.

Le contact entre les calcaires *jurassiques* et les couches *crétacées* au Nord-Est de Belá est apparemment aussi d'origine *tectonique*. Comme nous l'avons déjà dit, les couches paléogènes les recouvrent à Jaseno en

transgression. D'après nos observations, les calcaires marneux du jurassique (les marnes tachetées) affleurant dans la vallée de l'affluent du Nord-Est du ruisseau de Belá, confinent d'abord avec les couches paléogènes (marnes schisteuses de l'éocène supérieur et de l'oligocène inférieur), plus vers le Nord-Est avec des grès éocènes et sur la pente Nord-Est du Hradiště avec des marnes et calcaires néocomiens. La superposition tectonique du jurassique, aussi bien au-dessus du paléogène que du néocomien, au Nord-Est de Belá ne fait donc pas de doute. Le plan même de la dislocation de nature de pli-faille affleure sur le Hradiště. C'est une zone absolument broyée, composée de sable calcifère et dolomitique, avec de petits grains acutangulés des deux roches. Les calcaires jurassiques au toit de la dislocation sont une brêche, ses fragments broyés sont cimentés par un calcaire secondaire. Là encore les couches plus anciennes du jurassique ont donc été surélevées au-dessus des couches néocomiennes et paléogènes plus récentes. La signification de cette surélevation ne pourra être déterminée qu'à la suite d'études plus approfondies.

Conclusion.

Les résultats obtenus par nos observations faites sur la bordure Est du bassin du Turiec entre Necpálov et Belá peuvent être résumés de la manière suivante: *L'ensemble dolomitique* représenté sur les cartes anciennes comme *dolomie de Choč* d'âge néocomien appartient au *triasique.* A *Necpálov,* des calcaires tout-à-fait semblables aux *calcaires de Guttenstein* affleurent dans son mur. Ces couches ont été *surélevées* au-dessus du jurassique, représenté tantôt par les couches *de Gresten* tantôt par les *calcaires marneux en dalles* quoique nous n'ayons pas encore réussi à prouver l'âge de leurs niveaux supérieurs par la stratigraphie. Les *marnes et les calcaires du crétacé inférieur* affleurent seulement aux environs de *Horní* et *Dolní Jaseno,* où ils sont recouverts *en transgression* par le *paléogène.* Les *couches jurassiques* sont encore séparées d'eux *tectoniquement* et par suite, elles confinent tour à tour avec les schistes paléogènes, les grès éocènes et les marnes néocomiennes.

Janvier 1924.

Service géologique de la république Tchécoslovaque.

Note sur les qualités polaires d'un système des quadriques.

Par

B. PROCHÁZKA.

Présenté dans la séance du 24 octobre 1924.

En étudiant les qualités du système des quadriques, fixé à l'aide de la section plane et du cône tangent, on parvient aux résultats remarquables qui suivent:

1. La courbe polaire est une conique qui — en cas special — peut dégénérer en une série linéaire de points ou en un seul point.

2. La surface-enveloppe des plans polaires est un cône quadratique. En cas spécial il dégénère en un faisceau de rayons ou en un seul plan.

3. Le lieu géométrique des polaires réciproques est un hyperboloïde gauche. Il y a des cas spécials, ou celui-ci dégénère en un cône quadratique ou en un faisceau de rayons de la deuxième classe, ou enfin en un faisceau de rayons.

Résumé de l'article:

Sur les surfaces gauches déterminées par des coniques se coupant en deux points.

Par

DR. JOSEPH KLÍMA.

Présenté le 24 Octobre 1924.

On considère ici des surfaces gauches que déterminent, en tant que *directrices*, d'une part, *deux coniques se coupant* en deux points et, d'autre part, *une droite* ou *une conique*. Dans les cas où les coniques se coupant en deux points passent en circonférences dans les plans parallèles, on se sert des surfaces en question pour déduire les propriétés des trajectoires des points de la bielle dans le système de bielle avec glissière rectiligne (Schubkurbelgetriebe) ou de *trois barres*.

I. La *surface gauche* est déterminée par des *coniques* K_1, K_2 dans les *plans* ϱ_1, ϱ_2 *se coupant* dans les points a, b sur la droite d'intersection $S \equiv (\varrho_1, \varrho_2)$ et par la droite P ayant par rapport à ces points une position générale. Les plans ϱ_1, ϱ_2 comprennent, outre les coniques doubles K_1, K_2, des génératrices joignant les points d'intersection $p_1 \equiv (P\,\varrho_1)$ ou $p_2 \equiv (P\,\varrho_2)$ avec les points a et b; ces dernières sont désignées par $A_1\,B_1$ ou $A_2\,B_2$. Par le point a ou b passe encore une génératrice V^a ou V^b qui est comprise dans le plan τ_a, déterminé, lui, par des tangentes $T_1{}^a$, $T_2{}^a$ construites aux coniques K_1, K_2 au point a ou dans le plan τ_b déterminé par les tangentes $T_1{}^b$, $T_2{}^b$. Cette surface de sixième degré a aux points a, b des *points triples*, dans lesquels les *cônes tangentiels correspondants se décomposent en trois plans*, soit τ_a, $(T_1{}^a\,A_2)$, $(T_2{}^a\,A_1)$ dans le cas de a, soit τ_b, $(T_1{}^b\,B_2)$, $(T_2{}^b\,B_1)$ dans le cas de b.

En déterminant les génératrices passant par les points de la droite double P, on obtient dans le plan ϱ_1, si l'on projette la conique K_2 sur ϱ_1 dans K_2', le groupe ∞^1 de coniques K_2' du système mixte $(a\,b\,T_1\,T_2)$. T_1, T_2 sont des droites d'intersection du plan ϱ_1 avec les plans tangents

à la conique K_2 menés par la droite P. Pour obtenir le degré de la courbe double D de la surface gauche, on déduit, pour le système de coniques $(a\,b\,T_1\,T_2)$, le théorème suivant:

„*Les coniques du système* $(a\,b\,T_1\,T_2)$ *déterminent sur une conique quelconque passant par les points cardinaux* a, b, *les cordes qui enveloppent deux coniques* $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$ *passant par les points d'intersection* $(T_1\,K_1)$, $(T_2\,K_1)$ *et touchant la droite* $\overline{a\,b}$ *au point* r *ou* r_1.“

Les points r et r_1 sont des points doubles de l'involution déterminée sur la droite $S \equiv a\,b$ par les points a, b et par le couple $(S\,T_1)$ $(S\,T_2)$. Un plan quelconque mené par la droite P, comprend deux points de la courbe double et la droite P elle-même comprend aussi deux points, car par le point d'intersection $p_1 \equiv (P\,S_1)$ on peut mener à la conique $\mathfrak{Q}$ deux tangentes. La courbe double D de la surface est donc du *quatrième degré* et de la *première espèce*. La surface comprend *quatre droites torsales* dont les *points cuspidaux* se trouvent sur la *droite double* P aux points de rencontre de celle-là avec les deux cônes pouvant être menées par les coniques K_1, K_2. Si nous désignons les sommets de ces cônes par v_1, v_2, nous voyons que par ces sommets passe aussi la courbe double D, laquelle touche en eux les intersections des deux plans torsaux, tangents au cône correspondant. Ensuite, la surface comprend *quatre droites torsales* dans les plans tangents passant par la droite P à la conique K_2 dont les points cuspidaux se trouvent sur K_1; de même, elle comprend *quatre droites torsales* dans les plans tangents passant par la droite P à la conique K_1. La courbe double D passe par les points de contact de ces plans tangents aux coniques correspondantes et les tangentes menées à elle en ces points sont conjuguées harmoniques des tangentes des coniques par rapport aux deux droites torsales qui passent par ce point-là.

La *courbe double* D est *comprise* sur *l'hyperboloïde* H, déterminé par la droite P et les coniques ${}^1S^2$ et ${}^2S^2$; celles-ci sont, d'après la désignation de *Hirst,* communément inverses à la droite S par rapport aux coniques K_1 (K_2) pour le pôle p_1 (p_2). La section de cet hyperboloïde avec la surface gauche se compose des droites V^a, V^b, P et de la courbe double D. La courbe double passe par les points a et b et les tangentes à elle en ces points sont les intersections des plans tangents $(A_1\,T_2{}^a)$, $(A_2\,T_1{}^a)$ ou bien $(B_1\,T_1{}^b)$, $(B_2\,T_1{}^b)$. L'hyperboloïde H comprend également l'intersection $(\tau_a\,\tau_b)$.

Les plans *deux fois tangents,* déterminés par les génératrices passant par le même point de la droite double P, enveloppent la *surface développable de troisième classe* qui comprend les plans ϱ_1 et ϱ_2. La surface gauche est *de genre* 1.

Position spéciale de la droite P par rapport aux coniques K_1, K_2:

a) La *droite* P *coupe* la *droite* $S \equiv a\,b$ au *point* p. S est une génératrice double. La courbe double D est plane et du troisième degré, elle se trouve dans le plan π déterminé par les polaires P_1 et P_2 du point p par rapport aux coniques K_1 ou K_2. Le plan passant par la droite S coupe cette surface

dans la courbe du quatrième degré qui passe par les points a, b et qui a deux points doubles sur D. *Le cas d'une telle surface gauche a lieu,* p. ex., lorsque l'on déplace dans l'espace la droite V de façon qu'un de ses points m parcourt la circonférence K_1 et l'autre point n la droite P parallèle au plan ϱ_1 de la circonférence K_1. La conique K_2 est ici une courbe à l'infini de cône de révolution, dont les génératrices de surface font avec le plan ϱ_1 un angle constant φ, et où l'on a $\sin \varphi = \frac{v}{\overline{m\,n}}$ (v étant la distance de P à ϱ_1). La projection orthogonale de cette surface sur ϱ_1 montre que la bielle dans le système de bielle avec glissière rectiligne enveloppe une courbe de sixième classe et les trajectoires des points de la bielle sont des courbes circulaires de quatrième degré avec deux points doubles.

b) *Si la droite P passe par le sommet de l'une des deux cônes* passant par les coniques K_1, K_2, p. ex. v_1, dans ce cas, la surface gauche se décompose en un cône 2^0 et en une surface gauche 4^0. Cette surface a, outre la droite double P, encore une conique double D passant par les points a, b et comprise dans un plan conjugué harmonique du plan $(v_1\, a\, b)$ par rapport à ϱ_1 et ϱ_2. La conique D passe par le sommet v_2 et coupe la droite P. Cette surface est du type V d'après la désignation de *Sturm.*

c) *Si la droite P coupe dans le cas précédent la droite* $S \equiv \overline{a\,b}$, il y a formation d'une surface gauche 4^0 pour qui la droite S est une génératrice double. La surface a une autre droite double D qui est l'intersection du plan polaire de la droite P par rapport au cône du sommet v_1 et du plan conjugué harmonique du plan $(a\, b\, v_1)$ par rapport aux plans ϱ_1, ϱ_2. Elle est du type VII.

d) Si *la droite P passe par les deux sommets* v_1, v_2 des cônes passant par les coniques K_1, K_2, la surface se décompose en ces deux cônes 2^0 et les plans τ_a, τ_b.

e) Si *la droite P coupe une des coniques données,* nous obtenons une surface gauche 4^0 du même type que dans le cas *b*).

f) Si *la droite P passe par le point a ou le point b,* nous obtenons une surface gauche de troisième degré. Dans ϱ_1 la génératrice A_1 est l'intersection de ce plan avec le plan $(P\, T_2{}^a)$ et, de même, dans le plan ϱ_2 on a la génératrice A_2 qui se trouve dans le plan $(P\, T_1{}^a)$. On détermine une droite directrice simple.

g) Si *dans le cas précédent la droite P se trouvait dans le plan* τ_a, on obtiendrait un hyperboloïde.

h) *Si P coupe les deux coniques,* on a un hyperboloïde.

i) *Si la droite P est comprise dans le plan* τ_a (τ_b), le plan τ_a disparaît et il ne reste que la surface gauche de cinquième degré ayant en a (b) u point double et en b (a) un point triple. Le point a est le point uniplanaire de la surface avec plan tangent τ_a. L'hyperboloïde **H** se décompose en plan τ_a et en un autre plan δ, conjugué harmonique de la droite S par rapport aux plans τ_b et $(P\, b)$. Le plan δ comprend, outre la génératrice V^b, la

conique double D touchant au point b la ligne d'intersection des plans $(T_1{}^b B_2)$ $(T_2{}^b B_1)$, passe par les points de contact des tangentes menées de p_1 ou de p_2 à la conique K_1 ou K_2 et coupe la droite P. Cette dernière surface est rationnelle.

II. *La surface gauche est déterminée de nouveau par deux coniques* K_1 K_2 se coupant dans les points a, b et par *une troisième conique* K_3 dans le plan ϱ_3 ayant par rapport aux deux premières une position générale. La surface est de douzième degré et les points a et b sont sextuples. Les sommets v_1, v_2 des deux cônes 2^0 passant par les coniques K_1, K_2 sont les points quadruples de la surface. Les plans ϱ_1, ϱ_2 comprennent toujours quatre génératrices joignant les points d'intersection de la conique K_3 et des plans ϱ_1 ou ϱ_2 avec les points a et b; ces génératrices sont désignées par $A_1 A_1' B_1 B_1'$ ou $A_2 A_2' B_2 B_2'$. Le plan ϱ_3 comprend quatre génératrices doubles C, C', C'', C''' qui joignent les points d'intersection des coniques K_1, K_2 avec le plan ϱ_3.

Par le point a (b) passent encore deux génératrices $V_1{}^a$, $V_2{}^a$ $(V_1{}^b, V_2{}^b)$ qui sont comprises dans le plan τ_a (τ_b). Le cône tangentiel dans le point sextuple a se décompose en un plan deux fois compté τ_a et en quatre plans déterminés, d'une part, par la tangente $T_1{}^a$ et les droites A_2, A_2' et, d'autre, par la droite $T_2{}^a$ et les droites A_1, A_1'. La section plane passant par le point a (b) a dans ce point un point sextuple qualifié par le fait que deux branches ont une tangente commune, comprise dans le plan τ_a (τ_b); il faut le compter pour 16 points doubles.

Sur la conique K_3 il y a huit points cuspidaux aux points d'intersection avec les cônes passant par K_1 K_2. Le cône tangentiel dans le point quadruple v_1 se décompose en quatre plans torsaux, qui sont des plans tangents du cône correspondant. Les points cuspidaux sur la conique K_1 se trouvent aux points d'intersection de celle-ci avec la surface développable déterminée par les coniques K_2 et K_3; ils sont au nombre de 12. De même sur K_2 il y a 12 points cuspidaux.

La surface comprend la courbe double D du degré 24 qui coupe chaque génératrice par trois points, par les points a, b elle passe quatre fois et les tangentes en ces points sont des lignes d'intersection des plans tangents en ces mêmes points, exception faite du plan τ_a (τ_b). Un hyperboloïde quelconque passant par les coniques K_1, K_2 coupe cette courbe en 12 points. La courbe D a les points quadruples v_1, v_2 de la surface pour points sextuples et les tangentes en ces points sont les intersections des quatre plans torsaux respectifs. La surface est de genre 1.

Quant aux différentes positions spéciales de la conique K_3 par rapport à K_1 et K_2, voici ce qu'on a envisagé:

a) *La conique* K_3 *coupe* $S \equiv \overline{a\,b}$ *au point* r, S est alors droite double de la surface et les points a et b sont de nouveau sextuples. Le cône de contact au point a se décompose encore en un plan τ_a deux fois compté et en plans ϱ_1, ϱ_2, $(A_1 T_2{}^a)$, $(A_2 T_1{}^a)$. Il en est de même au point b. La

courbe double est du degré 23 et les points a, b sont ses points triples; elle coupe la droite S au point r_1, pour lequel on a $(a\,b\,r\,r_1) = -1$.

b) Si la conique K_3 est dans le plan ϱ_3 passant par la droite S qu'elle coupe dans les points r_1, r_2, la surface a la droite S pour droite quadruple. Les points a, b sont sextuples et le cône de contact se décompose en plans ϱ_1, ϱ_2 deux fois comptés et en plan τ_a (τ_b). La surface a deux génératrices doubles dans le plan ϱ_3 qui sont les intersections de celui-ci avec les plans τ_a et τ_b. La courbe double est du degré 20, elle coupe la droite S à quatre points.

c) Si la conique K_3 passe par le point a (b), la surface gauche est alors du degré 9, elle a au point b (a) un point quadruple et au point a (b) un point quintuple.

d) Si dans *le cas précédent la tangente de la conique K_3 au point a est comprise dans le plan des tangentes des coniques K_1, K_2*, le plan de ces trois tangentes se sépare de la surface, et on obtient une surface gauche de huitième degré, pour laquelle les points a, b sont des points quadruples.

e) Si la conique K_3 passe par les deux points a, b et si sa tangente en a ou en b n'est pas comprise dans le plan des tangentes des coniques K_1, K_2 construites aux mêmes points, la surface gauche formée est de sixième degré.*) Les points a, b sont des points triples de la surface et les cônes tangentiels correspondants se décomposent en plans déterminés par les tangentes aux coniques $K_1\,K_2\,K_3$ construites au point a (b). Le plan ϱ_1 comprend, outre la conique double K_1, des génératrices A_1, B_1 qui sont des lignes d'intersection de ce plan avec les plans $(T_2^a\,T_3^a)$ et $(T_2^b\,T_3^b)$. De même, en ϱ_2 on a les génératrices A_2, B_2, en ϱ_3, A_3, B_3. La droite S n'appartient pas à la surface.

Le point de la courbe double sur une génératrice quelconque V a été déterminé en déterminant, à l'aide des coniques K_1 K_2 et de la génératrice V, un hyperboloïde; sa trace sur ϱ_3 est la conique L^2 qui touche les droites A_3, B_3 aux points a, b et qui coupe K_3, outre le point $v_3 \equiv (V\,K_3)$, encore au point u; la droite passant par lui sur l'hyperboloïde d'un système différent de V détermine sur celui-ci le point de la courbe double D. De là on a déduit:

„La courbe double d'une surface gauche déterminée par trois coniques K_1, K_2, K_3 passant par les mêmes deux points a, b est une courbe plane de troisième degré et du genre 1 dont le plan est déterminé par les pôles p_1, p_2, p_3 de la droite $\overline{a\,b}$ par rapport aux coniques directrices. Cette courbe passe par les points d'intersection de ce plan avec ces coniques, points s_1, s_2, s_3 dans lesquels les droites $\overline{p_2\,p_3}$, $\overline{p_3\,p_1}$, $\overline{p_1\,p_2}$ coupent les plans ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 et par les sommets de six cônes qu'on peut faire passer par les coniques K_1, K_2, K_3.“

*) J. de Wriese et W. Mantel, dans l'article publié 1909 dans les „Wiskundige Opgaven“, année 10, p. 233—236 des géométries analytiques, ont déduit le résultat erronné, c'est que la surface est de *huitième* degré qu'elle a la droite $S = \overline{a\,b}$ pour droite quadruple et les points a, b pour points sextuples.

Chacune des coniques directrices comprend 4 points cuspidaux, points d'intersection avec les deux cônes qu'on peut faire passer par les deux coniques directrices qui restent. La surface est du genre 1.

Un cas spécial de cette surface gauche a lieu également, si l'on déplace dans l'espace une droite P de façon que deux de ses points m, n se déplacent suivant deux circonférences K_1 K_2 dans les plans parallèles ϱ_1 ϱ_2. C'est une surface de sixième degré ayant les points cycliques du plan ϱ_1 pour points triples. Si nous projetons cette surface orthogonale sur ϱ_1 nous obtenons par là le mécanisme de trois barres et la projection V' de la droite V est sa bielle. La bielle enveloppe donc dans ce mécanisme de trois barres une courbe de sixième classe et le point quelconque de la bielle a pour trajectoire une courbe tricirculaire de sixième degré ayant trois points doubles sur la droite qui joint des centres de rotation.

Suivant la position des tangentes des coniques K_1, K_2, K_3 aux points a, b, on peut obtenir des cas spéciaux de cette surface:

α) *Si les tangentes des coniques* K_1, K_2, K_3 *au point a sont dans un même plan* τ_a, dans ce cas le plan τ_a se détache de la surface et il reste une surface gauche du cinquième degré. Le point a est un point double uniplanaire et le plan tangent est τ_a. Le point b est un point triple comme dans le cas général. Il n'y a pas ici de courbe double exceptées, évidemment, les coniques directrices K_1, K_2, K_3. Le plan τ_a comprend, outre deux génératrices A_1, A_2, la courbe de troisième degré qui a au point a un point double et ses tangentes se confondent avec A_1 et A_2. Cette surface est une surface gauche rationnelle.

β) Dans le cas où *même les tangentes aux coniques* K_1, K_2, K_3 *au point b se trouvent dans un même plan* τ_b, le plan τ_b se détache à son tour et il reste une surface de quatrième degré, qui est, elle, un hyperboloïde qu'il faut prendre deux fois par rapport à ses deux systèmes de génératrices.

Obr. 1. Isoklinálně zvrásněné liasové vápence v podloží příkrovu triasových dolomitů na cestě ze Starých Hor do Jelenců. Fotogr. R. Kettner.

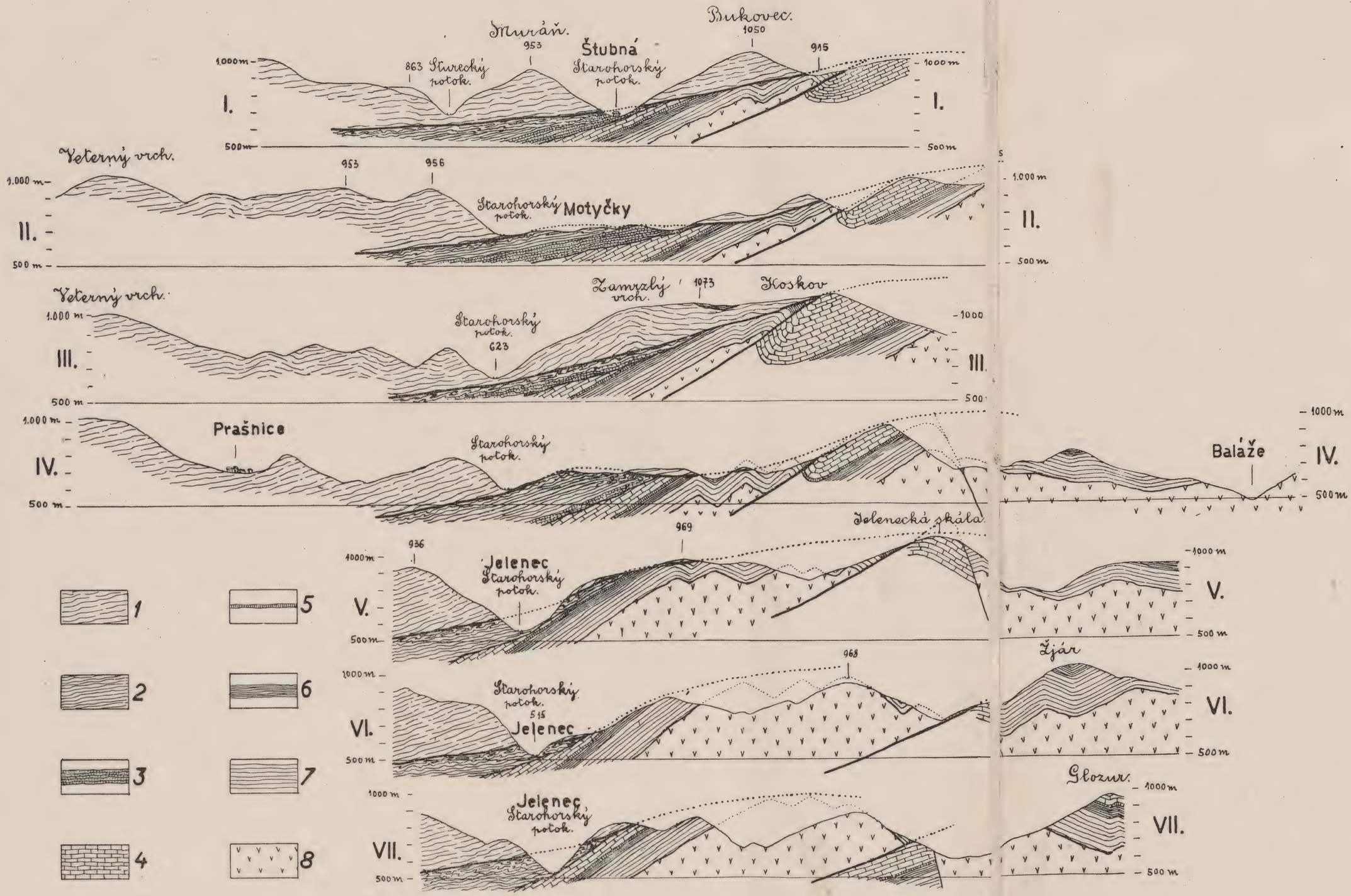
Obr. 2. Kliváž v rhätických břidlicích v podloží příkrovu triasových dolomitů u Motyček. Fotogr. R. Kettner.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Carte géologique des environs de Motyčky et de Jelence en Slovaquie. (Echelle 1 : 50.000.)

Légende: 1. = Dépôts récents; 2. = travertins; 3. = marnes tachetées liasiques; 4. = schistes rouges du Keuper et schistes gris du Rhät; 5. = dolomites triasiques charriés; 6. = calcaires triasiques; 7. = brêche dolomitique du Trias inférieur; 8. = couches rouges du Permien; 9. = grès et conglomérats clairs du Permien; 10. = schistes cristallins (gneiss).

Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême 1924.



Coupes géologiques à travers le territoire étudié.
(Les lignes des coupes sont indiquées dans la carte géologique.) Echelle : 50.000.

Légende: 1. = dolomites triasiques charriés; 2. = marnes tachetées du Lias; 3. = schistes gris du Rhät a schistes rouges du Keuper; 4. = calcaires triasiques; 5. = brêche dolomitique du Trias inférieur; 6. = couches rouges du Permien; 7. = grès et conglomérats clairs du Permien; 8. = gneiss.

Etudes tectoniques dans les environs de Motyčky et de Jelence en Slovaquie.

(Résumé du texte tchèque.)

Par

RADIM KETTNER et **OTA HYNIE** (Prague).

(Avec une carte géologique, des coupes géologiques et deux figures.)

Présenté dans la séance du 24 octobre 1924.

Le territoire étudié, dont la carte géologique est ci-jointe, est situé dans la Slovaquie centrale, 14 km au Nord de la ville de *Báňská Bystrica*. Nous y avons poursuivi les études géologiques dans la contrée située à l'Est de la contrée minière de *Staré Hory* et de *Špania Dolina*. Cette dernière région a été décrite récemment par un de nous (O. H.) dans les publications du Service Géologique de l'Etat Tchécoslovaque[1]).

Les environs de *Motyčky* et de *Jelence* sont intéressants particulièrement par leur tectonique. La partie *sud* du territoire étudié appartient à la *chaîne de montagnes de Staré Hory* qui est constituée par des *gneiss* et une *série permo-mésozoïque* transgressive; la partie *nord* est par excellence une *région dolomitique*. Elle fut attribué par le géologue slovaque D. Štúr au complexe sédimentaire qui forme *la montagne de Revúca*.

La série des dolomites de la partie septentrionale est dénommée dans les anciennes cartes géologiques comme „*dolomie Carpathique*“ et fut attribuée au Néocomien. Parfois on la nomme aussi „*Dolomite de Choč*“. L'attribution de cette série au Néocomien dérivait de sa superposition sur la série des „*marnes tachetées*“ (Fleckenmergel en allemand), également supposée néocomienne.

Néanmoins les études stratigraphiques récentes ont montré que les dolomites de Choč contiennent *une faune triasique*, — donc leur contact avec les marnes tachetées qui forment leur soubassement n'est jamais

[1]) Ota Hynie: La géologie minière de la région métallifère de Staré Hory-Špania Dolina en Slovaquie, Sborník státního geologického ústavu RČS, III., Prague 1923.

normal, mais *toujours tectonique,* les dolomites étant charriés sur les marnes tachetées.

En ce qui concerne les marnes tachetées dans leur intégrité, elles ne peuvent pas être seulement attribuées au Néocomien. Dans les terrains mésozoïques de la Slovaquie la série dite „marnes tachetées" est représentée par une suite puissante de calcaires gris en dalles alternant avec des schistes gris marneux; ce sont les plans des couches de ces schistes qui montrent ordinairement des taches foncées. Cette série extrémement monotone représente *l'intégrité du Jurassique* (en commençant par le Lias moyen) et *du Crétacé inférieur.*

Les marnes tachetées qui affleurent dans les alentours Est de *Staré Hory* sont indiquées sur les anciennes cartes comme Néocomien; pourtant on doit leur attribuer un âge plus ancien ce qui peut être prouvé par leur passage tout-à-fait insensible à la série des *schistes rouges du Keuper* près de *Motyčky.*

Nos recherches montrent que le contact de la série des marnes tachetées avec la dolomie dite carpathique ou bien de Choč est tectonique. Ce contact fut causé par *un charriage* du complex dolomitique par dessus les marnes tachetées suivant une surface à plongement extrêmement doux vers le Nord.

Nous avons toute une série de faits qui affirment cette manière de voir, à savoir:

1. Dans le contact les dolomites sont complètement mylonitisés.

2. Dans le soubassement immédiat de la nappe dolomitique les marnes tachetées sont intensivement déformées en plis couchés (voir fig. Nro. 1.).

3. Le clivage prononcé des couches du soubassement parle de même en faveur d'un chevauchement important (voir fig. Nro. 2.).

4. L'érosion en certains points (p. ex. dans les environs de *Motyčky*) a enlevé l'intégrité de la nappe dolomitique et alors c'est le soubassement autochton qui apparait dans *les fenêtres tectoniques* ainsi formées.

5. Ce sont enfin les travaux techniques d'exploitation de la force hydraulique du *ruisseau de Staré Hory* qui ont apportés des nouvelles preuves en faveur de notre opinion: dans les tunels et les galeries perforés entre *Motyčky* et *Jelence* et aussi entre *Jelence* et *Staré Hory* on peut directement voir le contact anormal des dolomites avec les marnes tachetées.

En examinant notre carte géologique on peut se convincre que ce n'est pas partout que la nappe dolomitique repose sur les marnes tachetées, mais aussi sur des couches plus anciennes. C'est ainsi que dans la fenêtre tectonique de *Motyčky* dans le soubassement des dolomites apparait *le Keuper.* Si nous suivons la limite sud de la nappe dolomitique, nous voyons que c'est surtout sur des *séries d'âge permien* que cette nappe repose. Parfois ce sont des *calcaires triasiques,* ou bien des *gneiss* qui se trouvent dans son soubassement. Toutes ces formations avec le Keuper mentionné

plus haut et la série des marnes tachetées sont les éléments constitutifs *du haut pays de Staré Hory* qui plonge au dessous de la nappe dolomitique charriée du Sud vers le Nord.

Quant aux caractères des détails de la tectonique, ils sont complè tement indépendants dans le complexe du soubassement d'une part, et dans la nappe chariée de l'autre. Ces différences apparaissent d'une manière nette dans la série des coupes ajoutées à ce travail.

Les détails de l'allure tectonique du haut pays de Staré Hory ne diffèrent presque pas de ceux qu'un de nous (O. H.) a décrit à l'Est de notre région dans les environs de *Španí Dolina* et *Staré Hory*. Il est seulement important d'attirer l'attention sur une faille intéressante qui forme la limite nord de la bande des calcaires triasiques s'étendant de *Rychtarová* par la montagne dite *Jelenecká skála* vers *Bukovec*. Suivant cette faille les gneiss et les sédiments permiens ont été charriés par dessus les calcaires triasiques du Nord vers le Sud.

* * *

Récapitulons les résultats de nos recherches! *Nous avons réussi de demontrer que les dolomites de Choč* (on bien de Carpathes) *dans notre terrain* de même comme dans maintes régions avoisinantes *sont toujours charriés, ce qui apporte des nouvelles preuves à l'appui de la structure empilée des Carpathes de la Slovaquie.*

La fonction génératrice pour le nombre d'invariants de trois formes quadratiques ternaires et le système complet de ces invariants.

Par

K. PETR.

Présenté le 7 Novembre 1924.

Le présent article contient une table, qui donne la fonction génératrice pour le nombre d'invariants linéairement indépendants de trois formes quadratiques ternaires. Du résultat donné par la table je tire des conséquences pour le système complet d'invariants de trois formes quadratiques ternaires. Ce système a été déjà traîté par C. Ciamberlini[1]) qui a trouvé, au moyen de la représentation symbolique des formes, un système d'invariants contenant 127 formes. Plus tard Fischer et Mumelter[2]) ont formé un système complet à 184 invariants; mais il y a, dans ce système, plusieurs formes qui sont, à premier coup de vue, réductibles ou identiques avec d'autres formes du système. Pour construire ce système, ils ont employé la méthode de Mertens. Ces recherches ont été reprises par R. Seelig,[3]) qui a montré que par cette même méthode on peut réduire le système à un système de 127 membres, c'est-à-dire au système trouvé par Ciamberlini.

Cependant ni la méthode employée par Ciamberlini, ni celle employée par Fischer-Mumelter et Seelig, ne nous permettent de démontrer que le système complet contenant 127 formes soit irréductible. C'est juste au moyen de la fonction génératrice que cette question peut être examinée. En employant cette méthode et en utilisant les travaux mentionnés tout à-l'heure, je suis arrivé directement au résultat suivant: Le système complet d'invariants contient au moins 121 membres et les autres 6 membres, qui se réduisent au fond à deux, sont très probablement réductibles. Ce point

---

[1]) C. Ciamberlini, Giorn. di mat. XXIV (1886), str. 141.

[2]) E. Fischer und K. Mumelter: Monatsh. f. Math. u. Physik VIII. (1897), str. 97.

[3]) R. Seelig, Monatshefte f. Math. u. Physik XXIX. (1918), str. 255.

exigerait une étude plus profonde des syzygies qui existent entre invariants et qui sont du même degré par rapport aux variables et aux coefficients des formes données que ces 6 invariants. En faisant cette étude on ne rencontrerait plus de difficultés insurmontables, puisqu'on sait que les autres invariants, au nombre 121, sont irréductibles.

I.

La fonction génératrice pour le nombre d'invariants linéairement indépendants de trois formes quadratiques ternaires est fournie par la fraction[4])

$$\frac{\left(\frac{1}{\eta}-\frac{\eta}{\xi}\right)\left(\frac{\eta}{\xi}-\xi\right)\left(\xi-\frac{1}{\eta}\right)}{J\,(\xi,\,\eta)},$$

où $J\,(\xi, \eta)$ signifie le produit de trois expressions dont la première est

$$\left(1-a\,\xi^2\right)\left(1-a\,\frac{\eta^2}{\xi^2}\right)\left(1-a\,\frac{1}{\eta^2}\right)\left(1-a\,\eta\right)\left(1-a\,\frac{\xi}{\eta}\right)\left(1-a\,\frac{1}{\xi}\right)$$

et où l'on obtient les deux autres en substituant la lettre a par b, c. Cette fonction, developpée suivant les puissances des a, b, c, prend la forme

$$\frac{\left(\frac{1}{\eta}-\frac{\eta}{\xi}\right)\left(\frac{\eta}{\xi}-\xi\right)\left(\xi-\frac{1}{\eta}\right)}{J\,(\xi,\,\eta)}=$$

$$=\xi\,\eta\,P\,(\xi,\,\eta)+\frac{\xi}{\eta^2}P\left(\frac{1}{\eta},\frac{\xi}{\eta}\right)+\frac{\eta}{\xi^2}P\left(\frac{\eta}{\xi},\frac{1}{\xi}\right)-$$

$$-\frac{1}{\xi\,\eta}P\left(\frac{1}{\eta},\frac{1}{\xi}\right)-\frac{\xi^2}{\eta}P\left(\xi,\frac{\xi}{\eta}\right)-\frac{\eta^2}{\xi}P\left(\frac{\eta}{\xi},\eta\right).$$

Ici $P\,(\xi, \eta)$ signifie une série entière des variables ξ, η, a, b, c:

$$P\,(\xi,\,\eta)=\Sigma\,A_{i_1,\,i_2,\,i_3,\,j_1,\,j_2}\;.\;a^{i_1}\,b^{i_2}\,c^{i_3}\,\xi^{j_1}\,\eta^{j_2},$$

$$i_1,\;i_2,\;i_3,\;j_1,\;j_2=0,\;1,\;2,\;3,\ldots\ldots$$

Le coefficient $A_{i_1,\,i_2\,i_3,\,j_1,\,j_2}$ représente juste le nombre d'invariants linéairement indépendants qui appartiennent aux trois formes quadratiques a_x^2, b_x^2, c_x^2 et qui ont les degrés i_1, i_2, i_3 par rapport aux coefficients de ces formes et les degrés j_1, j_2 par rapport aux variables $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$. La série $P(\xi,\ \eta)$ peut être exprimée comme une fonction rationnelle des variables ξ, η, a, b, c. Le calcul de cette fonction est assez long. Cependant on peut indiquer plusieurs méthodes qui le rendent plus facile et qui fournissent

---

[4]) Voir mes articles dans les „Rozpravy" XVII., nr. 17, 37 (1908), dans Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême XV. (1910), p. 27 et s.

surtout un contrôle suffisant des résultats. Dans un travail futur j'expliquerai, peut-être, les méthodes par les quelles j'ai calculé la fonction rationnelle exprimant $P(\xi\,\eta)$.

On a alors pour $P(\xi, \eta)$ la relation suivante:

$$P\,(\xi,\,\eta) = \frac{C\,(\xi,\,\eta)}{J\,(\xi,\,\eta)}\,,$$

où $J(\xi, \eta)$ signifie le produit de 22 facteurs qui sont de trois espèces:

1. les facteurs indépendants de ξ, η:

$$(1 - a^3),\ (1 - b^3),\ (1 - c^3),\ (1 - a^2\,b),\ (1 - a^2\,c),\ (1 - a\,b^2),\ (1 - a\,c^2),$$
$$(1 - b^2\,c),\ (1 - b\,c^2),\ (1 - a\,b\,c),$$

2. les facteurs dépendants de ξ:

$$(1 - a\,\xi^2),\ (1 - b\,\xi^2),\ (1 - c\,\xi^2),\ (1 - a^2\,b^2\,\xi^2),\ (1 - a^2\,c^2\,\xi^2),\ (1 - b^2\,c^2\,\xi^2),$$

3. les facteurs dépendants de η:

$$(1 - a^2\,\eta^2),\ (1 - b^2\,\eta^2),\ (1 - c^2\,\eta^2),\ (1 - a\,b\,\eta^2),\ (1 - a\,c\,\eta^2),\ (1 - b\,c\,\eta^2).$$

Le numérateur $C(\xi, \eta)$ est un polynôme du 10^e degré au plus par rapport à chaque variable ξ, η et un polynôme du 13^e degré au plus par rapport à chaque symbole a, b, c. Nous l'écrirons sous la forme

$$C\,(\xi,\,\eta) = \sum_{i,\,k} A_{ik}\,\xi^i\,\eta^k\,,\quad i,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ldots,\ 10,$$

ou sous l'une des deux formes

$$\begin{aligned} C\,(\xi,\,\eta) &= A + B\,\xi + C\,\xi^2 + D\,\xi^3 + \ldots\ldots + K\,\xi^9 + L\,\xi^{10} \\ &= A' + B'\,\eta + C'\,\eta^2 + D'\,\eta^3 + \ldots + K'\,\eta^9 + L'\,\eta^{10}. \end{aligned}$$

Le plus grand commun diviseur du numérateur et du dénominateur est

$$(1 + a\,b\,\xi)\,(1 + a\,c\,\xi)\,(1 + b\,c\,\xi).$$

Dans la première table A, B, C,... (qui sont des polynômes du 10^e degré au plus par rapport à η) sont exprimés par des fonctions symétriques élémentaires de a, b, c; c'est-à dire par des expressions

$$\begin{aligned} A_1 &= a + b + c, \\ A_2 &= a\,b + a\,c + b\,c, \\ u &= a\,b\,c. \end{aligned}$$

Dans la seconde table A', B', C'.... (polynômes du 10^e degré au plus par rapport à ξ) sont donnés comme expressions linéaires des fonctions symétriques (r), $(r,\ s)$, où

$$\begin{aligned} (r) &= a^r + b^r + c^r\,, \qquad (0) = 1, \\ (r,\,s) &= a^r\,b^s + a^s\,b^r + b^r\,c^s + b^s\,c^r + c^r\,a^s + c^s\,a^r\,,\ r \neq s, \\ (r,\ r) &= a^r\,b^r + b^r\,c^r + c^r\,a^r\,, \end{aligned}$$

multipliées par une puissance convenable de $u = a\,b\,c$.

La première table peut servir comme point de départ pour d'autre calculs, par ex. pour le calcul de la fonction génératrice appartenant à quatre formes quadratiques ternaires. La seconde table nous permet aisément de déterminer le nombre d'invariants de degrés donnés linéairement indépendants (appartenant à trois formes quadratiques ternaires).

II.

Pour examiner le système complet d'invariants il nous faut seulement quelques premiers termes de la seconde table et, puisque le système de Ciamberlini et Fischer-Mumelter contient seulement les invariants dont le degré total en $\mathbf{x}$ et $\mathbf{u}$ est plus petit que 4, il suffit de connaître les coefficients A_{ik} pour lesquels $i + k \leqq 3$. Nous traiterons, dans ce qui suit, d'abord les invariants proprement dits (c'est à dire les invariants qui ne dépendent pas de variables), puis les covariants, les contrevariants, et enfin les invariants mixtes (divariants).

Les invariants correspondant aux facteurs du dénominateur occupent une place speciale ; par exemple au facteur $1 - a^3$ correspond un invariant du 3^e degré en coefficients de la forme a_x^2 ; au facteur $1 - a^2\, b^2\, \xi^2$ correspond un covariant qui est du 2^e degré par rapport aux coefficients des formes a_x^2, b_x^2 et du 2^e degré par rapport à la variable $\mathbf{x}$. Nous appelerons *invariants fondamentaux* les invariants qui correrpondent aux facteurs du dénominateur. *Il y a, en tout, vingt invariants fondamentaux.* Si nous désignons par $(a^\lambda\, b^\mu\, c^\nu\, \mathbf{x}^r\, \mathbf{u}^q)$ l'invariant, qui est du degré λ, μ, ν par rapport aux coefficients des formes a_x^3, b_x^3, c_x^3 et du degré p, q par rapport aux variables $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ (s'il y en a plusieurs, nous les distinguons par l'index ajouté au crochet), nous aurons comme invariants fondamentaux ces invariants:

1. dix invariants (a^3), (b^3), (c^3), $(a^2\, b)$, $(a^2\, c)$, $(a\, b^2)$, $(a\, c^2)$, $(b^2\, c)$, $(b\, c^2)$, $(a\, b\, c)$,
2. six covariants $(a\, \mathbf{x}^2)$, $(b\, \mathbf{x}^2)$, $(c\, \mathbf{x}^2)$, $(a^2\, b^2\, \mathbf{x}^2)$, $(a^2\, c^2\, \mathbf{x}^2)$, $(b^2\, c^2\, \mathbf{x}^2)$,
3. six contrevariants $(a^2\, \mathbf{u}^2)$, $(b^2\, \mathbf{u}^2)$, $(c^2\, \mathbf{u}^2)$, $(a\, b\, \mathbf{u}^2)$, $(a\, c\, \mathbf{u}^2)$, $(b\, c\, \mathbf{u}^2)$.

Ces 22 invariants sont très bien connus; on en trouve 21 dans le système complet d'invariants d'une ou de deux formes quadratiques ternaires.

Nous examinerons maintenant les invariants correspondant aux termes du numérateur.

I. Les invariants proprement dits. Ce sont les termes du numérateur contenus dans le coefficient A_{00} qui correspondent aux invariants proprement dits. On a pour ce coefficient

$$A_{00} = 1 + u^2 + u^4 = 1 + a^2\, b^2\, c^2 + a^4\, b^4\, c^4.$$

On voit de cette expression, qu'il y a, à côté des invariants proprement dits fondamentaux au nombre de dix, au moin un invariant $(a^2\, b^2\, c^2)$ correspondant au terme u^2.

Nous pouvons prendre pour cet invariant le combinant du 2^e degré par rapport aux coefficients de chaque forme donnée. Comme on peut conclure de recherches antérieures (Ciamberlini etc.) qu'il n'y a, dans le système complet, plus de 11 invariants proprement dits, il s'ensuit que les 10 invariants fondamentaux et le combinant $(a^2\,b^2\,c^2)$ forment le système complet d'invariants proprement dits de trois formes quadratiques, qui est irréductible. Puisqu' on trouve dans A_{00} à côté des termes 1, u^2 seulement le terme $u^4 = a^4\,b^4\,c^4$, qui ne peut correspondre qu'au carré de l'invariant $(a^2\,b^2\,c^2)$, on peut énoncer le théorème: *Tous les invariants proprement* dits (rationnels et entiers) *de trois formes quadratiques ternaires sont exprimables sous la forme*

$$J_0 + J_1 \,.\, (a^2\,b^2\,c^2) + J_2\,(a^2\,b^2\,c^2)^2,$$

où J_0, J_1, J_2 *sont des fonctions rationnelles entières de dix invariants propr. d. fondamentaux.* Il s'ensuit pour le cas special de l'invariant $(a^2\,b^2\,c^2)^3$ que le combinant $(a^2\,b^2\,c^2)$ satisfait à l'équation du 3^e degré

$$(a^2\,b^2\,c^2)^3 + I_2\,(a^2\,b^2\,c^2) + I_3 = 0,$$

où I_2, I_3 sont des combinants qu'on peut exprimer comme des fonctions rationnelles entières de dix invariants pr. d. fondamentaux du degré 4 et 6 par rapport aux coeff. de chacune de trois formes données.

II. Covariants. Pour ce cas il suffit d'examiner la partie suivante du numérateur.

$$[(u + u^2)\,(1,\,1) + u\,.\,(2)]\,\xi + [(u + u^3 - u^4)\,(1) - u^4\,.\,(2,\,2)]\,\xi^2 + [(u + u^2 - \\ - 5\,u^3) + (u - 2\,u^2 - u^3)\,(2,\,1) + (1 - u - u^2)\,(3,\,3) - u\,.\,(4,\,2)]\,\xi^3.$$

Il suit de l'existence des termes: $u\,.\,(1,\,1)\,.\,\xi = \Sigma\,a^2\,b^2\,c\,.\,\xi$ et $u\,.\,(2)\,.\,\xi = \Sigma\,a^3\,b\,c\,.\,\xi$ qu'il existe de chacun des types représentés par les symboles

$$(a^2\,b^2\,c\,\mathbf{x}),\ (a^2\,b\,c^2\,\mathbf{x}),\ (a\,b^2\,c^2\,\mathbf{x}),\ (a^3\,b\,c\,\mathbf{x}),\ (a\,b^3\,c\,\mathbf{x}),\ (a\,b\,c^3\,\mathbf{x})\ .$$

un covariant (linéaire) *et un seul.* On peut conclure, de plus, de l'existence du terme $u^2\,(1,\,1)$ qu'il existe de chacun des types

$$(a^2\,b^3\,c^3\,\mathbf{x}),\ (a^3\,b^2\,c^3\,\mathbf{x}),\ (a^3\,b^3\,c^2\,\mathbf{x})$$

au moins un covariant linéaire. En ce cas il est possible qu'il y en ait plusieurs — par exemple qu'il y en ait p du type $(a^2\,b^3\,c^3\,\mathbf{x})$, mais pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'il existe entre les six covariants linéaires correspondant aux termes $u\,(1,\,1)$, $u\,(2)$ des syzygies au nombre $p - 1$, des degrés 2, 3, 3 par rapport aux coefficients (et du degré 1 par rapport à la variable $\mathbf{x}$). Nous désignerons une telle syzygie par le symbole $[a^2\,b^3\,c^3\,\mathbf{x}]$ muni d'un index au cas où plusieurs syzygies de cette sorte existaient. D'après les travaux antérieurs (Ciamberlini) il existe *au plus un* covariant irréductible du type $(a^2\,b^3\,c^3\,\mathbf{x})$ et, par conséquent, il n'y a pas de syzygies

du type $[a^2\, b^3\, c^3\, \mathbf{x}]$ et on a en tout 9 covariants linéaires comme système complet de covariants linéaires qui sont tous irréductibles.

Il suit de la même manière du terme $u\,.\,(1)\,.\,\xi^2$, qu'il existe pour chacun des types

$$(a^2\, b\, c\, \mathbf{x}^2),\ (a\, b^2\, c\, \mathbf{x}^2),\ (a\, b\, c^2\, \mathbf{x}^2)$$

un covariant et un seul. Le terme $u^3\,.\,(1)\,.\,\xi^2$ correspond aux produits

$$(a^2\, b^2\, c^2)\,.\,(a^2\, b\, c\, \mathbf{x}^2),\ (a^2\, b^2\, c^2)\,.\,(a\, b^2\, c\, \mathbf{x}^2),\ (a^2\, b^2\, c^2)\,(a\, b\, c^2\, \mathbf{x}^2).$$

L'existence des termes $-\,u^4\,.\,(1)\,.\,\xi^2 - u^4\,.\,(2,\ 2)\,\xi^2$ montre que les syzygies des types

$$[a^5\, b^4\, c^4\, \mathbf{x}^2],\ldots\ldots,\ [a^4\, b^6\, c^6\, \mathbf{x}^2],\ldots\ldots \quad \text{existent.}$$

Enfin pour les covariants du troisième degré, il s'ensuit qu'il existe de chacun des types

$$(a\, b\, c\, \mathbf{x}^3),\ (a^2\, b^2\, c^2\, \mathbf{x}^3),\ (a^3\, b^2\, c\, \mathbf{x}^3),\ \ldots\ldots,\ (a^3\, b^3\, \mathbf{x}^3),\ \ldots\ldots$$

au moins un covariant, donc, 11 covariants en tout du troisième degré. Les travaux antérieurs montrent qu'il n'en existe pas un nombre plus grand, et, par conséquent, il est démontré que tous ces 11 covariants du troisième degré sont irréductibles.

Donc, on a en somme un système minimal de 23 covariants et de plus 6 covariants fondamentaux, en tout 29 covariants.

Ce système minimal est identique au système maximal de Ciamberlini.

III. Les contrevariants. Ce sont les termes

$$[(u + u^2)\,(1) + u\,(2,\ 2)]\,\eta + [(u + u^3 - u^4)\,(1,\ 1) - u^2\,(2)]\,\eta^2 + \\ + [(u + u^2 - 5\,u^3) + (u - 3\,u^2)\,(2,\ 1) - u^2\,.\,(3) + (1 - u)\,(3,\ 3) - \\ - u\,.\,(4,\ 2)]\,\eta^3 + \ldots$$

qui correspondent aux contrevariants.

On peut tirer de ce fait des conséquences d'une manière analogue a celle employée au cas des covariants. On trouve surtout:

1. Il existe, au moins, 9 contrevariants linéaires des types

$$(a^2\, b\, c\, \mathbf{u}),\ldots\ldots,\ (a^3\, b^2\, c^2\, \mathbf{u}),\quad ,\ (a^3\, b^3\, c\, \mathbf{u}),\ldots\ldots$$

2. Il existe, au moins, trois contrevariants quadratiques des types $(a^2\, b^2\, c\, \mathbf{u}^2),\ldots\ldots$

3. Il existe, au moins, 11 contrevariants cubiques des types

$$(a\, b\, c\, \mathbf{u}^3),\ (a^2\, b^2\, c^2\, \mathbf{u}^3),\ (a^3\, b^2\, c\, \mathbf{u}^3),\ldots\ldots,\ (a^3\, b^3\, \mathbf{u}^3),\ldots\ldots$$

Donc on a un système minimal de 23 contrevariants et de plus 6 contrevariants fondamentaux, en tout 29 contrevariants qui est identique au système maximal trouvé par Ciamberlini et Seelig.

IV. Les invariants mixtes, les divariants. Il suffit, pour notre but, d'examiner les termes

$$[(2u + 2u^2 + 2u^3) + (1 + u + u^2)\,(2,\,1)]\,\xi\,\eta + [(1 + 2u - u^2 - u^3)\,(1,\,1) + \\ + (u - 2u^3)\,(2) + (1 - u - u^2)\,(3,\,2)]\,\xi^2\,\eta + [(3u - 2u^2)\,(1) + \\ + (1 - u - u^2)\,(2,\,2) + (1 - u - u^2)\,(3,\,1) - u\,(4)]\,\xi\,\eta^2.$$

On conclut de cette expression (et des travaux antérieurs) que les divariants qui existent et qui sont irréductibles sont les suivants:

1. Les 16 divariants du premier degré par rapport à $\mathbf{x}$ et $\mathbf{u}$:

$$(a\,b\,c\,\mathbf{x}\,\mathbf{u})_1,\ (a\,b\,c\,\mathbf{x}\,\mathbf{u})_2,\ (a^2\,b^2\,c^2\,\mathbf{x}\,\mathbf{u})_1,\ (a^2\,b^2\,c^2\,\mathbf{x})_2,\ (a^2\,b\,\mathbf{x}\,\mathbf{u}),\ldots\ldots \\ (a^3\,b^3\,c\,\mathbf{x}\,\mathbf{u}),\ldots\ldots$$

2. Les 18 divariants du deuxième degré en $\mathbf{x}$ et du premier degré en $\mathbf{u}$:

$$(a\,b\,\mathbf{x}^2\,\mathbf{u}),\ldots\ldots\ (a^2\,b^2\,c\,\mathbf{x}^2\,\mathbf{u})_1,\ldots\ldots\ (a^2\,b\,c\,\mathbf{x}^2\,\mathbf{u})_2,\ \ldots\ldots\ (a^3\,b^3\,c\,\mathbf{x}^2\,\mathbf{u}),\ \ldots\ldots \\ (a^3\,b^2\,\mathbf{x}^2\,\mathbf{u}),\ldots\ldots$$

3. Les 18 divariants du premier degré par rapport à $\mathbf{x}$ et du deuxième degré par rapport à $\mathbf{u}$:

$$(a^2\,b\,c\,\mathbf{x}\,\mathbf{u}^2)_1,\ldots\ldots,\ (a^2\,b\,c\,\mathbf{x}\,\mathbf{u}^2)_2,\ldots\ldots\ (a^2\,b\,c\,\mathbf{x}\,\mathbf{u}^2)_3,\ldots\ldots\ (a^2\,b^2\,\mathbf{x}\,\mathbf{u}^2),\ldots\ldots, \\ (a^3\,b\,\mathbf{x}\,\mathbf{u}^2).$$

Le système complet construit par Ciamberlini et Seelig contient six divariants de plus que le système minimal tiré de la table. Ces divariants sont (dans la notation de Seelig l. c.)

$$\overline{T}_1 \equiv (a^4\,b^2\,c^2\,\mathbf{x}^2\,\mathbf{u}),\ \ldots\ldots,\ \overline{M}_{2\,3} \equiv (a^3\,b^2\,c^2\,\mathbf{x}\,\mathbf{u}^2),\ \ldots\ldots$$

Le terme du numérateur de la fonction génératrice qui correspond au divariant $\overline{T}_1$ est $\alpha\,a^4\,b\,c\,\xi^2\,\eta$, où $\alpha = 0$. Le même terme correspond aussi aux produits

$$(a^2\,b\,c\,\mathbf{u})\,(a^2\,b\,c\,\mathbf{x}^2),\ (a^3\,b\,c\,\mathbf{x})\,(a\,b\,c\,\mathbf{x}\,\mathbf{u})_1,\ (a^3\,c\,b\,\mathbf{x})\,(a\,b\,c\,\mathbf{x}\,\mathbf{u})_2.$$

Par conséquent α $(= 0)$ est la différence entre 4 et le nombre des relations linéairement indépendantes de la forme

$$l_0\,\overline{T}_1 + l_1\,(a^2\,b\,c\,\mathbf{u})\,(a^2\,b\,c\,\mathbf{x}^2\,\mathbf{u}) + l_2\,(a^3\,b\,c\,\mathbf{x})\,(a\,b\,c\,\mathbf{x}\,\mathbf{u}) + \\ (m) \quad + l_3\,(a^3\,b\,c\,\mathbf{x})\,(a\,b\,c\,\mathbf{x}\,\mathbf{u}) + (a^2\,b\,c\,\mathbf{u})\,L_1 + (a\,b^2\,c\,\mathbf{u})\,L_2 + (a\,b\,c^2\,\mathbf{u})\,L_3 \\ + (a^2\,b^2\,c^2)\,L_4 = 0,$$

où l_0, l_1, l_2, l_3 sont des coefficients numériques, L_1, L_2 des fonctions rationnelles entières des invariants fondamentaux [par ex L_4 est de la forme $l_4\,(a\,\mathbf{x}^2)$, l_4 constante numérique; $L_3 = l_5\,(a\,\mathbf{x}^2)\,(a^2\,b) + l_6\,(b\,\mathbf{x}^2)\,(a^3)$].

Mais puisque $\alpha = 0$, il y a 4 rélations indépendantes de la forme (m). Il est très peu probable que le coefficient numérique l_0 disparaisse simultanément dans toutes les 4 rélations de la forme (m).

On peut faire des raisonnements pareils pour $\overline{M}_{23},\ldots\ldots$

Le résultat auquel nous sommes parvenus, peut être resumé dans le théorème:

Parmi les 127 invariants du système complet appartenant à trois formes quadratiques ternaires, il y a sûrement 121 invariants irréductibles. Les 6 invariants $\overline{T}_1, \ldots, \overline{M}_{23}, \ldots$ *sont très probablement réductibles;* pour déterminer ce cas, la connaissance de la fonction génératrice ne suffit pas.

Les tables pour le numérateur de la fonction génératrice.

Dans les tables ci-dessous le numérateur de la fonction génératrice est supposé dans une des deux formes:

$$A + B\,\xi + C\,\xi^2 + D\,\xi^3 + E\,\xi^4 + F\,\xi^5 + G\,\xi^6 + H\,\xi^7 + I\,\xi^8 + K\,\xi^9 + L\xi^{10},$$

$$A' + B'\,\eta + C'\,\eta^2 + D'\,\eta^3 + E'\,\eta^4 + F'\,\eta^5 + G'\,\eta^6 + H'\,\eta^7 + I'\,\eta^8 + \\ + K'\,\eta^9 + L'\,\eta^{10}.$$

Les coefficients $A, B \ldots$ qui sont des fonctions rationnelles entières de la variable η sont exprimés au moyen de A_1, A_2 et u, les coefficients A', $B' \ldots$, au moyen de (i, k), (i) et u. La signification de ces symboles est donnée à la page 3. Les coefficients L, L' ne sont pas indiqués, étant donnés par les relations:

$$L = A\,u^5 \qquad L' = A'\,u^4.$$

TABLE I.

A. Coefficient auprès de ξ^0.

	η^0	η^3	η^6	η^9
1	$1 + u^2 + u^4$	$u + u^2 + u^3$	$- u^5 - u^6 - u^7$	$- u^4 - u^6 - u^8$
$A_1 A_2$	.	$- 2u - u^2$	$u^4 + 2u^5$	.
A_1^3	.	$+ u^2$	$- u^4 - u^5$	.
A_2^3	.	$1 + u$	$- u^3$	.
$A_1^2 A_2^2$	.	$- u$	$+ u^3$	.

	η^1	η^4	η^7	η^{10}
A_1	$u - u^2$	$- 2u^3 + . - u^5$	$- u^3 - u^4 - . - u^6$	.
A_2^2	$+ u$	$- u^2 + u^3 - u^4$	$+ u^2$	.
$A_1^2 A_2$	.	$+ 3u^2 - u^3 + u^4$	.	.
A_1^4	.	$- u^2$	.	.

	η^2	η^5	η^8
A_2	$u + . + u^3 + u^4$	$+ u^2 + . + 2u^4$	$+ u^5 - u^6$
A_1^2	$- u^4$	$+ u^2 - u^3 + u^4$	$- u^5$
$A_1 A_2^2$	.	$- u + u^2 - 3u^3$	.
A_2^4	.	$+ u^2$	.

B. Coefficient auprès de ξ^1.

	η^0	η^3	η^6	η^9
A_2	$-u+u^2$	$-2u^2-u^3$	$-u^2+.-2u^4+u^5-u^6$	.
A_1^2	$+u$	$+u^2+u^3$	$-u^2+.-2u^4+u^5$	.
$A_1 A_2^2$	.	$+2u+u^2$	$+u+.+2u^3-3u^4$	.
$A_1^3 A_2$	.	$-u-u^2$	.	.
A_2^4	.	.	$+u^3$	.

	η^1	η^4	η^7	η^{10}
1	$-u-u^2-u^3$	$-2u^2-u^3-u^4+u^5$	$u^5+u^6+u^7$	$u^4+.+u^6+.+u^8$
$A_1 A_2$	$+1+u+u^2$	$4u+2u^2+2u^3-2u^4$	$-u^4-u^5-u^6$	.
A_1^3	.	$-u-u^2-u^3$	.	.
A_2^3	.	$-1-.-.+u^3$	.	.

	η^2	η^5	η^8
A_1	$-u^2+u^3$	u^4+2u^5	$u^3+.+.+u^6+u^7$
A_2^2	$-1-u+u^2$	$-u^3-u^4$	$-u^2+.-u^4-u^5-u^6$
$A_1^2 A_2$	$1+3u-u^2$	$-u^3-2u^4$	.
A_1^4	$-u$	.	.
$A_1 A_2^3$	.	u^2+u^3	.

C. Coefficient auprès de ξ^2.

	η^0	η^3	η^6	η^9
A_1	$u + . + u^3 - u^4 + 2u^5$	$- u + 2u^2 + . + 3u^4 - u^5$	$+ u^5 + . - 2u^7 - 2u^8$	$+ u^4 - u^5 + . - 2u^7 + u^8 - 2u^9$
A_2^2	$- u^4$	$- 2u^2 + . + u^4$	$+ u^3 + . + u^5 + u^6 + u^7$	$+ u^4 + u^5 + u^6 + . + u^8$
$A_1^2 A_2$	.	$+ u - u^2 - 3u^3$	$- 3u^4 - u^5 + 4u^6$	.
A_1^4	.	$- u^2 + 2u^3$	$- u^3 + u^4 - u^5 - 2u^6$	.
$A_1 A_2^3$	.	$- 1 + 4u + 3u^2$	$- u^2 + 2u^3 - 3u^4 - 2u^5$	.
$A_1^3 A_2^2$	.	$- 3u^2$	$+ u^2 - u^3 + 3u^4 + u^5$	.
A_2^5	.	$- 1 - u$	$+ u^3$	.
$A_1^2 A_2^4$	.	u	$- u^3$	.

	η^1	η^4	η^7	η^{10}
A_2	$+ 1 - u$	$+ u^2 + u^3 - u^4 - u^5$	$+ u^4 - u^5 + u^6 - u^7$	$- u^5 + u^6$
A_1^2	$- u + 2u^2 - 2u^3$	$- u^2 - u^3 - 3u^4 + . - 2u^6$	$+ u^3 - u^4 - 3u^5 + . - 2u^7$	$+ u^5$
$A_1 A_2^2$	$+ 1 - u + 3u^2$	$- 2u^2 + u^3 + 4u^4 - u^5$	$- u^2 + 2u^3 + 3u^4 + . + u^6$	.
$A_1^3 A_2$	.	$+ 2u^2 + 5u^3 - 3u^4 + 2u^5$	.	.
A_1^5	.	$- 2u^3$	.	.
A_2^4	$- u$	$+ u + . - u^3 + u^4$	$- u^2 - u^3$	.
$A_1^2 A_2^3$	.	$- u - 2u^2 + u^3 - u^4$	.	.
$A_1^4 A_2^2$	.	$+ u^2$	.	.

	η^2	η^5	η^8
1	.	.	.
$A_1 A_2$	$+ 2u^2 - 2u^3 + u^4 + 2u^5$	$- u^2 + 2u^3 - u^4 + 3u^5$	$- u^4 + . + 3u^6 - 2u^7$
A_1^3	$- u^2 + u^3 + u^4 - 2u^5$	$- u^2 + u^3 - 3u^4 + 2u^5$	$+ u^4 + u^5 - 2u^6$
A_2^3	$+ u^2 - u^3 - u^4$	$- 2u^2 + . - 2u^4$	$+ u^3 - u^4 - u^5 + u^6$
$A_1^2 A_2^2$	$- u^2 + . + u^4$	$+ u - 2u^2 + 4u^3 - 7u^4$	$- u^3 + . + u^5$
$A_1 A_2^4$	.	$u - u^2 + 5u^3$	.
A_2^6	.	$- u^2$	.

D. Coefficient auprès de ξ^3.

	η^0	η^3	η^6	η^9
1	$+ u + u^2 + u^3$	$u^2 + 2u^3 + u^4 + . - u^6$	$- u^5 - u^6 - u^7$	$- u^5 - u^6 - u^7$
$A_1 A_2$	$- 2u - 3u^2 + 2u^3$	$- u - 4u^2 - 6u^3 - 2u^4 + u^5$	$- 2u^3 + 2u^4 - 2u^5 + 4u^6 - 2u^7$	$+ u^4 + u^5 + u^6$
A_1^3	$+ 2u^2$	$+ 2u^3 + 2u^4$	$+ u^4 - 4u^5 + 2u^6$	.
A_2^3	$+ 1 + u - u^2$	$+ u + 2u^2 + u^3$	$+ u^2 - u^3 + u^4 - 2u^5 + u^6$	.
$A_1^2 A_2^2$	$- u$	$+ 2u + 4u^2 + u^3$	$- u^3 + 6u^4 - 7u^5$	.
$A_1^4 A_2$	.	$- 2u^2 - 2u^3$	.	.
$A_1 A_2^4$	.	$- 1 - 2u - u^2$	$- 2u^3 + 5u^4$	.
$A_1^3 A_2^3$	.	$+ u + u^2$	.	.
A_2^6	.	.	$- u^3$	.

	η^1	η^4	η^7	η^{10}
A_1	$-u^3-2u^4$	$-u^2-u^3-3u^4-2u^5+u^6$	$-u^4-2u^5+.+u^7+2u^8$	$+u^5+.+u^7-u^8+2u^9$
A_2^2	$+u^2+u^3$	$+u^2-u^3+u^4-u^5$	$+u^3+u^4+.-u^6-u^7$	$-u^8$
$A_1^2A_2$	$+u^2+2u^3$	$+2u^2+4u^3+4u^4-4u^5$	$+u^3+2u^4+.-u^6-2u^7$	.
A_1^4	.	$-u^2-2u^3-2u^4$	.	.
$A_1A_2^3$	$-u-u^2$	$-2u-u^2-2u^3+4u^4$	$-u^2-u^3+.+u^5+u^6$	.
$A_1^3A_2^2$	.	$+u+u^2+u^3$	.	.
A_2^5	.	$-u^3$	.	.

	η^2	η^5	η^8
A_2	$+u+u^2+.+.+u^5$	$u^3+u^4+.+u^6$	$-u^4+u^5-u^6+u^7$
A_1^2	$-u+.-2u^3+2u^4$	$u^3+.+2u^5+4u^6$	$+2u^4+u^5-u^6+u^7+2u^8$
$A_1A_2^2$	$-3u-u^2+u^3$	$-2u^2-u^3-3u^4-5u^5$	$-u^3+.+u^5-2u^6-3u^7$
$A_1^3A_2$	$+2u+6u^2-2u^3$	$-u^2+.-2u^4-4u^5$	.
A_1^5	$-2u^2$	.	.
A_2^4	$+1+u-u^2$	$+u^3+u^4$	$+u^5+u^6$
$A_1^2A_2^3$	$-1-3u+u^2$	$+u+.+3u^3+4u^4$	.
$A_1^4A_2^2$	$+u$	.	.
$A_1A_2^5$	.	$-.u^2-u^3$	.

E. Coefficient auprès de ξ^4.

	η^0	η^3	η^6	η^9
A_2	$-u^4+\ .\ -2u^6$	$-u^2+\ .\ -3u^4-2u^5$	$-u^3-u^4-2u^5-u^6+u^7+2u^8+2u^9$	$-u^5+u^6+\ .\ +u^8+\ .\ +2u^{10}$
A_1^2	$+u^3-u^4-2u^5+u^6$	$-2u^2+2u^3-2u^4+4u^5-2u^6$	$-u^3-u^4-2u^5+2u^6+4u^7-u^8-u^9$	$+u^5+u^6+\ .\ -u^8+2u^9-u^{10}$
$A_1A_2^2$	$-u^2+3u^3+u^4$	$+\ u-3u^2+3u^3+2u^4+3u^5$	$u^2+2u^3+5u^4+\ .\ -4u^6-4u^7$	$-u^5+2u^6+\ .-\ u^8$
$A_1^3A_2$	.	$+\ u^2+3u^3-5u^4$	$+3u^3+2u^4-6u^5-3u^6+4u^7$	.
A_1^5	.	$-2u^3+u^4$	$-2u^4+2u^5+u^6-u^7$	.
A_2^4	$-u^2$	$-u^2-3u^3-u^4$	$-2u^3+\ .\ +2u^5$	$-u^5$
$A_1^2A_2^3$	.	$-u^2+4u^3$	$-4u^2-3u^3+7u^4$	.
$A_1^4A_2^2$	.	$+u^2-u^3$	$+3u^3-3u^4$	.
$A_1A_2^5$	.	.	$+\ u+u^2-2u^3$	.
$A_1^3A_2^4$	.	.	$-u^2+u^3$	.

	η^1	η^4	η^7	η^{10}
1	$-u+\ .\ -2u^3+\ .\ -u^5+u^6$	$-u^2-u^3-2u^4+\ .\ +\ .\ +u^7$	$u^5+u^6+u^7$	$+u^5+u^6+u^7$
A_1A_2	$+2u+2u^2-u^3+3u^4$	$+2u^2+8u^3+3u^4+3u^5-3u^6+2u^7$	$-3u^4+2u^5-2u^6+3u^7$	$-2u^5-3u^6+2u^7$
A_1^3	$-u^2+2u^3-u^4$	$-2u^3-u^4+\ .\ +\ .\ -u^7$	$+2u^4+2u^5-2u^6+\ .\ -u^8$	$+2u^6$
A_2^3	$-1\ +\ .\ +\ .\ -2u^3$	$-u-5u^2-u^3+2u^4-u^5+2u^6$	$+u^3-2u^4+u^5-u^6+u^7$	$u^4+u^5-u^6$
$A_1^2A_2^2$	$-u^2+u^3$	$-4u^2-6u^3-6u^4+7u^5-3u^6$	$-u^3-2u^4+5u^5$	$-u^5$
$A_1^4A_2$	.	$+4u^3+3u^4-3u^5+u^6$	.	.
A_1^6	.	$-u^4$	.	.
$A_1A_2^4$	.	$+5u+5u^2-3u^3-2u^4$	$+u^3-4u^4$	.
$A_1^3A_2^3$	.	$-4u^2+3u^3+u^4$	.	.
A_2^6	.	$-1\ -u+u^2$	$+u^3$	.
$A_1^2A_2^5$	.	$+u-u^2$	.	.

	η^2	η^5	η^8
A_1	$-u^2+.+.+.+u^6$	$u^4+.+u^6+u^7$	$u^4+u^5+.+u^7$
A_2^2	$-u^2-2u^3+.-2u^5-2u^6$	$-3u^4+.-5u^6$	$-u^3-2u^4+.-u^6-2u^7+2u^8$
$A_1^2A_2$	$+2u^2+2u^3-4u^4-u^5+3u^6$	$-2u^3+.+.-2u^6$	$-u^4-3u^5+.+5u^7-u^8$
A_1^4	$-2u^3+2u^4+2u^5-u^6$	$-3u^5+u^6$	$+2u^5+2u^6-u^7$
$A_1A_2^3$	$-u+2u^2+4u^3+u^4$	$+u^2+.-u^4+7u^5$	$+3u^3+4u^4-2u^5-u^6$
$A_1^3A_2^2$	$+u^2-3u^3-u^4$	$+u^3+4u^4-3u^5$	$-3u^4-u^5$
A_2^5	$-u-u^2$	$u^2+.-2u^4$	$-u^2-u^3+u^4$
$A_1^2A_2^4$	$+u^2$	$-u^2-u^3+u^4$	$+u^3$

F. Coefficient auprès de ξ^5.

	η^0	η^3	η^6	η^9
A_1	$+2u^2+.+u^4$	$+2u^3+2u^4+u^5+.-2u^7$	$+2u^5-u^6-2u^7-2u^8$	$-u^7-2u^8$
A_2^2	$-u+2u^2+u^3-u^4$	$-u^2+u^3+3u^4+3u^5+u^6$	$+u^4+u^5+5u^6-u^7+2u^8$	$+u^6+u^7$
$A_1^2A_2$	$-u^2-3u^3+u^4$	$-2u^2-3u^3-5u^4-3u^5+2u^6$	$-5u^4+2u^5+5u^6+3u^7-u^8$	$+u^6+2u^7$
A_1^4	$+u^3$	$+u^4+u^5$	$+2u^4+u^5-2u^6+u^7$	. .
$A_1A_2^3$	.	$+u-u^2-3u^3-3u^4-u^5$	$+2u^3-4u^4-7u^5+2u^6$	$-u^5-u^6$
$A_1^3A_2^2$	.	$+u^2+4u^3+3u^4$	$-u^3+.+2u^5-3u^6$	.
$A_1^5A_2$	.	$-u^3-u^4$	.	.
A_2^5	.	.	$+u^3+u^4-u^5$	.
$A_1^2A_2^4$	.	.	$+u^5$	.

	η^1	η^4	η^7	η^{10}
A_2	$+2u^4+u^5$	$+2u^4+2u^5+u^6-2u^7$	$+2u^5+.-u^7-2u^8-2u^9$	$-u^8+.-2u^{10}$
A_1^2	$-u^4-u^5$	$-2u^3+u^4-5u^5-u^6-u^7$	$-u^5-3u^6-3u^7-u^8+u^9$	$+u^7-u^8-2u^9+u^{10}$
$A_1A_2^2$	$-2u^3-u^4$	$+u^2-3u^3-5u^4-2u^5+5u^6$	$-2u^4+3u^5+5u^6+3u^7+2u^8$	$-u^6+3u^7+u^8$
$A_1^3A_2$	$+u^3+u^4$	$-2u^3+7u^4+4u^5-2u^6$	$+u^4+3u^5+3u^6+u^7-u^8$	.
A_1^5	.	$+u^3-u^4-u^5$	.	.
A_2^4	.	$-u^2+2u^3-u^4-2u^5$	$-u^4-u^5$	$-u^6$
$A_1^2A_2^3$	.	$+3u^2-2u^3+.+u^5$	$-3u^4-4u^5-u^6$	.
$A_1^4A_2^2$	.	$-u^2$	.	.
$A_1A_2^5$	.	.	$+u^3+u^4$	.

	η^2	η^5	η^8
1	.	.	.
A_1A_2	$+2u^2+.+2u^4-3u^5+2u^6$	$+2u^4+3u^5-3u^6-2u^7$	$-2u^5+3u^6-2u^7+.-2u^9$
A_1^3	$-2u^2-u^3-2u^4+u^5$	$-u^4-2u^5+u^6+2u^7$	$+u^5+2u^6-2u^7-u^8+u^9$
A_2^3	$-u+u^2+2u^3-2u^4-u^5$	$-2u^3-u^4+2u^5+u^6$	$-u^5+2u^6+u^7+2u^8$
$A_1^2A_2^2$	$+u-2u^2-6u^3+3u^4$	$-u^3-2u^4+2u^5+u^6$	$-3u^5+6u^6+2u^7-u^8$
$A_1^4A_2$	$+u^2+5u^3-u^4$	$+u^3+2u^4-u^5-2u^6$	.
A_1^6	$-u^3$	.	.
$A_1A_2^4$	.	$+2u^2+u^3-2u^4-u^5$	$+u^4-5u^5-u^6$
$A_1^3A_2^3$	.	$-u^2-u^3+u^4+u^5$	.
A_2^6	.	.	$+u^4$

G. Coefficient auprès de ξ^6.

	η^0	η^3	η^6	η^9
1	$- u^6 - u^7 - u^8$	$- u^6 - u^7 - u^8$	$. - u^6 + . + . + 2u^9 + u^{10} + u^{11}$	$- u^7 + u^8 + . + 2u^{10} + . + u^{12}$
$A_1 A_2$	$-2u^4 + 3u^5 + 2u^6$	$-3u^4 + 2u^5 - 2u^6 + 3u^7$	$-2u^4 + 3u^5 - 3u^6 - 3u^7 - 8u^8 - 2u^9$	$-3u^7 + u^8 - 2u^9 - 2u^{10}$
A_1^3	$+ u^4 - u^5 - u^6$	$-u^3 + u^4 - u^5 + 2u^6 - u^7$	$-2u^4 + u^5 - 2u^6 + u^7 + 5u^8 + u^9$	$+2u^7 + . + . + u^{10}$
A_2^3	$-2u^4$	$+u^2 + . + 2u^4 - 2u^5 - 2u^6$	$+ u^3 + . + . + u^6 + 2u^7$	$+ u^6 - 2u^7 + u^8$
$A_1^2 A_2^2$	$+ u^4$	$-5u^4 + 2u^5 + u^6$	$+3u^3 - 7u^4 + 6u^5 + 6u^6 + 4u^7$	$- u^6 + u^7$
$A_1^4 A_2$	.	$+4u^4 - u^5$	$+2u^4 + 3u^5 - 5u^6 - 5u^7$	.
A_1^6	.	$- u^4$	$- u^5 + u^6 + u^7$	.
$A_1 A_2^4$	.	.	$- u^2 + 3u^3 - 3u^4 - 4u^5$	.
$A_1^3 A_2^3$	.	.	$+ . - u^3 - 3u^4 + 4u^5$	.
$A_1^5 A_2^2$	.	.	$+ u^4 - u^5$	.
A_2^6	.	.	$+ u^3$	.

	η^1	η^4	η^7	η^{10}
A_1	$-2u^2 + . - u^4 + . - u^6 + u^7$	$-2u^3 - 2u^4 - u^5 + u^6 + 2u^7 + u^8 + u^9$	$+2u^7 + 3u^8 + . + u^{10}$	$+2u^6 + . + u^8$
A_2^2	$+ u - 2u^2 + u^3 + . - u^5 - u^6$	$+ u^2 + u^3 - 4u^4 - 2u^5 + 2u^6 + u^7 + u^8$	$+2u^5 - 4u^6 + 2u^7 - 2u^8 + 2u^9$	$- u^5 + 2u^6 + u^7 - u^8$
$A_1^2 A_2$	$+ u^2 + . - 2u^4 + u^5$	$+4u^3 + 4u^4 + . - 5u^6 - 2u^7 - u^8$	$-3u^5 - 2u^6 - 3u^7 + 3u^8 - u^9$	$- u^6 - 3u^7 + u^8$
A_1^4	$+ u^4$	$-2u^4 + . + 2u^6$	$+ u^5 + 3u^6 + u^7$	$+ u^7$
$A_1 A_2^3$	.	$-4u^2 + 3u^3 + 6u^4 - 2u^5 - 3u^6$	$+5u^5 - 3u^6 - u^7$	.
$A_1^3 A_2^2$	.	$-7u^4 + 3u^5 + 4u^6$	$-4u^5 + u^6$	.
$A_1^5 A_2$	.	$+2u^4 - u^5 - u^6$	.	.
A_2^5	.	$+ u - u^2 - 2u^3 + 2u^4$	$- u^4 + 2u^5$	.
$A_1^2 A_2^4$	.	$+3u^3 - 3u^4$	$+ u^4 - u^5$	.
$A_1^4 A_2^3$	.	$- u^3 + u^4$	.	.

	η^2	η^5	η^8
A_2	$- u^5 + . - u^7 - u^8$	$- u^5 - u^6 + . - u^8$	$- u^6 + . + . + . + u^{10}$
A_1^2	$-2u^3 + 2u^4 + u^5 + . + 2u^7 + u^8$	$+5u^5 + . + 3u^7$	$+2u^5 + 2u^6 + . + 2u^8 + u^9$
$A_1 A_2^2$	$+ u^2 - 5u^3 + . + 3u^5 + u^6$	$+2u^4 + . + . + 2u^7$	$-3u^4 + u^5 + 4u^6 - 2u^7 - 2u^8$
$A_1^3 A_2$	$+ u^3 + 2u^4 - 4u^5 - 3u^6$	$-7u^4 + u^5 + . - u^7$	$- u^5 - 4u^6 - 2u^7 + u^8$
A_1^5	$- u^4 + u^5 + u^6$	$+2u^4 + . - u^6$	$+ u^6 + u^7$
A_2^4	$+ u^2 - 2u^3 - 2u^4$	$- u^3 + 3u^4$	$+ u^3 - 2u^4 - 2u^5 + 2u^6$
$A_1^2 A_2^3$	$+ u^3 + 3u^4$	$+3u^3 - 4u^4 - u^5$	$+ u^4 + 3u^5 - u^6$
$A_1^4 A_2^2$	$- u^4$	$- u^3 + u^4 + u^5$	$- u^5$

H. Coefficient auprès de ξ^7.

	η^0	η^3	η^6	η^9
A_2	$-2u^3 + u^4 - u^5 - u^7$	$-2u^4 - u^5 + 2u^7 + u^8$	$- u^6 + 2u^7 + 3u^8 + u^9 + u^{10}$	$+2u^8 + u^9$
A_1^2	$+ u^3$	$+ u^4 + u^5 - u^7 - u^8$	$+ u^6 - u^7 + u^8 - u^9$	$- u^8 - u^9$
$A_1 A_2^2$	.	$2u^3 + u^4 - 2u^6 - u^7$	$+4u^5 - 4u^6 - 4u^7 - 2u^8$	$-2u^7 - u^8$
$A_1^3 A_2$	.	$- u^3 - u^4 + u^6 + u^7$	$-4u^5 + 2u^6 + u^7 + 2u^8$	$u^7 + u^8$
A_1^5	.	.	$+ u^5$	.
A_2^4	.	.	$+2u^5 + 2u^6 + u^7$	.
$A_1^2 A_2^3$	.	.	$- u^5 - u^6 - u^7$	.

	η^1	η^4	η^7	η^{10}
1	$+u^6+u^7+u^8$	$u^6+u^7+u^8$	$+u^7+\ .\ -u^9-2u^{10}-u^{11}$	$-u^{10}-u^{11}-u^{12}$
$A_1 A_2$	$-u^5-u^6-u^7$	$+2u^4-4u^5+2u^6-2u^7+2u^8$	$-u^6+2u^7+6u^8+4u^9+u^{10}$	$-2u^8+3u^9+2u^{10}$
A_1^3	.	$-u^4+2u^5-u^6+u^7-u^8$	$-u^7-2u^8-u^9$	$+u^8-u^9-u^{10}$
A_2^3	.	$-2u^4+4u^5-u^6$	$-2u^6-2u^7$	$-2u^8$
$A_1^2 A_2^2$	.	$+7u^4-6u^5+u^6$	$-u^6-4u^7-2u^8$	$+u^8$
$A_1^4 A_2$	.	$-5u^4+2u^5$	$+u^6+2u^7+u^8$	.
A_1^6	.	$+u^4$	.	.
$A_1 A_2^4$	.	.	$+2u^5+2u^6$	.
$A_1^3 A_2^3$	.	.	$-u^5-u^6$	.

	η^2	η^5	η^8
A_1	$-u^5+u^6-u^7+u^8$	$-u^6+\ .\ -u^8-u^9$	$-u^7+\ .\ +\ .\ -u^{10}-u^{11}$
A_2^2	$-2u^3-u^4+u^5-u^6-2u^7$	$-4u^5-2u^6+\ .\ -u^8$	$-2u^7+2u^8+\ .\ +u^{10}$
$A_1^2 A_2$	$+3u^3+2u^4-u^5+\ .\ +u^7$	$+5u^5+3u^6+u^7+2u^8$	$-u^7+u^8+3u^9$
A_1^4	$-u^3-u^4$	$-u^5-u^6$	$+u^7-u^8-u^9$
$A_1 A_2^3$	.	$+4u^4+2u^5+\ .\ +u^7$	$+2u^6-6u^7-2u^8$
$A_1^3 A_2^2$	.	$-4u^4-3u^5+\ .\ -u^7$	$-u^6+3u^7+u^8$
$A_1^5 A_2$	.	$+u^4+u^5$	.
A_2^5	.	.	$+2u^6$
$A_1^2 A_2^4$	.	.	$-u^6$

I. Coefficient après de ξ^8.

	η^0	η^3	η^6	η^9
A_1	$-u^6+u^7$	$+u^5-u^6+u^7-u^8$	$+u^7+u^8-u^9-u^{10}$	$+u^{11}-u^{12}$
A_2^2	$-u^6$	$+2u^4+.+3u^6+u^7-u^8$	$+2u^5+.+3u^7+u^8+u^9$	$+2u^8-2u^9+u^{10}$
$A_1^2A_2$	.	$-u^4+.-3u^6-2u^7+u^8$	$+u^5-4u^6-u^7+2u^8$	$-3u^8+u^9-u^{10}$
A_1^4	.	$+u^6+u^7$	$-u^5+u^6+.-u^8$	$+u^8$
$A_1A_2^3$	.	.	$-2u^4+3u^5-5u^6-2u^7$	.
$A_1^3A_2^2$	.	.	$+u^4-u^5+2u^6+u^7$	.
A_2^5	.	.	$+2u^5$	.
$A_1^2A_2^4$	.	.	$-u^5$	.

	η	η^4	η^7	η^{10}
A_2	$+2u^3-u^4+2u^5+.+u^7-u^8$	$+2u^4+2u^5+.-u^7$	$+u^7-3u^8+.-2u^{10}+u^{11}$	$-2u^7+u^8-u^9+.-u^{11}$
A_1^2	$-u^3+.-u^5-u^6-u^7$	$-u^4-u^5-u^6+.-u^8$	$-u^7+.+2u^9$	$+u^7$
$A_1A_2^2$	.	$-4u^4+u^5+3u^6$	$+3u^7+u^8-u^9$	.
$A_1^3A_2$	.	$+2u^4+3u^5-2u^6+u^7$	$-3u^7-4u^8+u^9$	.
A_1^5	.	$-u^5$	$+u^7+u^8$	.
A_2^4	.	$+2u^3+u^4-u^5+u^6$	$-2u^6+u^7$	.
$A_1^2A_2^3$	.	$-u^3-3u^4+u^5-u^6$	$+3u^6$	.
$A_1^4A_2^2$	.	$+u^4$	$-u^6$	.

	η^2	η^5	η^8
1	.	.	.
$A_1 A_2$	$+ 2u^4 - 3u^5 + . + u^7$	$- 3u^6 + u^7 - 2u^8 + u^9$	$- 2u^6 - u^7 + 2u^8 - 2u^9$
A_1^3	$- u^4 + u^5 + u^6 - u^7$	$+ 2u^6 + . + 2u^8$	$+ u^6 + u^7 - u^8$
A_2^3	$+ 2u^4 - u^5 - u^6$	$- 2u^5 + 3u^6 - u^7 + u^8$	$+ 2u^5 - u^6 - u^7 + u^8$
$A_1^2 A_2^2$	$- u^4 + . + u^6$	$+ 7u^5 - 4u^6 + 2u^7 - u^8$	$- u^5 + . + u^7$
$A_1^4 A_2$	.	$- 5u^5 + u^6 - u^7$	.
A_1^6	.	$+ u^5$	.

K. Coefficient auprès de ξ^9.

	η^0	η^3	η^6	η^9
1	$- u^5 + . - u^7 + . - u^9$	$- u^6 - u^7 - u^8$	$- u^8 + u^9 + u^{10} + 2u^{11}$	$+ u^{10} + u^{11} + u^{12}$
$A_1 A_2$	.	$+ u^5 + u^6 + u^7$	$+ 2u^7 - 2u^8 - 2u^9 - 4u^{10}$	$- u^9 - u^{10} - u^{11}$
A_1^3	.	.	$- u^7 + . + . + u^{10}$	.
A_2^3	.	.	$+ u^7 + u^8 + u^9$	.

	η^1	η^4	η^7	η^{10}
A_1	.	$+ u^6 - u^7 + 2u^8 + . + u^{10}$	$+ u^9 + 2u^{10}$	$- u^{10} + u^{11}$
A_2^2	.	$- u^6 + 2u^7 + . + u^9$	$- u^8 - u^9$	$- u^{10}$
$A_1^2 A_2$	.	$+ 3u^6 - 2u^7 + . - u^9$	$- u^8 - 2u^9$	.
A_1^4	.	$- u^6$	.	.
$A_1 A_2^3$	.	.	$+ u^7 + u^8$	.

	η^2	η^5	η^8
A_2	$- u^5 - u^6 + . + . - u^9$	$- 2u^7 - u^8$	$- u^9 + u^{10}$
A_1^2	$+ u^5 + u^6 + u^7 + . + u^9$	$+ u^7 + u^8$	$- u^9 + u^{10} + u^{11}$
$A_1 A_2^2$	.	$+ 2u^6 + u^7$	$+ u^8 - 3u^9 - u^{10}$
$A_1^3 A_2$	.	$- u^6 - u^7$	.
A_2^4	.	.	$+ u^8$

TABLE II.

A'. Coefficient auprès de η^0.

	ξ^0	ξ^3	ξ^6	ξ^9
(0) = 1	$1 + u^2 + u^4$	$u + u^2 - 5u^3$	$+ 5u^6 - u^7 - u^8$	$- u^5 - u^7 - u^9$
(2, 1)	.	$u - 2u^2 - u^3$	$u^4 + 2u^5 - u^6$	.
(3)	.	.	$u^4 + u^5 - u^6$	.
(3, 3)	.	$1 - u - u^2$	.	.
(4, 2)	.	$- u$	$+ u^4$	.

	ξ^1	ξ^4	ξ^7	ξ^{10}
(1, 1)	$+ u + u^2$	$- 3u^3 - . + u^5$	$. + u^4 - u^5 + . - u^7$	.
(2)	$+ u$	$- u^3 - u^4 + . + u^6$	$+ u^3$	.
(3, 2)	.	$- u^2 - u^3 + u^4$	.	.
(4, 4)	.	$- u^2$	.	.

	ξ^2	ξ^5	ξ^8
(1)	$u + . + u^3 - u^4 + .$	$. - u^3 + . + 3u^5$	$- u^6 - u^7$
(2, 2)	$- u^4$	$- u - . + u^3 + u^4$	$- u^6$
(3, 1)	.	$- u^2 + u^3 + u^4$	.
(4)	.	u^3	.

B'. Coefficient auprès de η^1.

	ξ^0	ξ^3	ξ^6	ξ^9
(1)	$u + u^2$	$- 6\,u^3 - 2\,u^4$	$u^3 + u^4 + 2\,u^5 + 2\,u^6 - u^7$	.
(2, 2)	u	$- 4\,u^2 - 2\,u^3$	$u + . + u^3 + 2\,u^4 + u^5 - u^6$	.
(3, 1)	.	$- 2\,u^2 - u^3$	$u^2 + . + 2\,u^4 + u^5$	.
(4)	.	.	$+ u^4$	.
(4, 3)	.	$- u - u^2$	.	.

	ξ^1	ξ^4	ξ^7	ξ^{10}
(0) = 1	$2\,u + 2\,u^2 + 2\,u^3$	$- u + . - 2\,u^3 - 6\,u^4 + 5\,u^5 + u^6$	$- 2\,u^6 - 2\,u^7 - 2\,u^8$	$u^5 + u^7 + u^9$
(2, 1)	$1 + u + u^2$	$- u - u^2 - 3\,u^3 + 2\,u^4$	$- u^5 - u^6 - u^7$	.
(3)	. .	$- u^2 + . + u^4$	.	.
(3, 3)	.	$- 1 - . - 2\,u^2$	.	.
(4, 2)	.	$- u^2 + u^3$	.	.

	ξ^2	ξ^5	ξ^8
(1, 1)	$1 + 2u - u^2 - u^3$	$2u^4 + 6u^5$	$- u^4 - . - 2u^6 - u^7 - u^8$
(2)	$+ u - . - 2u^3$	$2u^4 + 4u^5$	$- u^3 - . - u^5 - u^6 - u^7$
(3, 2)	$+ 1 - u - u^2$	$u^3 + 2u^4$	.
(4, 1)	.	$u^3 + u^4$	.
(4, 4)	$- u$	.	.

C': Coefficient auprès de η^2.

	ξ^0	ξ^3	ξ^6	ξ^9
(1, 1)	$+ u + . + u^3 - u^4$	$- u - 9u^2 + 2u^3 + 4u^4 + u^5$	$u^3 + 3u^4 + 2u^5 - 14u^6 + 2u^7 + u^8$	$+ u^5 + u^6 + 2u^7 + . + u^9$
(2)	$- u^4$	$- u - 4u^2 + 3u^3 + 2u^4$	$+ 5u^4 + u^5 - 13u^6 + 3u^7 + u^8$	$+ u^5 + u^6 + u^7 + . + u^9$
(3, 2)	.	$- 4u + . + 2u^3$	$u^2 + 2u^3 - u^4 - 6u^5 + 2u^6$	.
(4, 1)	.	$- u + u^2 + u^3$	$u^3 + . - 4u^5 + 2u^6$	.
(5)	.	.	$- u^4 - u^5 + u^6$	.
(4, 4)	.	$- 1 + u + u^2$	$u^2 + . - 2u^4$	.
(5, 3)	.	$- 1 + u + u^2$	$+ u^3 - u^4$	.
(6, 2)	.	u	$- u^4$	.

	ξ^1	ξ^4	ξ^7	ξ^{10}
(1)	$+ 3u - . - 2u^3$	$- u^2 - 4u^3 + 7u^4 + 9u^5 - 3u^6 - u^7$	$- u^4 - 5u^5 - 2u^6 - 3u^7 + 2u^8$	$+ u^6 + u^7$
(2, 2)	$+ 1 - u - u^2$	$- 4u^2 + 2u^3 + 11u^4 - 3u^5 - 2u^6$	$- 2u^3 - 3u^4 - u^5 - u^6$	$+ u^6$
(3, 1)	$+ 1 - u - u^2$	$- u^2 + u^3 + 5u^4 - u^5 - u^6$	$- u^3 - 2u^4 - u^5 - . + u^7$	.
(4)	$- u$	$+ 2u^4 - . - u^6$	$- u^3 - u^4$	.
(4, 3)	.	$- u + . + 4u^3 - 2u^4 - .$	.	.
(5, 2)	.	$+ u^2 + u^3 - u^4$	.	.
(5, 5)	.	$- u + u^2$	.	.
(6, 4)	.	u^2	.	.

	ξ^2	ξ^5	ξ^8
(0) = 1	$. - 9u^4 + 3u^5 + 3u^6$	$3u^3 + 6u^4 + 6u^5 - 6u^6 - .$	$. - 6u^6 + . + 6u^8$
(2, 1)	$- u^2 - 4u^3 + u^4 + u^5$	$u^2 + 6u^3 + 4u^4 - 4u^5 - u^6$	$- u^4 - 2u^5 + . + 3u^7$
(3)	$- u^2 - u^3 + u^4$	$. + 4u^3 + u^4 - 2u^5 - .$	$- u^4 - u^5 + u^6 + u^7$
(3, 3)	$- u^2 - u^3 + u^4$	$u + 3u^2 + . - 2u^4 - u^5$	$- u^5 + u^6$
(4, 2)	$- u^2 - . + u^4$	$u + 2u^2 - u^3 - u^4$	$- u^4 - . + u^6$
(5, 1)	.	$+ u^2 - u^3 - u^4$	.
(6)	.	$- u^3$	.

D'. Coefficient auprès de η^3.

	ξ^0	ξ^3	ξ^6	ξ^9
$(0) = 1$	$+ u + u^2 - 5u^3$	$- 2u^2 - 10u^3 + 16u^4 + 12u^5 + 2u^6$	$. - 3u^5 - 10u^6 - 13u^7 + 5u^8$	$+ 2u^6 + 2u^7 + 2u^8$
$(2, 1)$	$+ u - 3u^2$	$- u - 7u^2 + 10u^3 + 9u^4 + u^5$	$. - 7u^5 - 8u^6 + 2u^7$	$+ u^5 + u^6 + u^7$
(3)	$- u^2$	$- 2u^2 + 4u^3 + 4u^4$	$- u^3 + u^4 - 5u^5 - 3u^6 + u^7$	.
$(3, 3)$	$+ 1 - u$	$- 4u + 4u^2 + 6u^3$	$u^2 + . - 4u^4 - 4u^5 + .$	.
$(4, 2)$	$- u$	$- 2u + 3u^2 + 4u^3$	$- 4u^4 - 2u^5 + u^6$	.
$(5, 1)$	.	$+ u^2 + u^3$	$- 2u^4 - u^5$	.
(6)	.	.	$- u^4$	.
$(5, 4)$	.	$- 1 + u + 2u^2$	.	.
$(6, 3)$	.	$+ u + u^2$	.	.

	ξ^1	ξ^4	ξ^7	ξ^{10}
$(1, 1)$	$- 2u^2 - 6u^3$	$. + u^3 + 21u^4 - 6u^5 - u^6$	$- 2u^4 - 6u^5 + . + 2u^7 + 6u^8$	$+ u^6 + . + u^8 - u^9$
(2)	$- 2u^2 - 4u^3$	$+ 3u^3 + 14u^4 - 6u^5 - 2u^6$	$- 2u^4 - 4u^5 + . + 2u^7 + 4u^8$	$- u^9$
$(3, 2)$	$- u - 2u^2$	$+ u + . + 9u^3 - 3u^4 - u^5$	$- u^3 - 2u^4 + . + u^6 + 2u^7$	.
$(4, 1)$	$- u - u^2$	$+ u^2 + 4u^3 - 2u^4$	$- u^3 - u^4 + . + u^6 + u^7$	.
(5)	.	$- u^4$	.	.
$(4, 4)$	.	$+ 3u^2 - u^3 - u^4$	.	.
$(5, 3)$	.	$+ 3u^2$	.	.
$(6, 2)$	.	$+ u^2 - u^3$	.	.

	ξ^2	ξ^5	ξ^8
(1)	$-u-5u^2-3u^3+5u^4+u^5$	$+2u^3+8u^4+2u^5-20u^6-2u^7$	$.-u^6+4u^7+3u^8+3u^9$
(2, 2)	$-5u-2u^2+6u^3+u^4$	$+2u^2+6u^3+.-14u^5-2u^6$	$.+3u^6+3u^7+u^8$
(3, 1)	$-2u-3u^2+3u^3+.$	$+u^2+5u^3-u^4-10u^5-u^6$	$-u^4-.+u^6+2u^7+u^8$
(4)	$-u^2+2u^3$	$.+2u^3-2u^4-4u^5-.$	$+u^6+u^7$
(4, 3)	$-1-u+3u^2$	$+u+2u^2-u^3-4u^4-u^5$	.
(5, 2)	u^2	$+u^2-u^3-2u^4$	.
(6, 1)	.	$-u^3-u^4$	.
(5, 5)	$-1+u$	.	.
(6, 4)	$+u$	.	.

E'. Coefficient auprès de η^4.

	ξ^0	ξ^3	ξ^6	ξ^9
(1)	$-u^3-3u^4+2u^5$	$-u^2+6u^3+10u^4+3u^5-3u^6$	$+2u^4-7u^5-21u^6+27u^7+u^8-2u^9$	$+u^6-.-4u^8+.-2u^{10}$
(2, 2)	$-u^2-u^3+u^4$	$+3u^2+6u^3+u^4-u^5$	$u^2+u^3-7u^4-11u^5+19u^6-2u^7-u^8$	$-u^6-2u^7+.-u^9$
(3, 1)	$-u^2-u^3+u^4$	$+3u^2+4u^3+u^4-2u^5$	$+2u^3-5u^4-12u^5+18u^6-2u^7-u^8$	$-u^6-2u^7+.-u^9$
(4)	$-u^2$	$+u^2$	$+.-2u^4-4u^5+9u^6-3u^7-.$	$-u^6$
(4, 3)	.	$+u+2u^2+u^3-u^4$	$+u^2-2u^3-5u^4+7u^5-u^6-.$	.
(5, 2)	.	$+u+u^2+u^3$	$-4u^4+5u^5-u^6-.$	.
(6, 1)	.	. .	$-u^4+2u^5-u^6-.$	.
(5, 5)	.	$-u^3$	$+u-u^2-2u^3+2u^4$	.
(6, 4)	.	.	$-u^3+u^4$	.
(7, 3)	.	.	$-u^3+u^4$	.

	ξ^1	ξ^4	ξ^7	ξ^{10}
(0) = 1	$-2u^2-u^3-u^4+u^5$	$-u^2-u^3+10u^4+9u^5-30u^6+4u^7+3u^8$	$+4u^6+7u^7+10u^8$	$+u^6+u^7-5u^8$
(2, 1)	$-2u-u^2-u^3+u^4$	$-u^2+5u^3+12u^4-24u^5+.+3u^7$	$-u^4+2u^5+7u^6+6u^7-u^8$	$+u^6-3u^7$
(3)	$-u-u^2-u^3+.$	$+.+7u^4-11u^5-u^6+2u^7$	$-u^4+u^5+5u^6+3u^7-u^8$	$+.-u^7$
(3, 3)	$-1-.-.+u^3$	$-u+2u^2+11u^3-18u^4+u^5+2u^6$	$+2u^4+4u^5+u^6$	$+u^5-u^6$
(4, 2)	.	$+u^2+5u^3-11u^4+2u^5+u^6$	$2u^4+2u^5+u^6$	$-u^7$
(5, 1)	.	$+2u^3-4u^4+.+u^6$	u^4+2u^5	.
(6)	.	$-u^4$	u^4	.
(5, 4)	.	$-u+4u^2-5u^3+u^4$	.	.
(6, 3)	.	$+u^2-2u^3+u^4$	.	.
(6, 6)	.	$-1+u-u^2$	.	.
(7, 5)	.	$u-u^2$	.	.

	ξ^2	ξ^5	ξ^8
(1, 1)	$-u^2-6u^3+16u^4+2u^5-4u^6$	$+u^3-4u^4-17u^5-5u^6+4u^7$	$-3u^5+8u^6+9u^7-9u^8$
(2)	$-u^2-3u^3+11u^4+u^5-2u^6$	$-4u^4-10u^5-3u^6+u^7$	$-u^4-u^5+7u^6+4u^7-6u^8$
(3, 2)	$-3u^2+6u^3+2u^4-2u^5$	$+u^2-2u^3-8u^4-4u^5+2u^6$	$-u^4+3u^5+4u^6-4u^7$
(4, 1)	$-u^2+3u^3+.-u^5$	$-2u^3-4u^4-u^5+u^6$	$-u^4+3u^5+u^6-2u^7$
(5)	.	$-u^3-u^4-u^5$	$+u^5$
(4, 4)	$-u+2u^2+u^3-u^4$	$-u^2-2u^3-u^4$	$+u^4+u^5-u^6$
(5, 3)	$-u+2u^2+u^3-u^4$	$-u^2-2u^3-.+u^5$	$-u^3+u^4+u^5-u^6$
(6, 2)	$+u^2$	$-u^2$	$+u^4$

F'. Coefficient auprès de η^5.

	ξ^0	ξ^3	ξ^6	ξ^9
(1, 1)	$-2u^2+3u^3+u^4$	$+12u^3-4u^4-10u^5-8u^6$	$-4u^5+3u^6+25u^7-3u^8$	$-2u^7-6u^8$
(2)	$-u^2+u^3+u^4$	$+8u^3-2u^4-8u^5-6u^6$	$-5u^5+6u^6+18u^7-3u^8$	$-2u^7-4u^8$
(3, 2)	$-u+u^2+u^3$	$+6u^2-u^3-7u^4-4u^5$	$-2u^4+3u^5+11u^6-u^7$	$-u^6-2u^7$
(4, 1)	.	$+2u^2-.-3u^4-2u^5$	$-2u^4+3u^5+6u^6-u^7$	$-u^6-u^7$
(5)	.	.	$+2u^5+u^6$	.
(4, 4)	$+u^2$	$+2u-.-4u^3-2u^4$	$-u^3+u^4+4u^5$	.
(5, 3)	.	$+u-.-2u^3-u^4$	$-u^3+.+3u^5$	.
(6, 2)	.	.	$-u^3+u^4+u^5$	.
(6, 5)	.	$-u^2-u^3$	.	.

	ξ^1	ξ^4	ξ^7	ξ^{10}
(1)	$+6u^4+2u^5$	$+3u^4-25u^5-3u^6+4u^7$	$+8u^6+10u^7+4u^8-12u^9$	$-u^8-3u^9+2u^{10}$
(2, 2)	$+4u^3+2u^4$	$+3u^3-18u^4-6u^5+5u^6$	$+6u^5+8u^6+2u^7-8u^8$	$-u^7-u^8+u^9$
(3, 1)	$+2u^3+u^4$	$+u^3-11u^4-3u^5+2u^6$	$+4u^5+7u^6+u^7-6u^8$	$-u^7-u^8+u^9$
(4)	.	$-4u^4-u^5+u^6$	$+2u^5+4u^6+.-2u^8$	$-u^7$
(4, 3)	$+u^2+u^3$	$+u^2-6u^3-3u^4+2u^5$	$+2u^4+3u^5+.-2u^7$	.
(5, 2)	.	$-3u^3-.+u^5$	$+u^4+2u^5.+.-u^7$	.
(6, 1)	.	.	$+u^4+u^5$	.
(5, 5)	.	$-u^2-2u^3$	.	.
(6, 4)	.	$-u^2-u^3+u^4$	.	.

	ξ^2	ξ^5	ξ^8
$(0) = 1$	$+ 6u^3 + 6u^4 + 3u^5 - 6u^6$	$- 12u^5 - 24u^6 + 24u^7 + 12u^8$	$+ 6u^7 - 3u^8 - 6u^9 - 6u^{10}$
$(2, 1)$	$+ 4u^2 + 5u^3 + . - 3u^5$	$- 9u^4 - 16u^5 + 16u^6 + 9u^7$	$+ 3u^6 - . - 5u^8 - 4u^9$
(3)	$+ u^2 + 3u^3 - u^4 - 2u^5$	$- 6u^4 - 6u^5 + 8u^6 + 4u^7$	$+ u^6 + u^7 - 3u^8 - 2u^9$
$(3, 3)$	$+ 2u + 3u^2 - u^3 - u^4$	$- 4u^3 - 8u^4 + 6u^5 + 6u^6$	$+ 2u^5 + u^6 - 3u^7 - u^8$
$(4, 2)$	$+ u + 2u^2 - . - 2u^4$	$- 4u^3 - 5u^4 + 5u^5 + 4u^6$	$+ 2u^5 + . - 2u^7 - u^8$
$(5, 1)$	.	$- 2u^3 - u^4 + 2u^5 + u^6$	$+ u^5 + u^6 - u^7$
(6)	.	.	$+ u^5$
$(5, 4)$	$+ u - u^2 - u^3$	$- u^2 - 2u^3 + u^4 + 2u^5$	.
$(6, 3)$	.	$- u^2 - u^3 + u^4 + u^5$	.
$(6, 6)$	$- u^2$	.	.

G'. Coefficient auprès de η^6.

	ξ^0	ξ^3	ξ^6	ξ^9
$(0) = 1$	$+ 5u^5 - u^6 - u^7$	$- 10u^5 - 7u^6 - 4u^7$	$- 3u^5 - 4u^6 + 30u^7 - 9u^8 - 10u^9 + u^{10} + u^{11}$	$- u^8 + u^9 + u^{10} + 2u^{11}$
$(2, 1)$	$+ 3u^4 - u^5$	$+ u^3 - 6u^4 - 7u^5 - 2u^6 + u^7$	$- 3u^4 + . + 24u^6 - 12u^7 - 5u^8 + u^9$	$- u^7 + u^8 + u^9 + 2u^{10}$
(3)	$+ u^4 - u^5$	$- u^4 - 4u^5 - 2u^6$	$- 2u^4 - u^5 + 18u^6 - 11u^7 - 2u^8 + u^9$	$- u^7 + . + . + u^{10}$
$(3, 3)$	$+ u^3$	$+ u^2 - 3u^3 - 5u^4 - u^5 + u^6$	$- 2u^3 + u^4 + 11u^5 - 7u^6$	$u^7 + u^8 + u^9$
$(4, 2)$	$+ u^3$	$- u^3 - 2u^4 - 2u^5$	$- u^3 - 2u^4 + 11u^5 - 5u^6 - u^7$	.
$(5, 1)$	.	.	$- u^4 + 5u^5 - 4u^6 + u^7$	.
(6)	.	.	$+ u^5 - u^6 + u^7$	.
$(5, 4)$	.	$- 2u^3 - u^4$	$- u^2 + . + 4u^4 - 2u^5$	.
$(6, 3)$	.	.	$- u^3 + 2u^4 - u^5$	.
$(7, 2)$	.	.	$+ u^4 - u^5$	.
$(6, 6)$	.	$- u^3$	u^3	.

	ξ^1	ξ^4	ξ^7	ξ^{10}
(1, 1)	$+2u^2+.+4u^4+.-u^6$	$+2u^3-u^4-27u^5+21u^6+7u^7-2u^8-.$	$+3u^6-3u^7-10u^8-6u^9+u^{10}$	$-2u^7+3u^8+u^9$
(2)	$+u^2+.+2u^4+u^5$	$+u^3+2u^4-19u^5+11u^6+7u^7-u^8-u^9$	$+u^6-u^7-6u^8-3u^9$	$-u^7+u^8+u^9$
(3, 2)	$+u+.+2u^3+u^4$	$+u^2+2u^3-18u^4+12u^5+5u^6-2u^7$	$+2u^5-u^6-4u^7-3u^8$	$-u^6+u^7+u^8$
(4, 1)	.	$+u^3-7u^4+5u^5+2u^6-u^7$	$+u^5-u^6-2u^7-u^8$	.
(5)	.	$.-2u^4+2u^5+u^6-u^7$	$+u^5$	.
(4, 4)	$+u^3$	$+3u^2-9u^3+4u^4+2u^5$	$-u^7$	$+u^7$
(5, 3)	.	$+u^2-5u^3+4u^4$	$-u^5-u^6-u^7$	.
(6, 2)	.	$-u^3+u^4$	.	.
(6, 5)	.	$+u-2u^2+u^3$	.	.
(7, 4)	.	$-u^2+u^3$	.	.

	ξ^2	ξ^5	ξ^8
(1)	$+9u^4-9u^5-8u^6+3u^7$	$-4u^5+5u^6+17u^7+4u^8-u^9$	$+4u^6-2u^7-16u^8+6u^9+u^{10}$
(2, 2)	$+6u^3-4u^4-7u^5+u^6+u^7$	$-u^4+3u^5+10u^6+4u^7-.$	$+2u^5+u^6-11u^7+3u^8+u^9$
(3, 1)	$+4u^3-4u^4-3u^5+u^6$	$-2u^4+4u^5+8u^6+2u^7-u^8$	$+2u^5-2u^6-6u^7+3u^8$
(4)	$+u^3-u^4-u^5$	$u^5+2u^6+u^7$	$+u^5-u^6-2u^7+u^8$
(4, 3)	$+2u^2-u^3-3u^4+u^5$	$-u^3+u^4+4u^5+2u^6$	$+u^4+.-3u^6+u^7$
(5, 2)	$+u^2-u^3-u^4+u^5$	$-u^3+.+2u^5+u^6$	$+u^4-u^5-2u^6+u^7$
(5, 5)	$-u^3$	$u^3+u^4+u^5$	.
(6, 4)	$-u^3$	$+u^5$	$-u^5$

H'. Coefficient auprès de η^7.

	ξ^0	ξ^3	ξ^6	ξ^9
(1)	$+ u^3 - u^4 - . - u^6$	$- 6u^4 - 2u^5 + . + 6u^7 + 2u^8$	$+ u^6 + 6u^7 - 21u^8 - u^9$	$+ 6u^9 + 2u^{10}$
(2, 2)	$+ u^2$	$- 4u^3 - 2u^4 + . + 4u^6 + 2u^7$	$+ 2u^5 + 6u^6 - 14u^7 - 3u^8$	$+ 4u^8 + 2u^9$
(3, 1)	.	$- 2u^3 - u^4 + . + 2u^6 + u^7$	$+ u^5 + 3u^6 - 9u^7 + . - u^9$	$+ 2u^8 + u^9$
(4)	.	.	$+ u^5 + u^6 - 3u^7$	.
(4, 3)	.	$- u^2 - u^3 + . + u^5 + u^6$	$+ 2u^5 - 4u^6 - u^7$	$+ u^7 + u^8$
(5, 2)	.	.	$- 3u^6$	.
(5, 5)	.	.	$+ u^4$	.
(6, 4)	.	.	$+ u^4 - u^5$	.

	ξ^1	ξ^4	ξ^7	ξ^{10}
(0) = 1	$- 2u^5 - 2u^6 - 2u^7$	$- 5u^5 + 13u^6 + 10u^7 + 3u^8$	$- 2u^7 - 12u^8 - 16u^9 + 10u^{10} + 2u^{11}$	$+ 5u^{10} - u^{11} - u^{12}$
(2, 1)	$- u^4 - u^5 - u^6$	$- 2u^4 + 8u^5 + 7u^6$	$- u^6 - 9u^7 - 10u^8 + 7u^9 + u^{10}$	$+ 3u^9 - u^{10}$
(3)	.	$4u^5 + 4u^6 + . - u^8$	$- 6u^7 - 4u^8 + 4u^9$	$+ u^9 - u^{10}$
(3, 3)	.	$- u^3 + 3u^4 + 5u^5 - u^6 + u^7$	$- 4u^6 - 4u^7 + 2u^8$	$+ u^8$
(4, 2)	.	$- u^3 + 2u^4 + 4u^5$	$- 4u^6 - 3u^7 + 2u^8$	$+ u^8$
(5, 1)	.	.	$- 2u^6 - u^7 + u^8$	.
(6)	.	.	.	.
(5, 4)	.	$u^3 + 2u^4$	$- u^5 - u^6$	.
(6, 3)	.	.	$- u^5 - u^6$	.
(6, 6)	.	u^3	.	.

	ξ^2	ξ^5	ξ^8
(1, 1)	$-3u^3-3u^4-4u^5+u^6$	$+2u^5+20u^6-2u^7-8u^8-2u^9$	$-u^7-5u^8+3u^9+5u^{10}+u^{11}$
(2)	$-u^3-3u^4-3u^5$	$+2u^5+14u^6+.-6u^8-2u^9$	$-u^7-6u^8+2u^9+5u^{10}$
(3, 2)	$-u^2-2u^3-u^4+.+u^6$	$+u^4+10u^5+u^6-5u^7-u^8$	$-3u^7+3u^8+2u^9$
(4, 1)	.	$+u^4+4u^5+u^6-2u^7-u^8$	$-3u^7+u^8+u^9$
(5)	.	.	$-u^7+u^8$
(4, 4)	$-u^2-u^3$	$4u^4+2u^5-2u^6$	$-2u^6+u^7$
(5, 3)	.	$2u^4+u^5-u^6$	$-u^6$
(6, 2)	.	.	$-u^6$
(6, 5)	.	u^3+u^4	.

I'. Coefficient auprès de η^8.

	ξ^0	ξ^3	ξ^6	ξ^9
(1, 1)	$-u^5-u^6$	$-2u^4+3u^5+2u^6+5u^7+u^8$	$u^5+3u^6-9u^7-7u^8+4u^9+u^{10}$	$+2u^9+.-3u^{11}$
(2)	$-u^5$	$+u^5+u^6+3u^7+2u^8$	$2u^5+3u^6-11u^7-2u^8+4u^9$	$+u^9+u^{10}-u^{11}$
(3, 2)	.	$-u^3+.+u^5+2u^6+u^7$	$u^4+u^5-5u^6-u^7+u^8$	$+u^8+u^9-u^{10}$
(4, 1)	.	.	$+2u^5-4u^6+.+u^8$	.
(5)	.	.	$-u^6+u^7$	.
(4, 4)	.	$+u^5+u^6$	$u^3+.-2u^5$	$+u^8$
(5, 3)	.	.	$+u^4-u^5-u^6$	.
(6, 2)	.	.	$-u^5$	.

	ξ^1	ξ^4	ξ^7	ξ^{10}
(1)	$-u^3+.-2u^5-u^6-u^7$	$-u^4-2u^5+14u^6-2u^7-3u^8-u^9$	$-u^7-4u^8-2u^9+9u^{10}+u^{11}$	$+u^8-u^9-u^{11}$
(2, 2)	$-u^2+.-u^4-u^5-u^6$	$-u^3-3u^4+13u^5-u^6-5u^7$	$-2u^7-3u^8+4u^9+u^{10}$	$+u^7$
(3, 1)	.	$-2u^4+6u^5+u^6-2u^7-u^8$	$-2u^7+.+4u^9$	.
(4)	.	$+2u^5+.-u^7$	$-u^7-u^8+u^9$	.
(4, 3)	.	$-2u^3+4u^4+.-u^6$	$-u^6-u^7+u^8$	.
(5, 2)	.	$+u^4-u^5$	$-u^6-u^7+u^8$	.
(5, 5)	.	$-u^2+u^3+u^4$	.	.
(6, 4)	.	$+u^3$	$-u^6$	.

	ξ^2	ξ^5	ξ^8
(0) = 1	$-6u^5+.+6u^7$	$.+6u^7-6u^8-6u^9-3u^{10}$	$-3u^7-3u^8+9u^9$
(2, 1)	$-3u^4+.+2u^6+u^7$	$+u^5+4u^6-4u^7-6u^8-u^9$	$-u^6-u^7+4u^8+u^9$
(3)	$-u^4+u^5$	$+u^5+2u^6+.-3u^8-u^9$	$-u^6+u^7+u^8$
(3, 3)	$-u^3-u^4+u^5+u^6$	$+2u^5-u^6-4u^7$	$-u^6+u^7+u^8$
(4, 2)	$-u^3+.+u^5$	$+u^5+u^6-2u^7-u^8$	$-u^5+.+u^7$
(5, 4)	.	$+u^4+u^5-u^6$	.
(6, 6)	.	$+u^4$	.

H'. Coefficient auprès de η^7.

	ξ^0	ξ^3	ξ^6	ξ^9
$(\,) = 1$	$-u^4 - u^6 - u^8$	$+2u^5 + 2u^6 + 2u^7$	$-u^7 - 5u^8 + 6u^9 + 2u^{10} + . + u^{12}$	$-2u^{10} - 2u^{11} - 2u^{12}$
(2, 1)	.	$+ u^4 + u^5 + u^6$	$-2u^7 + 3u^8 + u^9 + u^{10}$	$- u^9 - u^{10} - u^{11}$
(3)	.	.	$2u^8 + . + u^{10}$	.
(3, 3)	.	.	$- u^6 + . + u^8$	.
(4, 2)	.	.	$- u^6 + u^7$	.

	ξ^1	ξ^4	ξ^7	ξ^{10}
(1, 1)	.	$+u^5 - 2u^6 - 2u^7 - u^8 - u^9$	$+2u^8 + 6u^9$	$-u^{10} - u^{11}$
(2)	.	$+u^5 - u^6 - 2u^7 - u^8 - . - u^{10}$	$+2u^8 + 4u^9$	$-u^{10}$
(3, 2)	.	$- u^5 - 2u^6 - . - u^8$	$+ u^7 + 2u^8$	.
(4, 1)	.	.	$+ u^7 + u^8$	.
(4, 4)	.	$- u^5$	.	.

	ξ^2	ξ^5	ξ^8
(1)	$+u^4 + u^5 + 2u^6 + . + u^8$	$-6u^7 - 2u^8$	$+ u^9 + u^{10} - 2u^{11} - u^{12}$
(2, 2)	$+u^4 + u^5 + u^6 + . + u^8$	$-4u^6 - 2u^7$	$+2u^8 + . - u^{10}$
(3, 1)	.	$-2u^6 - u^7$	$+ u^8 + u^9 - u^{10}$
(4)	.	.	$+ u^8$
(4, 3)	.	$- u^5 - u^6$	.

Sur des quartiques elliptiques planes, spéciales au point de vue projectif.

Par

B. BYDŽOVSKÝ.

(Résumé français du texte original tchèque.)

Présenté le 28 novembre 1924.

Je me suis proposé, dans une communication[1]) faite au congrès international des mathématiciens à Strasbourg, d'étudier à fond les transformations quadratiques de la quartique elliptique plane. Dans plusieurs travaux antérieurs[2]) j'ai traité notamment la courbe générale de cette espèce, ainsi que les courbes qui admettent un nombre moindre de transformations que dans le cas général. Dans le travail actuel, j'étudie à fond les quartiques elliptiques qui admettent un nombre de ces transformations supérieur à celui du cas général.

La condition nécessaire pour qu'une quartique elliptique plane se reproduise par un nombre de transformations quadratiques supérieur à neuf (ce qui est le cas général), est donnée par une des relations

$$4\,(a_1 + b_1) \equiv 0 \quad (1\,a), \qquad 2\,(a_1 - b_1) \equiv 0 \quad (1\,b), \qquad 2\,(a_1 + a_2) \equiv 0 \quad (1\,c).$$

Considérons d'abord la relation 1a). Si elle est remplie, aussi cette autre relation

$$4\,(a_2 + b_2) \equiv 0$$

a lieu. On peut exclure le cas

$$2\,(a_1 + b_1) \equiv 0$$

---

[1]) „*Sur les transformations quadratiques reproduisant une quartique elliptique plane.*“

[2]) Je n'en citerai que deux: (1) „*Sur les transformations quadratiques d'une quartique plane générale de genre un*“, Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême 1922. (2) „*Réduction du nombre de transformations quadratiques d'une quartique elliptique plane*“. Bulletin etc. 1922. Dans le texte, je fais usage de la notation, ainsi que des résultats de ces deux travaux; je les citerai, tout court, par (1) et (2).

qui correspond à la courbe au point tacnodal, ce cas ayant été épuisé dans le travail (2) (v. la remarque 1) ci-dessus). Par conséquent, $a_1 + b_1$ est congruent à un quart de période.

La courbe qui satisfait à la relation 1 *a*) est caractérisée, d'une manière univoque, par le fait géométrique qu' *elle est engendrée par deux involutions de faisceaux projectives.*

Ce théorème démontre l'existence de cette courbe spéciale.

Les inversions ayant leurs centres aux points doubles, c. à d., les inversions $[a_1 + b_1]$, $[a_2 + b_2]$ ont, pour cette courbe, la propriété que leurs coniques directrices dégénèrent; cette propriété est caractéristique, en ce sens qu'une quartique elliptique, pour laquelle une des deux inversions mentionnées a cette propriété particulière, est une quartique spéciale de l'espèce considérée.

Cette propriété a une conséquence importante; ces inversions n'ont que deux points principaux, à savoir, les points doubles de la courbe, l'un de ces points étant principal double. Donc, elles possèdent les mêmes points principaux que les sept transformations quadratiques du groupe G_8 et conduisent, si l'on les compose avec ces transformations, à de nouvelles transformations quadratiques reproduisant la courbe. Si l'on suppose, pour fixer les idées, que

$$a_1 + b_1 \equiv \frac{\omega_1}{2},$$

de sorte que les deux inversions dont il s'agit soient données par les symboles $\left[\frac{\omega_1}{2}\right]$, $\left[\frac{3\,\omega_1}{2}\right]$, on trouve de suite que les nouvelles transformations quadratiques reproduisent la courbe suivant les correspondances que voici:

$$\left[\frac{\omega_1}{2} + \omega_2\right],\ \left[\frac{\omega_1}{2} + \omega_3\right],\ \left(\frac{\omega_1}{2}\right),\ \left(\frac{3\,\omega_1}{2}\right),\ \left(\frac{\omega_1}{2} + \omega_2\right),\ \left(\frac{\omega_1}{2} + \omega_3\right).$$

Il est facile de démontrer que toutes les transformations quadratiques que l'on obtient de cette sorte, forment un groupe G_{16}, et qu'il n'y a pas d'autres transformations quadratiques reproduisant cette courbe spéciale. Une étude approfondie des transformations de ce groupe donne le résultat fondamental suivant:

La quartique elliptique spéciale qui satisfait à la condition

$$4\,(a_1 + b_1) \equiv 0,$$

se reproduit par un groupe de seize transformations quadratiques (y compris l'identité). Toutes ont les points doubles D_1, D_2 de la courbe pour deux de leurs points principaux. Parmi ces transformations:

a) quatre, à savoir $[\omega_i]$ pour $i = 0, 1, 2, 3$,[3]) sont des inversions ayant leurs centres O_i hors de la courbe;

[3]) Je pose $\omega_0 = 0$.

b) Trois involutions quadratiques de la deuxième espèce (c. à d., qui ne sont pas des inversions), à savoir (ω_i) *pour* $i = 1, 2, 3$, *lesquelles on obtient en composant les inversions du cas a), et dont les troisièmes points principaux, situés hors de la courbe, sont les sommets diagonaux du quadrilatère des quatre points* O_i;

c) deux inversions, à savoir $(a_1 + b_1)$, $(a_2 + b_2)$, *dont chacune a son centre dans un point double de la courbe et dont les coniques directrices dégénèrent en deux couples de droites unies d'une involution du cas b);*

d) deux involutions quadratiques de la deuxième espèce dont le troisième point principal est, pour l'une $(\overline{D_1 S_3}, \overline{D_2 S_2})$, *pour l'autre* $(\overline{D_1 S_2}, \overline{D_2 S_3})$;

e) quatre transformations quadratiques circulaires de l'ordre quatre, inverses deux à deux, et dont le carré est le même; le troisième point principal est, pour l'une d'elles, $(\overline{D_1 O_0}, \overline{D_2 O_1})$, *pour son inverse* $(\overline{D_1 O_1}, \overline{D_2 O_0})$; *pour une troisième* $(\overline{D_1 O_0}, \overline{D_2 O_3})$ *et pour son inverse* $(\overline{D_1 O_3}, \overline{D_2 O_2})$.

On voit de là que ce groupe est isomorphe à un sous-groupe du groupe de 32 homographies par lesquelles se reproduit la quartique elliptique gauche.

Pour approfondir l'étude de cette courbe spéciale, il faut considérer, sous un point de vue analogue, la cubique plane et résoudre, d'abord, le problème suivant:

Étant donnés deux points D_1, D_2 d'une cubique plane, déterminer toutes les transformations quadratiques involutives ayant ces deux points pour points principaux et reproduisant la cubique.

On établit d'abord le lemme:

Une cubique se reproduit par toute inversion dont le centre se trouve sur la courbe et dont la conique directrice est une conique quelconque passant par tous les points de contact des tangentes menées à la cubique par le centre choisi.

En appliquant ce théorème, on aboutit à la solution du problème proposé, exprimée par le théorème que voici:

Étant donnés deux points arbitraires sur la cubique, il existe, en général, un groupe G_8 *de transformations quadratiques par lesquelles cette courbe se reproduit et pour lesquelles ces deux points sont des points principaux. Il y a en outre, deux transformations quadratiques de cette sorte, mais qui n'appartiennent pas, en général, avec* G_8 *à un groupe plus étendu.*

Si l'on exige que les deux dernières transformations de ce théorème appartiennent, avec G_8, à un groupe plus étendu, on arrive à cette condition simple que les deux points D_1, D_2 soient conjugués sur la courbe (c. à d., qu'ils possèdent le même point tangentiel). S'il en est ainsi, il existe un groupe G_{16} reproduisant la cubique et dont les transformations possèdent les deux points principaux D_1, D_2. Donc, on arrive à un résultat absolument analogue à celui trouvé plus haut pour la quartique. En effet, le groupe G_{16} est le même que celui trouvé pour la quartique.

À l'aide de ces résultats concernant les cubiques planes, on peut démontrer le théorème qui est, en un certain sens, l'inverse du théorème fondamental:

Si l'on adjoint, à un groupe donné G_8, par lequel se reproduit une quartique elliptique générale, une des trois inversions pour lesquelles D_1 (D_2) est le centre et la conique directrice le couple de rayons unis d'une involution de la deuxième espèce du groupe, passant par le point D_2 (D_1), on obtient un groupe de l'espèce considérée tout à l'heure. De plus, il existe un faisceau de quartiques spéciales qui se reproduisent par les transformations de ce groupe nouveau.

Comme corollaires, on obtient encore les théorèmes suivants:

Étant donnée une quartique spéciale reproduite par un groupe G_{16}, on peut affirmer qu'il existe un faisceau de telles quartiques se reproduisant, de même, par ce groupe.

Dans le réseau de quartiques elliptiques qui se reproduisent par un groupe donné G_8, il y a trois faisceaux de ces courbes qui se reproduisent par des groupes du seizième ordre.

Si l'on adjoint au groupe G_8 les trois inversions possibles, on obtient, comme on s'en rend compte par une analyse détaillée, un groupe de 32 transformations quadratiques (y compris l'identité), isomorphe au groupe de 32 homographies reproduisant une quartique elliptique gauche.

Passons à la condition 1*b*). La propriété caractéristique de la courbe spéciale respective consiste en ce qu'un des points S_i (troisième point principal de l'involution (ω_i)) coïncide avec le point D_1. Mais il est facile de voir qu'il n'y a pas, pour cette courbe spéciale, d'autres transformations quadratiques que celles du cas général.

Il en est autrement pour la condition 1*c*). On peut toujours supposer la solution de cette condition sous la forme

$$a_2 \equiv -a_1, \quad \text{d'où:} \quad b_2 \equiv -b_1.$$

Ces relations fournissent les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'inversion [0] se réduise a une homologie involutive. Son centre est situé sur la droite joignant les deux points doubles. Son axe contient les centres des trois autres inversions du groupe; mais, dans ce cas spécial, ces points sont aussi points principaux des involutions (ω_i).

En s'appuyant sur les résultats généraux, obtenus ci-dessus pour la cubique, on démontre d'abord que même pour cette configuration, tout à fait particulière, des points principaux, le groupe respectif G_8 existe et qu'il y a, aussi, des quartiques elliptiques qui se reproduisent par ce groupe. Ce sont, en effet, des quartiques satisfaisant à la relation 1*c*). Or, si l'on compose l'homologie [0] avec les inversions $[a_1 + b_1]$, $[a_2 + b_2]$, on obtient deux transformations quadratiques $(a_1 + b_1)$, $(a_2 + b_2)$ qui sont distinctes de celles contenues dans le groupe G_8. On démontre aisément qu'il n'y en a pas d'autres, de sorte qu'on peut énoncer le théorème:

La courbe spéciale, satisfaisant à la relation

$$2\,(a_1 + a_2) \equiv 0$$

se reproduit par dix transformations quadratiques et, en outre, par une homographie.

Une question se pose tout naturellement dans cet ordre d'idées: puisque la courbe considérée se reproduit par le groupe G_8 et, de plus, par quatre transformations quadratiques, dérivées, en partie, de l'homologie [0], se peut-il que les transformations contenant les correspondances

$$(0), \quad [0], \quad (a_1 + b_1), \quad (a_2 + b_2), \quad [a_1 + b_1], \quad [a_2 + b_2]$$

forment un groupe? On trouve facilement que

la relation $$3\,(a_1 + b_1) \equiv 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que cela ait lieu. On démontre, par une projection convenable de la quartique gauche, que la courbe spéciale respective existe. On a trouvé, ainsi, un cas intéressant d'une quartique se reproduisant par deux groupes distincts de transformations quadratiques, ayant un sous-groupe du 2^e ordre commun, et dont l'un contient huit, l'autre six transformations (y compris l'identité). On peut caractériser géométriquement cette courbe de différentes manières; une propriété caractéristique intuitive est donné par le théorème:

La quartique elliptique qui se reproduit par deux groupes mentionnés tout à l'heure est caractérisée par ce fait que les tangentes aux points doubles se coupent sur la courbe.

Pour obtenir de nouveaux types de quartiques elliptiques, spéciales au point de vue des transformations, on peut combiner les cas qui viennent d'être considérés. La relation 1*a*), appliquée deux fois, ne donne lieu à aucun cas nouveau, les relations

$$4\,(a_1 + b_1) \equiv 0, \quad 4\,(a_2 + b_2) \equiv 0$$

étant valables simultanément. Il n'en est pas ainsi pour 1*b*), puisque les relations

$$2\,(a_1 - b_1) \equiv 0, \quad 2\,(a_2 - b_2) \equiv 0 \tag{1}$$

sont indépendantes. Plusieurs cas se présentent ici:

a) Si $$a_1 \equiv b_1, \quad a_2 \equiv b_2,$$

la courbe a deux points de rebroussement; de plus, la relation

$$2\,(a_1 + a_2) \equiv 0$$

a lieu, en ce cas, ce qui veut dire, comme on a démontré plus haut, qu'une inversion du groupe se réduit à une homographie. On en déduit le théorème:

La quartique à deux points de rebroussement se reproduit par dix transformations quadratiques et une homographie.

Et encore celui-ci:

La condition nécéssaire et suffisante pour que les transformations du théorème précédent appartiennent à deux groupes est que les tangentes aux points de rebroussement se coupent sur la courbe.

On se rend facilement compte que l'équation de cette courbe peut être mise sous la forme:

$$a\,x_1^2\,x_2^2 + x_3^2\,(b\,x_1\,x_2 + c\,x_1\,x_3 + d\,x_2\,x_3) = 0 \qquad (2)$$

b) Les deux congruences ont une même solution qui n'est pas congruente à zéro, soit

$$b_1 \equiv a_1 + \omega_1,\ b_2 \equiv a_2 + \omega_1.$$

La courbe respective jouit de propriétés fort intéressantes: deux inversions du groupe, ainsi que l'involution qui est leur produit, sont des homologies; les deux inversions qui restent ont communs tous les points principaux, de sorte que, par ex. $O_2 \equiv O_3$. Tandis que, pour la quartique elliptique générale, par chaque point O_i passent deux tangentes doubles, dans ce cas-ci, il y a quatre tangentes doubles passant par le point O_2. On peut mettre l'équation de la courbe sous la forme

$$a\,x_1^2\,x_2^2 + b\,(x_1^2 + x_2^2)\,x_3^2 + c\,x_1\,x_2\,x_3^2 + d\,x_3^4 \equiv 0 \qquad (3)$$

Cette courbe se reproduit par trois homologies et par douze transformations quadratiques.

On démontre, comme on l'a fait dans un des cas précédents, que ces transformations sont contenues dans deux groupes (un G_8, un G_{12}), ayant commun un sous-groupe du 4^e ordre, si les tangentes aux points doubles se coupent sur la courbe; et inversement. Cette courbe plus spéciale est encore donnée par l'équation (3) à la condition que

$$\pm\, b\,c = b^2 - a\,d.$$

c) Si, enfin, les deux conditions ont des solutions différentes, il n'y a rien d'extraordinaire au point de vue des transformations.

Une autre combinaison des relations considérées est celle, où les relations 1*a*), 1*b*) ont lieu simultanément. En ce cas, la courbe se reproduit par un groupe G_{16} (par suite de la condition 1*a*)); la condition 1*b*) n'a pour conséquence qu'une spécialisation des transformations quadratiques de ce groupe. Il en est de même des conditions 1*a*) et 1*c*). La combinaison 1*b*) avec 1*c*) est contenue dans un des cas précédents.

Si trois des conditions 1*a*), 1*b*), 1*c*) sont satisfaites à la fois et si, dans une combinaison de cette sorte, figure la relation 1*a*), aucune nouvelle transformation ne se produit; la combinaison 1*b*), 1*b*), 1*c*) est, au fond, la même, que la combinaison 1*b*), 1*c*).

Ainsi, tous les cas possibles sont épuisés.

La benzoylméthylglyoxime, précipitant spécifique des sels de palladium.

Par

J. HANUŠ, A. JÍLEK ET J. LUKAS.

Présenté le 24 Octobre 1924.

Les auteurs étudient les glyoximes bisubstituées (à un ou deux groupes acyles) au point de vue de leur application à la séparation des métaux du 8ième groupe naturel.

Ils trouvent dans la benzoylméthylglyoxime $C_6H_5CO.C - C.CH_3$, (NOH, NOH) obtenu pour la première fois par Ceresole (B. B. 1884, *17*, 812), un excellent moyen pour précipiter le palladium. En présence d'ammoniaque, ce réactif donne avec les sels de cobalt, de nickel et de manganèse un faible précipité soluble dans un excès d'ammoniaque ; en milieu légèrement acidulé, il n'y a aucune précipitation. Le platine fournit un faible précipité seulement en liqueur neutre ou légèrement acide, tandis que dans des solutions dont la teneur en HCl dépasse 2·5 p. 100, il ne précipite pas du tout. Il en est de même pour les autres éléments de la famille du platine à l'exception du palladium (qui précipite indifférement en liqueur neutre ou acide), et pour les métaux communs.

Il en résulte que la benzoylméthylglyoxime constitue, en milieu faiblement chlorhydrique, un précipitant spécifique du palladium.

Le dérivé palladeux de la benzoylméthylglyoxime se sépare des solutions palladeuses à l'état de pureté. C'est un précipité d'une belle couleur jaune, fondant à 254—256° C avec décomposition partielle. Il renferme 1 atome de palladium pour 4 atomes d'azote, ce qui correspond à la formule

$$\begin{array}{c} C_6H_5.CO.C = NO-Pd-ON = C.CO.C_6H_5 \\ \quad\quad | \quad\quad\quad\quad\quad\quad | \\ CH_3.C = NOH \quad\quad HON = C.CH_3, \end{array}$$

analogue aux autres glyoximines bisubstituées.

La réaction est d'une sensibilité remarquable: 1 partie de Pd dans 10 millions de parties d'eau donne, au bout de 24 heures, un trouble jaune très appréciable.

Des essais quantitatifs ont montré, d'autre part, que la benzoylméthylglyoxime se prête trés bien au dosage pondéral du palladium. En effet, aucun des cations métalliques non précipitables par Cl′ ne gêne le dosage.

Voici, à titre de document, les résultats obtenus dans le dosage gravimétrique du palladium au moyen de la benzoylméthylglyoxime:

Pd mis en oeuvre gr	Autres métaux présents	Produit glyoximique		Pd trouvé gr	Écart mgr
		calculé	trouvé		
0·0076	—	0·0368	0·0360	0·0074	—0·2
0·0607	—	0·2942	0·2946	0·0608	+0·1
	Au				
0·0015	0·0918	0·0073	0·0075	0·0015	ø
0·0379	0·0073	0·1839	0·1850	0·0382	+0·3
	Pt				
0·0015	0·0412	0·0073	0·0077	0·0016	+0·1
0·0304	0·0082	0·1473	0·1481	0·0306	+0·2
	Os				
0·0015	0·0838	0·0073	0·0076	0·0016	+0·1
	Ru, Rh. Ir				
0·0152	0·0112	0·0737	0·0766	0·0158	+0·6
0·0015	As, Sb, Sn	0·0073	0·0076	0·0016	+0·1
0·0015	MoO_4'' WO_4'', VO_3'	0·0073	0·0076	0·0016	+0·1
0·0076	Bi, Cu, Cd, Hg^{II}	0·0737	0·0374	0·0077	+0·1
0·0076	Ni, Co, Zn, Fe, Cr, Mn, U	0·0737	0·0374	0·0078	+0·2

Mode opératoire: 100 à 250 *cc* d'une solution palladeuse neutre ou légèrement acidulée (renfermant par exemple 1 *cc* de HCl concentré pour 100 *cc* de solution) sont portés à l'ébullition, puis additionnés d'un excès (40 p. 100 en sus de la quantité théorique) d'une solution alcoolique de benzoylméthylglyoxime à 2 p. 100. On continue de chauffer quelques minutes, et on abandonne le tout pendant 12 heures. On recueille le précipité sur un creuset de Gooch desséché à 100°), on le lave d'abord avec 200 *cc* d'eau légèrement chlorhydrique (contenant environ 2·5 *cc* de HCl concentré pour 100 *cc* d'eau), puis avec de l'eau distillée, jusqu'à plus de

réaction de Cl′. Ceci fait, le précipité est séché à 100—105° C jusqu'à poids constant. Le poids trouvé, multiplié par 0·2064, donne le palladium.

Voilà comment on opère, lorsqu'il y a palladium seul ou à côté de Cu, Cd, Hg, Au, Os, Ir, Ru, Rh. On procède différemment, quand on se trouve en présence de Pt, Co, Ni, Mn ou de chlorures aisément hydrolysables, tels que $BiCl_3$, $SbCl_3$, $SnCl_4$, $FeCl_3$, $AlCl_3$, $ZnCl_2$. En ce cas, il devient indispensable d'augmenter l'acidité de la liqueur à 2·5 p. 100 de HCl au minimum. Lorsque la liqueur renferme, à côté de Pd, de l'antimoine, l'addition d'une petite quantité d'acide tartrique est avantageuse, car, dans ce cas, il suffit d'une quantité bien moindre de HCl pour maintenir l'antimoine en solution. En présence des anions MoO_4'', WO_4'' et VO_3', on ajoute à la liqueur chlorhydrique un peu de KH_2PO_4 (environ 0·5 *g* pour 100 *cc* de liquide) pour empêcher la précipitation éventuelle des acides respectifs.

Note sur la construction de la conique osculatrice d'une courbe plane.

Par

J. SOBOTKA.

Présenté le 28 avril 1922.

1. Il s'agit de résoudre le problème suivant:

„On connaît pour un point donné P de la courbe plane ϕ le 1er, le 2e et le 3ème centre de courbure, soit K, K_1, K_2; on demande de construire la conique u qui a avec ϕ au point P le contact du quatrième ordre."

J'ai fait des recherches sur cette construction depuis un certain temps,[1]) tandis qu'une autre construction avait déjà été publiée par Mannheim;[2]) j'ai même indiqué quels rapports il y avait entre les deux constructions. Or, la construction de Mannheim peut être simplifiée encore d'avantage, comme il est montré dans cette note.

Si l'on fait le vecteur $K K_1'$ égal au tiers du vecteur $K_1 K$, $P K_1'$ devient, comme on sait, le diamètre de toutes les coniques qui ont avec ϕ au point P le contact du troisième ordre.

Amenons maintenant le triangle $P K K_1'$ dans une position infinement rapprochée (P) (K) (K_1') par un mouvement tel que le point P décrit la courbe ϕ, le point K la première devéloppée k de la courbe ϕ et le côté $P K$ reste sans cesse tangent à k, tandis que le côté $K K_1'$ reste toujours tangent à la deuxième devéloppée k_1 de la courbe ϕ; le centre O de la conique u est alors le point d'intersection des droites $P K_1'$, (P) (K_1'); O est donc le point dans lequel la droite $P K_1'$ touche son enveloppe. Les positions nouvelles des vecteurs $K P$, $K_1 K_1'$ forment avec les positions primitives des angles τ, égaux entre eux et de même sens.

Tout d'abord, on peut construire au point K_1' la normale $K_1' K_2'$ de la courbe k' que décrit le point K_1'. Si K_2' représente le point d'inter-

---

[1]) Zur Krümmung der Kegelschnittevoluten .... Sitzungsber. der k. böhmischen Gesell. d. Wissensch. 1902.

[2]) A. Mannheim: Principes et développements de géom. cinématique, Paris 1894, p. 51.

section de la normale $K_1' K_2'$ avec la droite $K_1 K_2$, on a d'après la formule connue de d'Ocagne[3])

$$d\,\overline{K_1 K_1'} = \overline{K_2 K_2'}\, d\,\tau$$

et par analogie

$$d\,\overline{K_1 K} = \overline{K_2 K_1}\, d\,\tau.$$

Or, comme pour chaque position on a

$$\overline{K_1 K_1'} = \tfrac{4}{3}\,\overline{K_1 K},$$

on déduit de ces équations que

$$\overline{K_2 K_2'} = \tfrac{4}{3}\,\overline{K_2 K_1}.$$

Si l'on fait alors

$$\overline{K_1 K_2'} = \tfrac{1}{3}\,\overline{K_2 K_1},$$

on obtient la normale demandée $K_1' K_2'$.

Si l'on désigne par $d\,s$ le différentiel de l'arc d'une courbe quelconque s, on peut écrire en vertu d'une autre formule de d'Ocagne[4])

$$d\,k' = \overline{K_1' K_2'}\, d\,\tau.$$

Si la droite menée en O perpendiculairement à la droite $P K_1'$ coupe la normale $K_1' K_2'$ de la courbe k' au point L et la normale $P K$ de la courbe p au point M, on a d'après la même formule de d'Ocagne

$$\frac{d\,p}{d\,k'} = \frac{P M}{K_1' L}.$$

Mais puisqne $d\,p = \overline{P K}\, d\,\tau$, on obtient les égalités

$$\frac{d\,p}{d\,k'} = \frac{P K}{K_1' K_2'} = \frac{P M}{K_1' L}.$$

Si l'on tient compte du sens du mouvement, l'orientation des arcs $d\,p$, $d\,k'$ est la même; il faut donc prendre positivement les valeurs des deux dernières équations, de sorte qu'on a

$$\frac{\varepsilon\, P K}{\varepsilon\, K_1' K_2'} = \frac{\varepsilon'\, P M}{\varepsilon'\, K_1' L},$$

où ε, aussi bien que ε' prennent arbitrairement une des valeurs $+1$, -1. Il en résulte que les rapports $(K M P)$, $(K_2' L K_1')$ sont égaux entre eux et les droites $K P$, $K_2' K_1'$, $K K_2'$, $M L$, $P K_1$ sont par suite des tangentes d'une certaine parabole. Nous arrivons donc au résultat suivant:

---

[3]) Cf. M. d'Ocagne: Cours de géométrie pure et appliquée, T. L., p. 123 et les suivantes.

[4]) Cf. M. d'Ocagne: Cours de géométrie pure et appliquée T. L, p. 123 et les suivantes.

„Les droites sur lesquelles se trouvent les côtés d'un quadrilatère simple $P\,K\,K_2'\,K_1'$ déterminent comme tangentes une parabole et le pied de sa tangente perpendiculaire à la droite $P\,K_1'$ représente le centre O de la conique u."

2. Au même résultat nous conduisent aussi les considérations suivantes.

Décrivons autour du point K_2' comme centre une circonférence a, avec le rayon $K_2'\,K_1'$ et autour du point K comme centre une autre circonférence b, avec le rayon $K\,P$. A un point A, situé sur a, indiquons comme point conjugué un point B sur b, tel qu'on ait, même en ce qui concerne le sens, $\sphericalangle\,(K_1'\,K_2'\,A) = \sphericalangle\,(P\,K\,B)$; les droites de jonction $A\,B$ envelopperont alors, en vertu de la proportion

$$d\,p : d\,k' = P\,K : K_1'\,K_2',$$

une courbe qui est tangente à la droite $P\,K_1'$ au point O. Considérons dans le plan M de la courbe p, les circonférences a, b comme des projections parallèles, de deux circonférences (a), (b) situées dans les plans parallèles à M. Les droites (A) (B) qui joignent ceux des points de (a) et (b) qui se projettent sur A et B engendreront alors un hyperboloïde à une nappe H.

Un autre plan quelconque parallèle à M coupera cet hyperboloïde H suivant la circonférence (c) et divisera les segments de ses droites, situés entre les circonférences (a) et (b), dans un rapport constant. Les centres des circonférences (a), (b), (c) seront placés sur une droite et le centre de la circonférence (c) coupera la distance des centres des circonférences (a) et (b) dans le même rapport. Parmi les circonférences c une, c_0, sera tangente à la droite $K_1'\,P$. Pour celle-ci, le point de contact sera sans doute le point chérché O. En effet, le plan tangent de l'hyperboloïde H en point correspondant (O) est un plan projetant. Si C_0 est le centre de la circonférence c_0, $C_0\,O$ est perpendiculaire à $K_1\,P$ et on peut appliquer la proportion:

$$P\,O : K_1'\,O = K\,C_0 : K_2'\,C_0,$$

ce qui fournit la preuve du théorème indiqué plus haut.

Si nous désignons les droites $K_2'\,K_1'$, $K_1'\,P$, $P\,K$, $K\,K_2'$, $L\,M$ et la droite du plan située à l'infini respectivement par les chiffres 1, 2, 5, 6, 3, 4, l'hexagone de Brianchon 1 2 3 4 5 6 nous conduit à la construction suivante:

„A la droite $K\,P$ on mène par le point K_1' une droite parallèle que l'on coupe en point N par la perpendiculaire à $K_1'\,P$ passant par K_2'; la droite $K\,N$ coupe alors la droite $P\,K_1$ au centre O demandé" (1).

Si l'on envisageait l'hexagone de Brianchon 2 1 6 5 3 4, on obtiendrait la construction suivante:

Coupons par la perpendiculaire abaissée de K_2' sur $P K_1'$ la droite passant par K et parallèle à $P K_1'$. La droite qui joint le point ainsi obtenu avec K_1' coupe $K P$ au point E duquel on abaise la perpendiculaire sur $P K_1'$. Le pied de cette perpendiculaire est le centre O demandé.

Cette dernière construction est plus compliquée que la construction précédemment citée. C'est précisément la construction à laquelle par une autre voie avait abouti Mannheim. En partant de la construction (1) on obtiendrait de même facilement la construction que j'ai indiquée dans l'article déjà cité.

3. Si l' on a la courbe p et une série de ses devéloppées $k, k_1, \ldots\ldots$, orientons d'abord sa tangente x au point P, de manière que sous l'orientation positive de la normale y, dans le sens allant du point P au point K, le système des axes rectangulaires $(P\,x\,y)$ soit orienté positivement, de sorte que nous prenons comme positif le rayon de courbure r au point P de la courbe p. Pour la devéloppée k nous gardons l'orientation de la tangente $P K$ et nous orientons la normale $K K_1$ de telle manière que le système des axes rectangulaires $x_1 = P K$, $y_1 = K K_1$ soit aussi orienté positivement, de sorte que le rayon $r_1 = K K_1$ répond au signe $+$ ou $-$, suivant qu' il se trouve sur la partie positive ou négative de l'axe y_1. De la même façon on est conduit à l'orientation de la normale $K_1 K_2$ et au signe du rayon $r_2 = K_1 K_2$.

Si, tenant compte de cette désignation, on exprime analytiquement la construction indiquée dans le système des axes rectangulaires $(P\,x\,y)$, on obtient aisément pour les coordonnées ξ, η du centre O les expressions suivantes:

$$\xi = \frac{3\,r^2\,r_1}{9\,r^2 - 3\,r\,r_2 + 4\,r_1^2}, \quad \eta = \frac{9\,r^3}{9\,r^2 - 3\,r\,r_2 + 4_1^2}.$$

On peut aussi facilement déduire l'équation de la conique u dans le système des axes rectangulaires $(P\,.\,X,\ Y)$.

Parceque u a à l'origine de P le rayon de courbure r, on peut mettre son équation sous la forme

$$2\,r\,y = x^2 + 2\,A\,x\,y + B\,y^2.$$

Or, nous déduisons de cette équation pour les coordonnées du centre les équations

$$\xi + A\,\eta = 0, \quad A\,\xi + B\,\eta - r = 0,$$

et on obtient par un simple calcul A et B, de sorte que l'équation de la courbe u est

$$(9\,r^2 - 3\,r\,r_2 + 4\,r_1^2)\,y^2 + (3\,r\,x - r_1\,y)^2 - 18\,r^3\,y = 0.$$

Si au contraire la conique u est donnée, la construction indiquée pour le point P fournit les points correspondants K_1, K_2.

Pour que la conique u soit une hyperbole équilatère, il faut que la somme des coefficients auprès de x^2 et y^2 dans cette équation soit égale à zéro. Nous obtiendrons alors la condition

$$r_2 = 6\,r + \frac{5\,r_1^{\,2}}{3\,r},$$

d'où l'on peut tirer en outre une construction spéciale du troisième centre de courbure de l'hyperbole équilatère u correspondant au point donné P sur cette hyperbole, comme il suit.

Coupons les parallèles menées par les points K_1' et K_1 à la normale $P\,K$ par une droite passant par O et perpendiculaire à la droite $O\,K_1'$. Soient L et Q_0 ses points d'intersection.

Le cercle au centre L passant par le point Q_0 coupe $K_1\,Q_0$ encore au point Q. On a alors $K_1\,K_2 = 3\,K_1\,Q$.

On vérifiera facilement cette construction en se servant de la propriété connue que le diamètre $O\,L$ de l'hyperbole equilatère u est conjungué à la normale $P\,K$ et que cette normale intercepte sur u une corde dont la longueur absolue est égale à $2\,r$.

4. Indiquons encore une généralisation simple de la devéloppée de la courbe plane qui consiste à remplacer les points de cercle situés à l'infini dans M par deux points quelconques J_1, J_2 de ce plan M. Si t est la tangente de la courbe ϕ au point P, à la normale des considérations précédentes correspond alors la droite $P\,K$ qui forme avec t une division harmonique par rapport aux points J_1, J_2. Appelons alors quasinormale de la courbe ϕ en point P la droite $P\,K$ et appelons première quasi-devéloppée de la courbe ϕ la courbe k que $P\,K$ enveloppe lorsque P décrit la courbe ϕ. Désignons par K le point dans lequel $P\,K$ est tangent à la courbe k. Les quasinormales $K\,K_1$ de la courbe k enveloppent la courbe k_1 que l'on suppose tangente à la droite $K\,K_1$ au point K_1. Déduisons d'une façon analogue la courbe k_2 qu'enveloppent les quasinormales $K_1\,K_2$ de la courbe k_1 et soit K_2 le point de contact de la droite $K_1\,K_2$.

Si l'on connaît le point K_1, on construit sur la droite $K\,K_1$ un point K_1' tel que $(K\,U\,K_1\,K_1') = -3$, U désignant le point d'intersection de la droite $K\,K_1$ avec la droite $J_1\,J_2$; la conique qui est tangente à la droite $J_1\,J_2$ au point $(P\,K_1'\,J_1\,J_2)$ et qui oscule ϕ au point P, a dans ce point avec la courbe ϕ un contact du troisième ordre.

Si l'on connaît encore le point K_2, on construit sur $K_1\,K_2$ un point K_2' tel que $(K_1\,V\,K_2\,K_2') = -3$, en désignant par V le point dans lequel $K_1\,K_2$ et pa rsuite aussi $P\,K$ coupent $J_1\,J$; ensuite, on même par le point K_2' de la une droite g telle que son point d'intersection et le point d'intersection droite $P\,K_1'$ avec la droite $J_1\,J_2$ forment avec J_1, J_2 une division harmonique. Si g coupe la droite $K_1'\,V$ au point N, la droite $K\,N$ coupe alors $P\,K_1'$ au point O, et la conique qui oscule ϕ au point P et pour laquelle O est le pôle de la droite $J_1\,J_2$ a avec ϕ au point P le contact du quatrième o dre.

On obtient encore le point O en menant à la conique déterminée par les tangentes $K\,P$, $P\,K_1'$, $K_1'\,K_2'$, $K_2'\,K$ et $J_1\,J_2$ une nouvelle tangente passant par le point d'intersection de g avec la droite $J_1\,J_2$.

Pour se rendre compte que ces constructions sont justes, construisons aux éléments des figures précédemment trouvées des figures homographiques telles qu'aux points J_1, J_2 correspondent des points de cercle à l'infini ; cela nous permet de passer à la construction déduite plus haut.

Saponaria ocimoides L., a new and noteworthy plant of the Czechoslovakian Flora.

A geobotanical analysis of its locality and general area, and a consideration of its significance for the evolution of the Czech flora.

(Summary.)

By

KAREL DOMIN.

Presented at the meeting on October 24, 1924.

The author's attention was called to the fact that near Malé Všelisy near Chotětov, in the vicinity of Mladá Boleslav, in the year 1906, *Saponaria ocimoides L.* was collected by director J. Krauskopf and Prof. Fr. Hoffmann, and he undertook an excursion to this locality in order to convince himself as to the correctness of the information and whether or not the plant is indigenous. The results of this excursion as well as a detailed geobotanical analysis are presented in this paper, divided into four parts.

In the first part the author gives a geobotanical analysis of the region and of the locality itself. The narrow, waterless valley of Všelisy, cut deep into the sandstone of the Cretaceous strata, displays a marked difference in the vegetation on its opposite slopes. The slopes turned to the south (respectively southwest) are bare and overgrown either with an *Andropogon ischaemum* association or a low growth formed mainly of *Potentilla arenaria* and *Thymus praecox.* The latter association grows on a sandy substratum of rock fragments and through further succession often is transformed into an *Ischaemum*-steppe, if the substratum acquires humus. *Teucrium chamaedrys* usually grows among the small stones. Of the xerothermous elements accompanying this association worthy of mention are especially *Festuca sulcata, Dianthus Carthusianorum, Picris hieracioides, Cirsium acaule, Carlina acaulis, Scabiosa ochroleuca, Artemisia campestris, Asperula cynanchica, Phleum Boehmeri, Linum catharticum* and others

The opposite slopes, exposed to the north (respectively northeast) are clad with woods. In places the growth is secondary but in others is

preserved beyond doubt the original *Carpinus betulus* and *Corylus avellana* shrubby woods, the composition of which is analysed in detail. In the undergrowth are found especially *Hepatica triloba, Orobus vernus, Pulmonaria obscura, Stellaria holostea, Phyteuma spicatum, Ranunculus auricomus* and others (see page 5.), rarely *Viola mirabilis* and in sunny places *Lilium martagon* and *Triticum caninum*; on the borders *Melampyrum nemorosum* grows abundantly.

On the borders of these woods there has been formed in a low band a grass and shrub subxerophilous association, in which grow *Trifolium montanum, Brunella grandiflora, Helianthemum obscurum, Potentilla tormentilla, Genista germanica, Gentiana amarella,* and others.

The locality of *Saponaria ocimoides* is on a sandstone rock behind the school in Malé Všelisy, at an altitude of about 230 m. above sea-level. This rock is in its original condition, with its surface untouched, and the sandstone is rich in lime, for it contains 54·4 % of $CaCO_3$. The species in question grows here gregariously in a natural association, the composition of which, as regards vascular plants, mosses and lichens, is given on page 7. The locality is endangered by the proximity of the school. A considerable portion of the rocks where *S. ocimoides* once grew in abundance was broken away, so that today it remains only on one mossy rock, on the sandy detritus beneath it and on inaccessible places in a vertical crack in a neighboring rock, filled with sandstone detritus. Further on the rocks behind the school the well enough preserved remains of another association containing *Corylus avellana, Cornus sanguinea, Betula verrucosa, Rubus idaeus,* whole growths of *Asplenium trichomanes, Cystopteris fragilis,* scattered clumps of *Aspidium spinulosum* var. *dilatatum* and *A. filis mas, Hieracium boreale, Lactuca muralis* etc. are to be found.

The author then completes the sketch of the conditions of the vegetation in the valley of Všelisy, which through the marked difference between the growths on opposite slopes is a classical example of the influence of different exposures.

The second chapter is devoted to the area and geobotanical analysis of the species *Saponaria ocimoides.* The genus Saponaria, worked up in a monography by S i m m l e r in the year 1910, contains 29 species and is divided into two geographically differentiated subgenera. The subgenus *Saponariella* (with 18 species) is essentially mediterranean, the subgenus *Saporhizaea* (with 11 species) oriental. The majority of the species have comparatively inconsiderable areas and appear as old types frequently on relic localities. An exception is the well-known *S. officinalis,* whose extensive area, however, was formed through secondary expansion.

The nearest relative of the species we are considering is *S. calabrica* Guss., which, however, is an annual and whose area includes the southern extremity of Italy, Korfu, Albania and Epirus.

S. ocimoides is a *western Mediterranean mountain type,* which extends north as far as Lake Bodam, into the northern Tirol and into the Bavarian Alps. Its detailed distribution in the Alps is shown very strikingly on a map by G. Hegi.

The author describes in detail the geographical distribution of *S. ocimoides* and concludes that its locality on Berneck in Fichtelgebige is not original and that the species, which is markedly calcophilous and subxerothermic, does not occur anywhere north of the Alps.

In the third part the author considers the question whether or not *S. ocimoides* is indigenous on the Czechoslovakian locality and arrives at the conclusion that it is, in consequence of the following circumstances:

1. The locality is entirely original, untouched, and corresponds with its conditions to those under which the plant usually grows.

2. *S. ocimoides* in the past grew there in far greater abundance, but was limited by the breaking away of the rocks to its present locality, which because of its remoteness was not visited in the old days of floristic study and later was concealed by the building of the school.

3. *S. ocimoides* is thriving well on the untouched, natural rock and on the detritus in the cracks, but has no tendency to spread further; indeed, attempts to spread it on to the neighboring rocks by transplantation and sowing met with complete failure.

4. The association in which it is growing is entirely natural and our species forms a harmonious part of it.

5. The possibility of its occurrence being secondary, either through its having been planted intentionally or through its accidental introduction, seems after careful consideration to be entirely excluded.

6. The relic occurrence of *S. ocimoides* is supported by the occurrence in the same region (on the slopes of the Jizera River near Debří in the vicinity of Mladá Boleslav) of *Fumana vulgaris,* which here has its only Czech locality. *Fumana vulgaris* has much the same significance but its area is far more extensive, for we know of its outlying and isolated localities even on the Swedish islands Öland and Gotland, which here have the same meaning as that of *S. ocimiodes* in Czechoslovakia.

In his concluding remarks the author then considers the significance of *S. ocimoides* for the evolution of the Czech flora and points out that the interior of Bohemia at the time at the greatest extent of the glaciers in the Glacial epoch escaped being covered over, so that various genetically different elements could be preserved in this refuge. Of these the ones of most frequent occurrence are the dealpine types, mainly calcophilous. Among them we find also interesting apodealpines like *Sesleria calcaria* and *Saxifraga aizoon.* Mediterranean elements, however, are rare exceptions; only sone species essentially Mediterranean but with areas

extended into central Europe have wider distribution in our country. *S. ocimoides,* howerer, is a Mediterranean mountain plant (mainly praealpine but sometimes ascending into the subalpine zone or even the alpine zone, above 2000 m.) whose extremely isolated and low (dealpine) locality in Bohemia, the only one to the north of the main part of the Alps, is extraordinarily surprising. Without doubt it is one of our most noteworthy plants, which probably had a far wider distribution in the Alps toward the end of the Tertiary epoch than today, but which like many other xerothermic and calcophilous mountain species was driven during the Glacial age into the mountains of southern Europe and the southern Alps. During the Glacial age it probably descended from the Alps as far as the interior of Bohemia, where it held its own as a memorable relic to the present day.

Les complexes des vecteurs normaux d'une V_2 dans R_4.

Par

V. HLAVATÝ.

Présenté dans la séance de 26 octobre 1923.

Le discours présent fait suite du travail du même auteur „*Dvojrozměrné variety v prostoru čtyřrozměrném*“. („*Les variétés à deux dimensions dans l'espace à quatre dimensions*“ Publ. Université Masaryk No. 25). On y étudie les vecteurs normaux de la variété V_2 dans R_4.

Le point de départ est l'équation pour l'angle compris entre deux vecteurs normaux infiniment voisins. Si l'on trouve l'angle en question pour deux directions tangentes infiniment voisines *dans un même point* de V_2, on parvient à la notion *de la torsion*. Pour que V_2 soit immergée dans R_3 il suffit et il est nécessaire que la torsion s'annule en chaque son point. En étudiant l'angle de deux vecteurs (bi)-normaux *dans deux points* infiniment voisins de V_2 on parvient à la généralisation de la (deuxième, première) courbure de Bertrand. On donne les équations pour les courbes asymptotiques et pour celles de la courbure extrême pour chaque sorte de courbure traitée. Le théorème, qui exprime les courbures de Bertrand en fonction des vecteurs normaux nous mène à l'interprétation géométrique de l'angle compris entre le vecteur normal et le plan normal infiniment voisin.

Il y a une relation qui lie les angles extrêmes de deux plans normaux infiniment voisins. Cette relation nous permet de définir la torsion d'une manière intrinsèque.

On trouve les directions suivant lesquelles les vecteurs normaux engendrent une dévelopable V_2. On parvient sans difficulté au théorème disant que les points d'intersections des plans normaux infiniment voisins au plan donné engendrent une conique quadratique.

Le travail finit par l'étude de l'espace V_3 polaire de V_2 qui est l'enveloppe de ses plans normaux.

Prague, septembre 1923.

Calcul des déviations de la verticale par rapport à l'isostasie.

(Pour les grandes distances de la station.)

Par

B. KLADIVO.

(Présenté le 26 Mai 1922.)

Considérons la projection de l'attraction dans un plan R_0 qui contient la station S et le centre de la terre C_z. Sa composante dans la direction $S\,C_z$ soit marquée par la lettre a_s, la composante perpendiculaire à $S\,C_z$ par la lettre a_h. La déviation de la verticale dans le plan R_0 est

$$o'' = \varrho''\, arctg \frac{a_h}{a_s}. \qquad (1)$$

La composante a_s ne change pas essentiellement pour les différentes distributions considérées de la masse attirante. La composante a_h dépend de la distribution réelle de la masse attirante. M. Hayford ainsi que M. Helmert supposent: 1. La masse intérieure à la sphère K (le centre C_z, le demidiamètre $r-H$, r le diamètre de la sphère remplaçant par ex. l'ellipsoïde de révolution de Hayford, H a environ 120 km) ne contribue en rien à la composante a_h.

2. La masse attirante extérieure à la sphère K est réglée par la condition de l'isostasie: La pression rapportée au kilomètre carré de la surface K est égale partout. — La condition de l'isostasie est exprimée d'une manière approximative: Au dessus d'un kilomètre carré de la surface K se trouve la même quantité de la masse attirante.

En calculant la composante a_h M. Hayford ainsi que M. Helmert substituent la condition de l'isostasie par l'„Arbeitshypothese“: le surplus (le manque) de la masse attirante dans les domaines du continent (de la mer) est compensé par le manque (le surplus) de la masse attirante, distribuée uniformément depuis la surface K jusqu'au niveau de la mer. Tous les deux simplifient le calcul de la composante a_h; et ils évaluent les erreurs provenant de la simplification des calculs.

L'auteur s'est proposé d'abord la tâche de débarrasser le calcul de la déviation de verticale des inexactitudes provenant de la simplification des calculs, tout en sauvegardant la facilité du calcul numérique. L',,Arbeitshypothese" déjà mentionnée a été remplacée par les suppositions plus possibles physiquement.

Il a supposé que la densité de la masse attirante depuis la couche superficielle de l'écorce terrestre jusqu'à la surface K fût constante. Si la lettre h_0 (h_v, $h_{-v'}$) signifie la densité dans la couche s'étendent entre la surface K et la surface de l'écorce terrestre à la hauteur de la surface de mer (à la hauteur v audessus de la surface de mer, à la profondeur v' audessous de la surface de mer), et la lettre h' la densité de l'eau de mer, et si l'on remplace la condition de l'isostasie par celle-ci: la pression hydrostatique rapportée au kilomètre carré de la surface K est égale partout, on arrive aux relations suivantes entre les densités dans les domaines diverses:

$$h_v = h_0 \frac{H}{H+v}, \quad h_{-v'} = h' + (h_0 - h') \frac{H}{H-v'}. \qquad (a)$$

Si l'on remplace la condition de l'isostasie approximativement par la condition: Audessus d'un km^2 de la surface K se trouve partout la même quantité de la masse attirante, on arrive aux relations suivantes:

$$h_v = h_0 \frac{r^3 - (r-H)^3}{(r+v)^3 - (r-H)^3}, \quad h_{-v'} = h' + (h_0 - h') \frac{r^3 - (r-H)^3}{(r-v')^3 - (r-H)^3}. \qquad (b)$$

Les simples suppositions ci-dessus ont été remplacées encore par les suppositions plus compliquées: la densité croît uniformément depuis la surface de l'écorce terrestre jusqu'à la surface K, l'accélération de la pesanteur croît uniformément depuis la surface de la mer jusqu'à la surface K. De la condition: la pression hydrostatique rapportée au kilomètre carré de la surface K est égale partout, et de la condition: le poids de la masse reposante audessus d'un kilomètre carré de la surface K, est égal partout, on peut arriver aux formules plus compliquées, remplaçant les formules (a) et (b).

Si l'on développe les seconds membres des formules (a) et (b) ainsi que des formules plus compliquées déjà mentionnées en séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $\frac{v}{H}$, $\frac{v'}{H}$, $\frac{v}{r}$ etc. et si l'on se borne aux termes qui peuvent atteindre la valeur $\frac{h_0}{10^2}$, on arrive, pour tous les cas dont on tient compte, aux formules générales

$$h_v = h_0 \left(1 - \frac{v}{H} + \frac{v^2}{H^2}\right), \quad h_{-v'} = h' + (h_0 - h') \left(1 + \frac{v'}{H} + \frac{v'^2}{H^2}\right). \qquad (2)$$

Ces formules-ci ont été acceptées pour la base du calcul de la déviation de verticale o''. En employant cette méthode, les erreurs provenant

des inexactitudes dans les suppositions du caractère physique ont été séparées des erreurs provenant des inexactitudes de calcul. Les expressions précises ont été simplifiées de façon que les erreurs, provenant des inexactitudes de calcul ont été réduites aux limites suffisamment petites $\left(< \frac{2''}{10^4}\right)$.

Les considérations sur l'influence des membres négligés dans les formules (2) ont montré que l'erreur causée par l'influence des termes négligés pouvait atteindre des valeurs plus grandes que n'était toute la valeur calculée elle-même de la déviation de verticale.

Si l'on développe les seconds membres des formules (*a*), (*b*) en séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $\frac{v}{H}$, $\frac{v'}{H}$, $\frac{v}{r}$, en s'arrêtant aux termes de l'ordre $\left(\frac{v}{H}\right)^4$, $\frac{v}{r}$, $\frac{v^2}{rH}$ $\left[\left(\frac{v'}{H}\right)^4, \frac{v'}{r}, \frac{v'^2}{rH}\right]$ et si l'on compare les formules résultantes pour le calcul de la déviation de la verticale o_a, o_b, dans les deux cas (*a*), (*b*), on a les limites suivantes pour l'expression $\frac{|o_b - o_a|}{|o_a|} \cdot 100$.

La distance du domaine de la station	697—645 *km*	645—600 *km*	600—560 *km*	560—523 *km*	523—489 *km*	489—460 *km*	460—434 *km*	434—411 *km*	411—389 *km*
La limite supérieure	63·4	58·6	54·1	49·8	45·8	42·1	38·8	35·9	33·2
La limite inférieure	53·1	48·5	44·3	40·3	36·7	33·5	30·6	28·1	25·8

Pour les domaines plus éloignés on obtient les limites plus hautes.

La conclusion: La partie de la déviation de la verticale, provenante des domaines éloignés de la station plus que 600 *km*, dépend essentiellement de la manière dont on exprime la condition de l'isostasie; dans les formules, qui expriment la densité, les membres de l'ordre $\frac{h_0}{10^3}$ exercent encore l'influence essentielle sur cette partie. Laquelle de ces différentes expressions de la condition de l'isostasie, laquelle de ces différentes distributions de la densité s'approche le plus à la réalité, ce n'est pas décidé. En état actuel la partie de la déviation de la verticale, provenante des domaines éloignés plus de 600 *km* de la station doit être considérée comme incertaine.

Preliminary report on the Neogene of the Basin of Turiec in Slovakia.

With 2 plates.

By

ODOLEN KODYM and ALOIS MATĚJKA.

Presented on March 21st 1924.

Last year we executed a detailed geological survey of the basin of the Turiec in Slovakia. Our researches were chiefly concerned with the Neogene filling up the basin, but in some places extended likewise to the surrounding mountains, as well as into the basin of Handlova. In this paper we give a preliminary report on the results of our survey, as far as it was concerned with the Neogene of the Turiec.

The geological conditions of the Neogene sediments in the basin of the Turiec have already been treated by many authors. More detailed reports are to be found in the maps and publications especially of Štúr[1]) and Andrian[2]); reference is also made to them by Hauer[3]) in his explanations of the geological map of the former monarchy and in the monography of Uhlig[4]). In their publications Vetters[5]) and

---

[1]) *a)* D. Štúr: Aufnahmen im Wassergebiet der Waag u. Neutra. Jahrbuch d. geolog. Reichsanstalt. Wien 1868.

b) D. Štúr: Bericht über die geologische Aufnahme im oberen Waag- und Granthale. Jahrbuch d. geolog. Reichsanst. Wien 1868.

[2]) Ferd. Andrian: Verhandlungen d. geolog. Reichsanst. Wien 1886.

Ferd. Andrian: Die Zusammenfassung des Thurozcer Tertiärbeckens. Verhandlungen d. geol. Reichsanst. Wien 1865.

Ferd. Andrian: Bericht über die im Sommer 1864 ausgeführten Detailaufnahmen des Thuroczer u. der angrenzenden Teile des Trentschiner Comitates. Jahrbuch d. geolog Reichsanst. Wien, 1866.

[3]) Hauer: Geologische Uebersichtskarte der österreichisch-ungarischen Monarchie. Blatt III. Westkarpathen. Jahrbuch der geolog. Reichsanst. Wien, 1986.

[4]) Uhlig: Bau und Bild der Karpathen, 1901.

[5]) Vetters: Beiträge zur Geologie des Zjargebirges und des angrenzenden Teiles der Mala Magura in Oberungarn. Denkschriften d. k. Akad. d. Wissensch. Wien, 1909.

V i g h [6]) give several remarks bearing on the surveyed area in the Žjar mountains and north of them. V o l k o [7]) speaks of the southern part of the basin.

1. The distribution of the Neogene.

In the basin of the Turiec the layers of the upper Tertiary series border on very various kinds of rocks and geological formations. On the westenr side of the basin southward from Vrútky we find especially the granites and schists of the Minčol Mountains, prevailing up to the valley of the brook of Valac in their floor. In this district small islands of quartzites, quartzitic conglomerates and sandstones of Permian and Lower Triassic age, of limestones and dolomites of the Trias occasionally occur, either due to structure or as remnants which escaped danudation. From the afore-named valley to Slovenské Pravno the Neogene beds border on the Triassic, Jurassic and Cretaceous ones of the northern border of the Žjar mountains, farther to the south as far as Sklenó mostly on the granite of the Žjar mountains.

To the south the younger Tertiary of the basin borders on the volcanic masses of the Ptáčník mountains, forming the rim of the basin as far as Stará Štubně. Along the eastern border of the basin northward the Neogene abuts first on Triassic dolomites and Jurassic beds west of Čeremošno and then as far as the valley of Necpálka on a thick complex of limestones and dolomites, belonging to the Velká Fatra. Between Necpálov and Bělá it borders for a short distance still on Jurassic sediments and then the older Tertiary is to be found in the floor of the Neogene layers as far as the hill of Hrádek, northeast of Turčanský Martin.

As to the Neogene on the right bank of the Váh at the foot of the granitic Kriváň mountains, its beds are covered, with the exception of isolated exposures, by a thick mantle of granitic waste and of hiver gravels of the Váh.

2. The lithological character of the Neogene sediments.

In the basin of the Turiec the beds representing the younger Tertiary are characterized by a rather varied lithological nature. The chief types of rocks are: clays, slate-clays, marls, limestones, gravels, sands, conglomerates, sandstones, breccias and lignites.

---

[6]) V i g h: Geologische Beobachtungen in den Grenzgebirgen der Komitäte Nyitra—Turóc u. Trencsén. Jahresbericht d. k. ung. geolog. Reichsanst. 1914.

[7]) V o l k o: Cestovné dojmy a geologické výzkumy v okolí Handlovej a Hornej Štubni. Lipt. Sv. Mikuláš 1922.

The *clays* are usually unstratified, grey, sea-green, yellow, brownish and dark-grey. When they are yellow coloured, they look strikingly like brick-loam.

Real loess is not to be foun din the basin of the Turiec. The areas which on the old maps are represented as covered by loess, are mostly exposures of yellow Neogene clays, which naturally are often covered by a thinner layer of eluvial, argillaceous loam.

Clays of a different colour occur all over the basin and it is not possible to detect a regularity in their occurences. But the dark and black clays are usually developed in the neighbourhood of seams and chips of lignite, where they contain often distinct dendrolites and small carbonized fragments of plants.

The *slate-clays* are usually of a grey or black colour. As far as their exposures were found in favourable cuttings, it is evident that they accompany occurences of lignite. Then they are tainted by carbonized fragments of wood and often contain distinct imprints of plants.

Greyish-white and nearly pure white slate-clays, fine-micaceous and sabulous, occur in several places as insignificant embeddings, for the most part only some centimetres thick, in the sabulous beds in the neighbourhood of the granitic Žjar mountains (for inst. near Rudno).

The *marls* occur mostly in immediate connexion with exposures of limestones. They are dirty-white or yellowish and form layers of several metres in thickness. Exposures of them are to be found all over the basin (Bystřička, Mošovce, Slovenské Pravno). In addition to these typical marls there occur still marly clays or sandy clays (= tegels) rather frequently in the complex of the clayey beds.

Of *limestones* there occur two different types. Sometimes we have a dirty-yellow and brownish-yellow, thick- or thin-banked limestone, representing a complex sometimes several metres thick, sometimes a limestone which originated from calcareous tuffs.

The limestone of *Bystřička,* known for a long time and often cited in literature for its fauna, belongs to the first type. Similar occurences were ascertained in several other places during last year's surveying: at the village of Dolina (SSE of Turčanský Sv. Martin), where it forms two layers, northeast of Bystřička, in the vicinity of Sv. Peter, south of Valča, at Mošovce and at last the exposures south of Slovenské Pravno on the road to Rudno (east of the mill of Lucký, at point 503 and north of Budiš), already described by V e t t e r s.

The limestones representing the second type were originally deposited as calcareous tuffs, i. e. travertine, afterwards cemented by their original hollows being filled up with $CaCO_3$. Bulo this cementation did not go so far as to quite obliterate their original nature, and therefore we still find in them parts in no way different from typical recent calcareous tuffs.

The largest exposures of these limestones and tuffs are northeast of Štubňanské Teplice between Háj and Nedozor, where on the old geological map their extensive complex is already represented.

Their formation is probably due to the precipitation of $CaCO_3$ out of waters escaping from the Jurassic island at *Čeremošen*. This view is also corroborated by their distribution and by their relation to the other Neogene sediments, with which they are closely connected by imperceptible transitions.

At last we have still to mention the ccurence of limestones north-north-west of *Vrútky*, in nearly the Same places where U h l i g [8]) on his map of the Fatra-Kriváň mountains locates Choč dolomite. There some quarries are opened, some in other rocks, but chiefly in limestones which are of quite the same lithological nature as the Neogene limestones occuring at Dolina, Bystřička and so forth. They are surprising, however, for their remarkable thickness, amounting to several tens of metres. Up till now it has not been possible to determine whether they are really of Neogene age, though their lithological nature as well as their fossil fauna seem to point in this direction.

Gravels occur very frequently in the sediments of the Neogene of the Turiec. Boulders detached from them occur often over large areas, so that on the old maps they are represented over large regions, though in reality they form only isolated layers. They form layers from some decimetres to several tens of metres in width, embedded in clays or conglomerates. According to the lithological nature of their clastic material they may be divided into these types: granitic, limestone and dolomite, and andesitic and trachytic gravels. The granitic gravels occur especially in the vicinity of Vrútky.

Gravels, the clastic material of which is composed of limestones and dolomites, are far more frequent and occur in the *vicinity of Turčanský Martin* and south of there as far as *Diváky*.

The gravels of an andesitic and trachytic material are in the main restricted to the southern extremity of the basin. On the old geological map "trachytic tuffs" are represented there instead of them. Yet their sedimentary nature and the belonging of these gravels to the true Neogene sediments and nott o the volcanic rocks bordering the basin of the Turiec in the south, is evident from the alternation of these gravels with typical clays and clay-marls, and locally also from the occurence of granitic boulders.

Gravels, the clastic material of which is composed of limestones and dolomites, often pass into *limestone-conglomerates*. Their largest exposures occur in the region between Valča, Slovany and Klášter

---

[8]) V. U h l i g: Beiträge zur Geologie des Tatrakriván-Gebirges. Denkschriften d. k. Akad. d. Wissenschaften. Wien vol. LXXII.

p. Zniovem, smaller ones west of Bystřička and in other places all over the basin.

The conglomerates of Slovany, alternating with layers of clay or marl, are considered by V i g h [9]) to be of Eocene age, though he gives no reasons for thinking so. On the old maps Neogene is indicated in these places, but Eocene beds are represented farther to the north, west of Bystřička, where rocks in no way different from those of Slovany occur.

In the main negative marks point to their belonging to the Neogene; distinctive marks by which they differ from the Eocene rocks occuring in the basin of Turiec. These are: the absence of eocene fossils and the quite different lithological nature. They are however quite similar to the Neogene limestone conglomerates, occuring in other places, though perhaps not of such width and extension.

The second type of conglomerates are the *argillaceous conglomerates*. They are cemented by clays or marly clays. They form layers of different width and often dwindle simply by the boulders standing back so that the basal cement alone remains. The lithological nature of their clastic material is very varied. Boulders of limestone and dolomite as well as of andesite and trachyte occur in them.

Sands occur most frequently in the neighbourhood of the granitic Žjar mountains. The material of which they are formed, was derived from the granite, and therefore they are rich in mica and really represent but the washed waste of the Žjar granite. Often they contain larger fragments of granite or quartzites, so that they are easily mistaken for forrecent slope-waste.

Of *sandstones* two types are represented. In the argillaceous beds sandstone layers are sometimes embedded, usually of but little width, marly, micaceous, easily crumbling and of a scaly weathering. An their nature they are rather similar to some Paleogene sandstones.

At the southern extremity of the village of *Rudno* an *arcosic sandstone* occurs, forming a layer embedded in the sands.[10])

Breccias chiefly occur where dolomites are exposed on the border of the basin. Their materials are almost entirely sharp-edged fragments of dolomites (Triassic and so-called Choč dolomiteor dolomitic limestones). Argillaceous layers indicate their stratification and the alternation of such breccias with other Neogene rocks shows that they belong to the younger Tertiary.

With regard to the occurrences of *lignites*, we find such all over the basin and they are already known in literature. They were the object of prospecting work in several places, but the results were not satisfactory. (Vrútky, Turč. Sv. Martin, Mošovce.)

---

[9]) See l. c. 6.

[10]) See also V e t t e r s, l. c. 5, p. 251.

3. The distribution of the different sediments and their relation to each other.

By a glance at the geological map of the basin we see, that the prevalent rocks are clays, marl-clays and slate-clays. They occupy far larger areas than all the other rocks together. According to frequency the occurences of gravels, sands, conglomerates and sandstones range next to them. Therefore the sediments of the basin of the Turiec are characterized by the alternation of these two groups, for the other sediments, limestones, breccias and lignites stand far back.

In the distribution of the different rocks some interesting details are apparent. Usually argillaceous layers alternate with layers of gravels and limestones, so that argillaceous rocks are distinctly prevalent. Sometimes, however, just the contrary is the case, gravels and conglomerates being by far prevalent, as for instance in the vicinity of *Slovany* and the area between *Slovany* and *Bystřička*. This accumulation of clastic material is not restricted to the border of the basin and to the immediate neighbourhood of the mountains, from which the material was derived. Even in the very centre of the basin thick accumulations of gravels occur, as for inst. in the vicinity of *Ivančina*.

Some other details regarding the distribution of the different rocks, have already been mentioned. So the limestones and calcareous tuffs NE of *Štubňanské Teplice*, the gravels of andesitic material in the southern part of the basin, the occurences of sands in the neighbourhood of the Žjar mountains, of dolomitic breccias in the vicinity of dolomitic mountains and exposures.

By considering the distribution of the Neogene rocks and still other features it becomes apparent, that they represent but little transported sediments, the origin of which is in the main closely connected main with the regions in the immediate neighbourhood of their present occurences. The layers often dwindle short distances, in other places insignificant layers swell out to a considerable width. The whole nature of the sediments shows, that the sedimentation went on rapidly and with sudden changes, characteristic for littoral and delta sediments and in our case for sediments forming in a locked basin, into which material was transported by torrents and floods from the surrounding mountains.

Another characteristic feature of the Neogene of the basin of Turiec, connected with the just described manner in which these sediments were formed, is, that we look in vain for lithological or palaeontological horizons, by which we could determine the stratigraphical relation between the sediments in the northern and southern parts of the basin. We already mentioned, that the gravels of andesitic and trachytic material are restricted to its southern extremity. The most northern occurence of tuff material in unquestionably Neogene clastic sediments was ascertained

at *Mošovce*. In the areas farther to the north we were not able to find such material up till now. The other rocks will not help us by their lithological nature to determine the chronological sequence of their iformation.

So we are obliged to answer the question as to the age of the sediments in the northern parts and stere where in the south limestones occur by their fauna, atso in the south, by the relation of the sediments to the neighbouring volcanic rocks.

As will be seen from the following lines, this problem is neither an easy one, nor can it be considered as solved, for quite contradictory opinions were offered on the age of the Neogene sediments.

4. The age of the neogene beds and their relation to the volcanitc rocks south of the basin.

The older works of Andrian and Štúr consider the sediments of the basin of Turiec to be of Miocene age, corresponding to the *Congerian beds* of the basin of Vienna. This opinion was founded upon the discovery of a fauna in the calcareous marls at Bystřička. According to Andrian there were found:

Paludina sp.
Planorbis sp.
Melanopsis sp.
Valvata sp.

and according to Štúr's determination the species of:

Congeria triangularis.,
Planorbis pseudoammonius,
Paludina Sadleri.

In a previous report Andrian[11]) remarks, that the also found remains of *Congeria triangularis* in the sands at Slovenské Pravno. But in his last publication[12]) he writes, that the gravels and sands contain no fossils at all. Vetters[13]) points out this contradiction.

Beside this he also mentions in the limestones south of Slovenské Pravno:

Limaeus sp.,
Planorbis sp.,
Helix sp.,
Succinea primaeva Math.,

---

[11]) Andrian: Die Zusammenfassung des Thuroczer Terciärbeckens. Verhandlungen d. g. Reichsanst. Wien 1868.

[12]) See l. c. 2.

[13]) See l. c. 5., p. 25.

saying that a definite parallelisation with the Congerian beds was not till now possible.

V i g h [14]) considers the (crumbled) conglomerates, gravels, clays and marl-clays of the basin of Turiec to be of *Pontic* age (*Pannonian beds of Lörenthey*).

The clays and slate-clays in the brick-yard of Šulc west of Turčanský Sv. Martin are according to him of *Pliocene* age, their fauna being considered as equivalent to the Levantine. He mentions:

Vivipara sp.,
Melanopsis sp.,
Neritina sp.,
Hydrobia sp.,
Planorbis sp.,
Congeria (Dreissensia) sp.

The last essay on the stratigraphy of the Neogene sediments of the basin of Turiec was written by M. R e m e š [15]). In accordance with the palaeontological studies of W. Wenz he describes from Turčanský Sv. Martin the fanna, which would prove the limestones of Dolina and northeast of Bystřička to be equivalent to the *Oncophora beds*. From the locality of Bystřička there are:

Vivipara oncophorae Rzehak.
Melenoptychia pseudoscalaris Sdbg.
Theodoxis (Neritodonta) aff. crenulata Klein.
Hydrobia sp.
Congeria subclaviformis Rzehak.
Oncophora sp.
Theodoxis sp. int.

From the limestones of Dolina:

Staliola gracilis Rzehak.
Cypris cossmanni Rzehak.

Thence it will be clearly seen.

From this survey of the collected faunas, widely differing views are held on the age of the beds in the northern part of the basin of Turiec. We think the report of R e m e š to be of the what highest importance, in consequence of which, it would naturally prove runecessauy, to revise the opinions held up till now as to the geological and morphological development of the basin.

In the course of our surveying a rich fauna was collected not only from the localities already mentioned (brick-yard of Šulc, Bystřička,

---

[14]) J. V i g h: Geologische Beobachtungen in den Grenzgebirgen der Komitate Nyitra, Turóc u. Trencsén. Jahresbericht d. k. ung. geolog. Reichsanst. f. 1914.

Hrby NE of Bystřička), but also from other localities unknown (Sv. Petr, brick-yard of Jančarik at Turč. Sv. Martin. Mošovce, Vrútky). When these fossils will be finally determined, it will be possible to ascertain definitely the age of the Neogene sediments of the basin of Turiec.

As already has been said, the lithological nature of the clastic sediments depends on the nature of the border-mountains. So the southern part of the basin is chiefly filled with gravels of trachytic and andesitic material, tlternating with clays, sabulous and marl-clays. Andrian supposed them to be sedimentary tuffs, though they are quite different from them. Beside it he kept them for *contemporary* with the eruptions. Yet often as for inst. at Horní Štubňa, Sklenó, Štubňánské Teplice, we find, that the Neogene sediments of gravels and clays rest unconformly on the underlying tuffs and tuffites. At least partly, they are therefore to be hold younger than these.

Again the occurrence of layers of andesitic tuffs northeast of Mošovce, lying clearly between Neogene marls and clays on some beds of dolomite and limestone gravels, proves that some of the layers of the Neogene of the basin of Turiec are at least contemporary with the chief eruptions of the Tertiary volcanic region of Štiavnica-Kremnica.

The consideration of the correlation between these beds and the sediments of the region farther north must be deferred to our conclusive paper, when the collected faunas will be determined.

5. Tectonics of the Neogene.

The tectonic structure of the Neogene sediments is intimately connected with the geomorphological history of the basin of Turiec. According to older authors and Uhlig its origin is due to huge marginal downfaults. In their outlines these vertical faults date back to praeeocene times along the border of the Fatra mountains, though the chief movements took place only after the eocene periód. (This is at least the opinion of Uhlig[15]). Vetters maintains that these downfaults repeated themselves in very recent times, as the conglomerates of *Slovany* dip towards the border-mountains. Also in other places along the western border of the basin the Neogene beds dip likewise towards the border-mountains. In the vicini y of Vrútky and west of Turč. Sv. Martin this is nearly always the case. South of Slovenské Pravno things are somewhat different. Therefore we may suppose that in the line from Vrútky to Klášter pod Zniovem the downfaulting along the marginal falt repeated itself even after the sedimentation of the Neogene beds.

---

[15]) V. Uhlig: See l. c. [4]) and [16]).

Along the eastern border of the basin things appear to be rather different. In the vicinity of Turč. Sv. Martin the contact of the Neogene with the Palaeogene is normal, the Neogene overlapping the older beds. Along the border of the triassic rocks between Necpálov and Mošovce downfault movements during more recent times are by no means impossible. Farther south the young-tertiary beds again overlap the older rocks, which are only exposed in the form of islands.

The sediments in the interior of the basin are likewise not undisturbed, but dip under small angles in different directions. Sometimes their dip is original, due to their sedimentation, but in other places it is evident, that they were disturbed subsequently to their accumulation.

With regard to the opinions held by L. R. Sawicky[16]), we shall define our attitude when deciding the stratigraphical position of the Neogene of Turiec, for only then it will be possible to determine more accurately the time, when these tectonical movements took place.

January 1924.

---

[16]) L. R. Savicki: Die jüngeren Krustenbewegungen in den Karpathen. Mitteil. d. geolog. Gesellschaft Wien II.

Preliminary report on the Neogene of the Basin of Turiec in Slovakia.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Explanations to the illustrations:

Plate I.

Fig. 1: Limestone from the vicinity of Dolina, SE of Turčanský Sv. Martin In their roof greenish marl-clays.

Fig. 2: Conglomerates and gravels near Slovany, dipping towards the border-mountains.

Plate II.

Fig. 3: Dolomitc breccia with a layer of clay, crumbling into polyedric fragments, from Klášter p. Zniovem.

Fig. 4: Marl-clays with lignite flake. Brick-yard west of Turčanský Sv. Martin.

Cristallographie de la vivianite de Rodna vecche.

Par

FRANTIŠEK ULRICH.

Présenté le 28 novembre 1924.

La vivianite de Rodna trouvée par moi dans cette belle localité métallifère du type métasomatique, est assez riche en formes cristallines. Huit cristaux mesurés en ont montré en somme quatorze. Ce sont: *b* (010), *a* (100), *y* (310), *m* (110), *n* (101), *B* (102), **μ* ($\bar{1}02$), *w* ($\bar{1}01$), *x* (111), *z* (112), **ψ* (183), *r* ($\bar{1}12$), *v* (111), *s* ($\bar{1}31$). Deux formes désignées par un astérisque

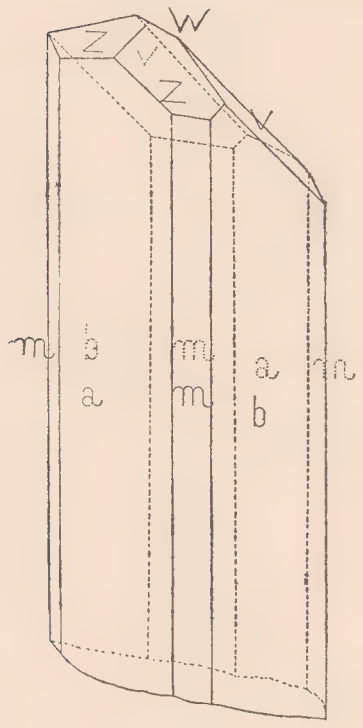


Fig. 1.

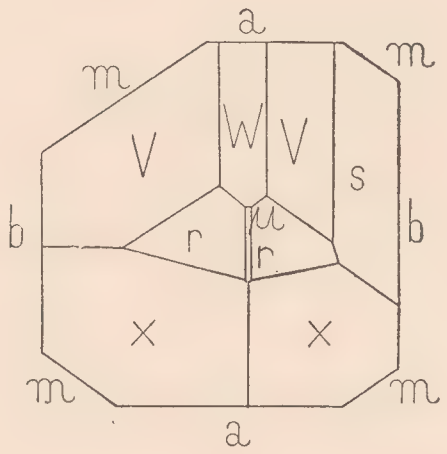


Fig. 2.

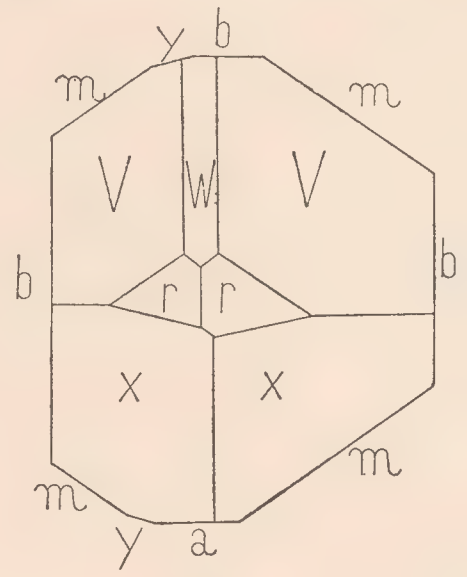


Fig. 3.

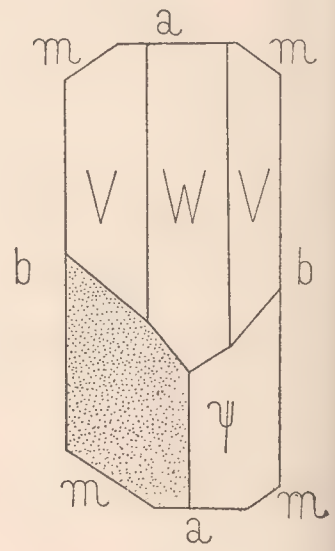


Fig. 4.

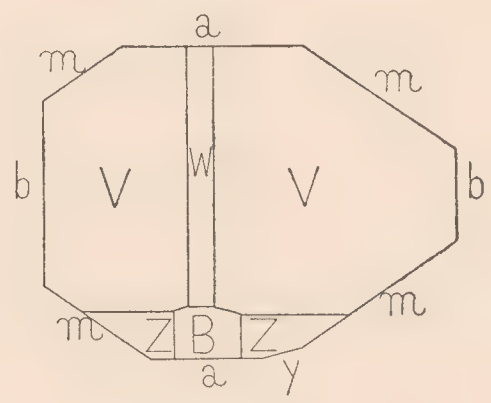


Fig. 5.

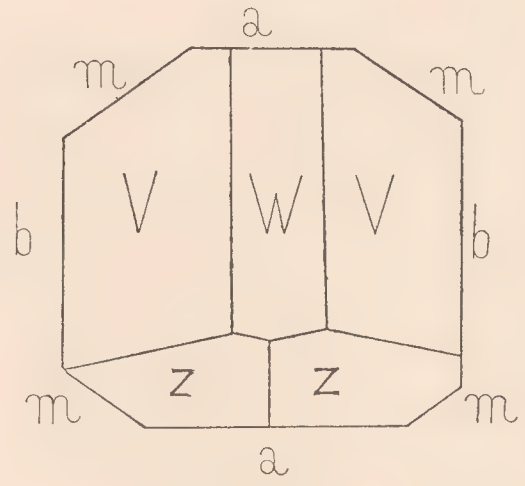


Fig. 6.

sont nouvelles pour la vivianite. En ce qui concerne le développement et les propriétés des faces, on peut les caractériser de la façon suivante:

Les cristaux sont généralement allongés suivant leur axe vertical (le cristal le plus long dépassait 20 *mm*) et ils forment des agrégats rayonnants. En même temps, les petits cristaux sont ordinairement aplatis suivant le plan du clivage excellent *b* (010), les cristaux plus grands ont les deux autres dimensions à peu près égales. Dans la zone verticale sont déve-

loppés toujours les deux pinacoïdes *a* (100), *b* (010) et le prisme fondamental *m* (110). Sur deux cristaux, on a constaté aussi la présence de *y* (310). Les réflexes sont en général d'une qualité très bonne. Quant aux terminaisons, ce sont en somme les formes de la zone (010) : ($\bar{1}01$) : ($0\bar{1}0$) qui sont développées toujours comme les plus grandes surfaces. Ce sont: *w* ($\bar{1}01$), *v* ($\bar{1}11$), *s* (131). La forme nouvelle *μ* ($\bar{1}02$) fut trouvée une fois ayant l'allure d'une facette étroite entre les surfaces ($\bar{1}12$) et ($\bar{1}\bar{1}2$). Néanmoins, je la considère comme étant bien définie. Par contre, *ψ* (183) aura besoin d'une nouvelle confirmation, bien qu'il soit vrai que les mesures de *φ* et de *ϱ* sont bien en accord avec les valeurs théoriques et que le signal lui aussi était satisfaisant. Elle ne s'est présentée, en effet, qu'une seule fois dans un cristal dont le développement montre des anomalies de croissance.

L'habitus total de la vivianite de Rodna est représenté par la figure n° 1, les projections orthogonales des autres combinaisons importantes, y compris les nouvelles formes, sont données par les figures 2—6. Une liste des angles mesurés *φ* et *ϱ* et une statistique des formes sont données par le tableau qui suit:

Numéro	Lettre	Miller	Goldschmidt	φ mesurés	ϱ mesurés	φ calculés	ϱ calculés	Remarques
1.	*b*	(010)	0 ∞	0° 00′	90° 00′	0° 00′	90° 00′	Dans tous les cristaux.
2.	*a*	(100)	∞ 0	90° 03′	90° 00′	90° 00′	90° 00′	Dans tous les cristaux.
3.	*y*	(310)	3 ∞	76° 24′	90° 00′	76° 23′	90° 00′	Cristaux No 4, 7.
4.	*m*	(110)	∞	54° 03′	90° 00′	54° 01′	90° 00′	Dans tous les cristaux.
5.	*n*	(101)	+10	90° 00′	50° 49′	90° 00′	50° 45′	Cristaux No 4, 6.
6.	*B*	(102)	+½0	90° 00′	36° 26′	90° 00′	36° 31′	Cristal No 8.
7.	*μ**	($\bar{1}02$)	−½0	$\bar{9}\bar{0}$° 00′	12° 36′	$\bar{9}\bar{0}$° 00′	12° 43′	Cristal No 1.
8.	*w*	($\bar{1}01$)	−10	$\bar{9}\bar{0}$° 00′	35° 25′	$\bar{9}\bar{0}$° 00′	35° 20′	Dans tous les cristaux.
9.	*x*	(111)	+ 1	60° 06′	54° 35′	60° 10′	54° 40′	Cristaux No 1,2,4,6,7,8.
10.	*z*	(112)	+½	64° 36′	39° 12′	64° 39′	39° 20	Cristal No 8.
11.	*ψ**	(183)	+⅛⅜	17° 23′	62° 38′	17° 12′	62° 57′	Cristal No 5
12.	*r*	($\bar{1}12$)	−½	$\bar{3}\bar{2}$° 48′	22° 36′	$\bar{3}\bar{2}$° 45′	22° 39′	Cristaux No 1, 2, 3, 6, 7.
13.	*v*	($\bar{1}11$)	− 1	$\bar{4}\bar{5}$° 12′	44° 46′	45° 17′	44° 55′	Dans tous les cristaux.
14.	*s*	($\bar{1}31$)	−13	$\bar{1}\bar{8}$° 34′	65° 38′	$\bar{1}\bar{8}$° 36′	65° 46′	Cristaux No 1, 3, 5.

O. Müggе constata dans la vivianite l'existence de la surface de glissement qui est perpendiculaire à (010) et correspond, semble-t-il, à l'orthodôme ($\bar{1}03$). Sur un des cristaux de la vivianite de Rodna on remarque la translation naturelle faite suivant cette surface, comme le montre la fig. 1, tabl. I.

[1]) Goldschmidt: Winkeltabellen p. 359—360. — Paramètres d'après vom Rath.

Le lauediagramme, très riches en taches de diffraction révèle une symétrie binaire normale qui est en accord avec la classe monoclinique prismatique $C_{2h}^{'}$ $(2\,Ci)$ à laquelle la vivianite appartient par sa symétrie. Pour symboliser les surfaces on s'est servi d'une part des méthodes numériques indiquées par R i n n e[24]) et S c h i e b o l d[30]), d'autre part et surtout de la méthode graphique de W y c k o f f[36]). Tabl. III. est la reproduction d'une projection gnomonique des surfaces de structure du lauediagramme de la vivianite. Ce qui nous frappe au premier abord, c'est son caractère pseudohexagonal résultant du développement des zones:

$$[1\bar{3}0],\ [1\bar{3}1],\ [0\bar{2}1],\ [130],\ [\bar{1}\bar{3}\bar{1}],\ [0\bar{2}\bar{1}].$$

C'est justement elles qui comprennent tous les „noeuds" importants dont ou peut déduire (en s'adressant à part eux à plusieurs autres noeuds situés sur des zones parallèles plus faibles et indiquées également dans la projection) toutes les autres surfaces du lauediagramme. Ce qui est caractéristique, c'est que ces surfaces ont $k = 1, 2, 3, 5, 7$. Suivant les zones on a la disposition suivante des formes:

$[\bar{1}00]$	012, 025, 013, 015
$[5\bar{1}0]$	1.5.10, 1.5.14, 1.5.16, 1.5.$\bar{1}$0, 1.5.$\bar{1}\bar{2}$
$[3\bar{1}0]$	138, 1.3.10, 1.3.$\bar{8}$, 1.3.$\bar{1}\bar{2}$
$[2\bar{1}0]$	125, 12$\bar{6}$
$[5\bar{2}0]$	3.5.10, 3.5.12, 3.5.14, 3.5.$\bar{1}$0, 3.5.$\bar{1}\bar{2}$, 3.5.$\bar{1}\bar{4}$
$[1\bar{1}0]$	558, 112, 5.5.12, 225, 338, 113, 3.3.10, 114, 11$\bar{2}$, 5.5.12, 3.3.$\bar{8}$, 5.5.$\bar{1}\bar{4}$, 11$\bar{3}$, 3.3.$\bar{1}$0, 11$\bar{4}$, 11$\bar{6}$
$[7\bar{9}0]$	9.7.12, 9.7.1$\bar{4}$
$[5\bar{7}0]$	7.5.10, 7.5.12, 7.5.$\bar{8}$, 7.5.$\bar{1}$0, 7.5.$\bar{1}\bar{2}$, 7.5.$\bar{1}\bar{6}$
$[2\bar{3}0]$	323, 324, 32$\bar{4}$, 32$\bar{5}$, 32$\bar{6}$
$[3\bar{5}0]$	536, 538, 53$\bar{8}$, 53$\bar{1}$0
$[5\bar{9}0]$	954, 956, 95$\bar{8}$, 95$\bar{1}$0, 95$\bar{1}\bar{4}$
	13.7.16
$[1\bar{2}0]$	211, 423, 212, 213, 214, 21$\bar{2}$, 42$\bar{3}$, 21$\bar{3}$, 21$\bar{4}$
$[5.\bar{1}\bar{1}.0]$	11.5.2, 11.5.4, 11.5.6, 11.5.8, 11.5.12, 11.5.$\bar{2}$, 11.5.$\bar{8}$, 11.5.$\bar{1}$0, 11.5.$\bar{1}\bar{2}$
$[370]$	730, 732, 734, 7.3.10, 7.3$\bar{6}$, 7.3$\bar{8}$, 7.3.$\bar{1}$0, 7.3.1$\bar{2}$
$[2\bar{5}0]$	521, 52$\bar{2}$
$[5.\bar{1}\bar{3}.0]$	13.5.0, 13.5.6, 13.5.14, 13.5.$\bar{2}$, 13.5.$\bar{6}$, 13.5.$\bar{1}$0, 13.5.$\bar{1}\bar{2}$
	314, 313, 312, 934, 311, 932, 931, 310
$[1\bar{3}0]$	15.5.$\bar{2}$, 15.5.$\bar{4}$, 31$\bar{1}$, 93$\bar{4}$, 15.5.$\bar{8}$, 3.1.$\bar{2}$, 9.3.$\bar{8}$, 3.1.$\bar{3}$, 9.3.$\bar{1}$0, 31$\bar{4}$, 31.$\bar{5}$
$[3.\mathrm{II}.0]$	17.5.$\bar{2}$, 11.3.2, 11.3.$\bar{2}$, 11.3.$\bar{4}$, 11.3.$\bar{6}$, 11.3.$\bar{8}$
$[1\bar{4}0]$	411, 412, 41$\bar{1}$, 41$\bar{2}$, 41$\bar{3}$, 41$\bar{4}$
$[3.\bar{1}\bar{3}.0]$	13.3.0, 13.3.$\bar{6}$
$[1\bar{5}0]$	510, 512, 514, 51$\bar{1}$, 51$\bar{2}$, 51$\bar{3}$, 51$\bar{4}$
	61$\bar{2}$
$[1\bar{7}0]$	710, 712, 714, 71$\bar{2}$, 71$\bar{4}$

Je n'entreprendrai pas, pour le moment, une discussion plus détaillée de cette allure si intéressante, car j'espère réussir à déterminer de plus près, en m'adressant à des „röntgenspectrogrammes complets", les structures de tout le groupe de la vivianite. Très intéressante est également l'étude des déformations de la structure, causées par la translation. La fig. 2., tabl. II. réproduit le lauediagramme d'une tablette de vivianite entamée par une translation. On remarque que ce ne sont que les réflexes de la zone verticale qui subsistent intacts, tandis que tous les autres modifient fortement leur position et leur forme, d'une façon tout à fait analogue à celle observée dans le NaCl par Rinne[25]) et surtout par A. Joffé, M. Kirpičeva et M. A. Levickij[12]). Encore plus compliqués sont les lauediagrammes des cristaux ayant subi une torsion.

La densité a été déterminée par la suspension des fragments de clivage dans une solution diluée de Klein; elle est égale, à la température de 20°C à 2·678

Propriétés optiques. Dans ma „Contribution à l'étude des phosphates de fer et d'alumine"[34]), j'ai déterminé l'orientation optique de la vivianite de *Litošice* en accord avec Rosický[27]) et j'ai relevé la série d'auteurs précédents définissant mal cette orientation. A ces auteurs, j'ajoute comme un autre exemple C. Schmidt[31]). J'ai pu confirmer de nouveau l'orientation optique que j'ai indiqué: dans la vivianite de Rodna *l'axe b* correspond à la *bissectrice obtuse* α, *la bissectrice aigüe fait* avec la verticale un angle de $29^0 \pm 1^0$ *dans l'angle obtus* β. Cette orientation est tout à fait analogue à celle de l'érythrine, étudié par Gaubert et en particulier par Lincio[18]) et à celle de l'annabergite, étudiée récemment à ce point de vue par E. S. Larsen[17])*). La seule différence est celle dans chiffre pour l'angle $c : \gamma$ qui est le plus petit pour la vivianite et puis celle du caractère optique: la vivianite est optiquement positive, l'érythrine fait justement la transition ($2V$ est $89^0\,18'$ d'après G. Lincio), l'annabergite à son tour est négative. De même, l'orientation optique des autres membres de ce groupe (*symplésite, bobierrite, cabrérite*) est en parfait accord avec les minéraux cités plus haut. Au moyen du réfractomètre Pulfrich-Abbe, j'ai déterminé sur (010) les indices de réfraction suivants:

$\alpha_{Na} = 1\,5816$	$\gamma - \alpha = 0\,0549$
$\beta = 1.6042$	$\gamma - \beta = 0.0323$
$\gamma = 1.6365$	$\beta - \alpha = 0\,0226$

et les angles de axes optiques au conomètre:

A. Solution de Thoulet $n_{Na} = 1{\cdot}6092$

$2H_o$	$= 49^0\,02'$
$2H_a$ (calculé)	$= 40^0\,37'$
$2V$	$= 81^0\,32'$

B. Solution de Thoulet $n_{Na} = 1{\cdot}6966$

$2H_o$	$= 46^0\,00'$
$2H_a$ (calculé)	$= 37^0\,51'$
$2V$	$= 80^0\,56'$

*) Pour *la vivianite* Larsen donne, dans l'ouvrage cité dans le tableau p. 216 une valeur inexacte de l'angle γ (Z): c $61\frac{1}{2}^0$, bien qu'il ait constate antérieurement, p. 153, l'accord entre ses observations de l'orientation optique et les valeurs données par Rosický.

L'accord entre les deux résultats est très satisfaisant et il se rapproche sensiblement de la valeur calculée d'après les indices de réfraction ($2V = 81^0\,38'$).

Pléochroïsme: α = d'un bleu d'azur
β = bleu-vert
γ = jaune-vert
} très faible

Dans la communication citée, R o s i c k ý fait mention des „lamelles de mâcles", observées par lui lors de ses études des propriétés optiques de la vivianite de *Košťálov*. Ces „lamelles de mâcles", très distinctes sur (010), se trouvent dans la zone des orthodômes négatifs, leur normale fait avec la verticale un angle d'environ $59\frac{1}{2}^0$ qui correspond à l'orthodôme négatif (302) suivant lequel les lamelles de mâcles paraissent être orientées. En observant au microscope polarisant la vivianite de Rodna, j'ai trouvé des changements de l'orientation optique, comme on le voit sur la microphotographie ci-jointe: sur (010), on remarque entre les nicols croisés, surtout dans la position d'extinction, des zones parallèles ayant une inclinaison correspondant à l'orthodôme déjà cité (302). En même temps, ces zones présentent des couleurs d'interférence basses du I^{er}, rarement du II^{e} ordre. Examinant de plus près la cause de ce phénomène, j'ai remarqué que les zones en question se terminent toujours près des fissures orientées perpendiculairement à la verticale et correspondant à la surface de la cassure fibreuse. Les lamelles de mâcles n'appartiennent pas à la *vivianite*, mais à la *paravivianite**) qui se forme au dépend de la vivianite par une oxydation et peut être aussi une déshydratation partielle. C'est pourquoi ces „lamelles de mâcles" présentent en lumière ordinaire, sur (010), une coloration bleue-verte différente et un faible pléochroïsme contrairement aux endroits non entamés, qui sont presque incolores, non pléochroïques. La transformation se propage de la surface des cristaux vers l'intérieur et cela en suivant les fissures de clivage, ceci explique que dans les rebords des lamelles de clivage on rencontre le plus de ces petites bandes et des couleurs d'interférence plus hautes — la transformation s'est poursuivie ici le plus loin. Ceci est en accord également avec le cas, observé par R o s i c k ý, de la disparition des „lamelles de mâcles" à une température de 120^0 C. Dans la littérature personne, sauf R o s i c k ý, ne mentionne ces lamelles qui cependant apparaissent, selon toute vraisemblance, généralement. Moi même, je les ai observées sans parler des matériaux de Rodna surtout sur la vivianite de Bodenmais et de Leadville du Colorado.

---

*) Comme *paravivianite* je désigne, contrairement à S. B. P o p o v, tous les produits de la transformation de la vivianite résultant de l'oxydation et de la déshydratation éventuelle. Je ne considère pas comme exact de donner à ces produits des noms spéciaux et des formules de structure comme fait l'auteur cité pour l'α — kertchénite et l'oxykertchénite. Leur composition varie suivant le moment dans lequel nous saisissons la marche de la transformation. Il serait très intéressant, en général, de soumettre les matériaux de P o p o v à une étude microscopique.

Par contre, elles faisaient complétement défaut dans la vivianite de Litošice qui n'a pas été encore toucheé par l'oxydation. Mais ici encore, on peut obtenir le système de ces bandes par une oxydation faite au moyen de H_2O_2. MM. Larsen et Watson (36, 37) ont déjà prouvé, que la couleur de la vivianite subit un changement par l'oxydation, et que la biréfringence s'élève, les indices de réfraction étant α 1·580, β 1·598, γ 1·627 avant l'oxydation, α 1·579, β 1·603, γ 1·633 après l'oxydation de 4·45% *Fe O* en Fe_2O_3. Grâce à une oxydation énergique j'ai réussi à obtenir un produit dont l'indice de réfraction est voisin de 1·72, son charactère optique étant *négatif*. Notre tâche prochaine sera donc de suivre minutieusement la contiguité entre le changement des propriétés optiques et la déshydratation ou bien l'oxydation, puis de mettre en évidence les rapports qu'il y a entre les produits de ces transformations et les phosphates de fer, en particulier la *picite* et la *berounite*[6/33]).

Au point de vue paragénétique, la vivianite de *Rodna* est sur nos échantillons le minéral secondaire le plus jeune, étant associée aux menus cristaux de sidérite, également secondaire. Sa formation est tout à fait claire: elle se formait par l'action de PO_4''' sur les solutions de sulfate de fer, naissant ici en abondance par suite de la décomposition de la pyrïte. L'autre produit dérivé de cette décomposition est la limonite amorphe, contenant d'ailleurs également le SO_4''. Les synthèses de la vivianite, faites par A. C. Becquerel[2]), H. Debray[8]), G. Césaro[7]), et Klobbie[13]) ne sont que de petites modifications du même processus dans la nature.

La partie cristallographique et optique de ce travail fut exécutée en hiver 1923/24 à l'Institut minéralogique de l'Université Charles à Prague, les lauediagrammes et leur symbolisation furent faits à l'Institut minéralogique de l'Université Frédéric à Christiania, en été 1924. C'est pour moi un devoir particulièrement agréable de remercier les directeurs des deux instituts, M. le prof. Dr. V. M. Goldschmidt de Christiania et M. le prof. Dr. F. Slavík de Prague de la bonté avec laquelle ils avaient donné à ma disposition les instruments nécessaires, et du grand intérêt qu'ils avaient apporté au présent travail.

Prague-Christiania, août 1924.

Institut minéralogique et pétrographique
de l'Université Charles IV.

LA LITTÉRATURE CITÉE.

[1]) Ackner M. J.: Mineralogie Siebenbürgens, Hermannstadt 1855.

[2]) Becquerel A. C.: Ann. chim. phys. *54*, 449.

[3]) Becke Fr., Tscherm. P. M. N. F. *5*, 507.

[4]) Bielz Al. E.: Gesteine Siebenbürgens etc. II. Aufl. Hermannstadt 1889.

[5]) Blum R J.: Pseudomorphosen des Mineralreiches, Zweiter Nachtrag, Heidelberg 1852.

[6]) Bořický Em., Sitzber. Wiener Ak. *56*, 1, 11 (1867).

[7]) Cesàro G., Ann. de la soc. géol. Belgique *13*, 14 (1885—86).

[8]) Debray H., C. R. *59*, 40.

[9]) Döll E., Tscherm. M. Mitt. 1874, 88.

[10]) Francke H.: Abhandl. d. naturw. Ges. Isis, Dresden 1896, 25. Ref. Groths Zeitschr. *30*, 663.

[11]) Hadding A.: De röntgenkristallografiska apparaterna och deras användning Lund 1921.

[12]) A. Joffé, M. Kirpičeva, M. A. Levicki j Z. f. Phys. Bd. 22, 1924, p. 286—302.

[13]) Klobbie u. J. M. van Bemmelena, Z. f. anorg. Chem. *22*, 343 (1900).

[14]) Koch A., Erdély ásványainak kritikai átnézete, Kolozsvár 1885.

[15]) Krenner J. A., Földt. Kőzlőny 1877, *12*, 400. Ref. Groth, Zeitschr. *2*, 304.

[16]) Krenner J. A., Mag. Akad. Ertes. 1881, *15*, 111. Groth, Zeitschr. *8*, 532.

[17]) Larsen E. S.: Microscopic determination of monopaque minerals, Washington 1921.

[18]) Lincio G., Sitzber. Heidelberger Ak. d. Wiss. 1914, č. 15.

[19]) Mügge O., N. Jb. f. Min., Geol. etc. 1884, *1*, 50—62.

[20]) Pošepný F., Verhandl. geol. Reichsanst. 1865, *15*, 184.

[21]) vom Rath G., Niederrhein. Ges. Bonn. 1879, 273.

[22]) vom Rath G., Niederrh. Ges. Bonn 1879, 279; Groth, Zeitsch. *4*, 429.

[23]) Reuss A. E., Sitzber. Wiener Ak., 1853, *10*, 44.

[24]) Rinne Fr., Ber. der math. phys. Kl. Ges. Wiss. Leipzig LXVII., 1915, I., II.

Anleitung zu röntgenogr. Untersuchungen.

[25]) Rinne Fr., Zeitschr. f. Kristallogr. *59*, 2/3. Heft p. 230 sq. 1923.

[26]) Rose G., Monatsber. Ak. Berl. 1870, 341, 345.

[27]) Rosický V., Rozpravy Č. Ak. XVII., č. 28, 3, str. 17 a násl.

[28]) Rozlozsnik P., Ung. Geol. R. Anst. Bericht 1907.

[29]) Sadebeck A., Zeitschr. d. d. geol. Ges. 1878, *30*, 590; 1869, *21*, 627. 1872, *24*, 180—182.

[30]) Schiebold E., Abh. der math. phys. Kl. der Ges. Wiss. Leipzig XXXVI, II.

[31]) Schmidt C., Eclogae geol. Helvet. 9, č. 1, 75—76, Ref. Groth, *46*, 307.

[32]) Tschermak G. u Pošepného, Verh. geol. Reichsanst. 1865, *15*, 184. —

[33]) Tschermak G., Sitzber. Wiener Ak. *49*, I. 341 (1864).

[34]) Ulrich Fr., Rozpravy Č. Ak. XXXI. tř. 2, č. 10, str. 4 a násl.

[35]) Vrba K., Zeitschr. f. Krystallogr. *2*, 157.

[36]) Watson Th. L. and Gooch St. D.: Vivianite from the Land Pebble Phosphate Deposits of Florida, Journ. of the Wash. Academy of Sciences VIII., 82—88, 1918.

[37]) Watson Th. L.: The color change in vivianite and its effects on the optical properties, Amer. Mineralogist III (1918), 159—161.

[38]) Wyckoff R. G., Am. J. of Sci. *50*, 317, 1920.

[39]) Zepharovich V., Mineralogisches Lexicon I., II., III.

EXPLICATIONS DES PLANCHES.

Tabl. I.

Fig. 1. Druse de la vivianite de Rodna avec cristaux columnaires dont un montre une translation naturelle.

Fig. 2. Bandes oxydées dans le cristal de vivianite sur (010) en lumière ordinaire. Agrandi.

Fig. 3. Mêmes bandes entre les nicols croisés. Agrandi.

Tabl. II.

Lauediagrammes de la vivianite.

Fig. 1. Cristal normal.

Fig. 2. Cristal avec translation.

Tabl. III.

Projection gnomonique du lauediagramme de la vivianite sur (010).

Droites conjuguées du complexe tétraédral.

Par

J. SOBOTKA.

(Avec une figure dans le texte.)

Présenté le 20 avril 1923.

1. Soit $A_1\,A_2\,A_3\,A_4$ le tétraèdre fondamental du complexe tétraédral et soit ϱ la valeur du rapport anharmonique qui le caractérise. Si s est alors un rayon quelconque du complexe, on a

$$s\,(A_1\,A_2\,A_3\,A_4) = s\,(\mathrm{A}_1\,\mathrm{A}_2\,\mathrm{A}_3\,\mathrm{A}_4) = \varrho,$$

où $(s\,A_i)$ représente le plan qui joint la droite s avec le sommet A_i et $(s\,\mathrm{A}_i)$ le point d'intersection de la droite s avec la face opposée A_i du tétraèdre.

Si S est le point quelconque, son cône du complexe K est le lieu géométrique des droites qui projettent les droites $S\ (A_1\ .\ .\ .\ A_4)$ par des plans du rapport ϱ. La trace k du K dans le plan $A_1\,A_2\,A_3$ est la conique passant par les points A_1, A_2, A_3 et par le point S_4 dans lequel la droite $A_4\,S$ coupe le plan indiqué. La conique k est le lieu géométrique des points dans le plan $A_1\,A_2\,A_3$ qui projettent les points A_1, A_2, A_3, S_4 par des rayons du rapport anharmonique ϱ. La conique considérée est donc commune à tous les cônes du complexe qui ont pour sommets les points situés sur la droite $S\,A_4$. Nous jugeons par dualité que toutes les coniques du complexe situées dans les plans du faisceau contenant une des quatre faces du tetraèdre fondamental forment un cône qui a pour sommet le sommet du tétraèdre fondamental, opposé à la face considérée.

Si le sommet S du cône du complexe se déplace sur le rayon p appartenant au complexe, k décrit alors le faisceau des coniques (k) passant par les points A_1, A_2, A_3 et par le point P_4 dans lequel p coupe le plan $A_1\,A_2\,A_3$. Ce dernier faisceau est projectif avec la série de points S_4, traces des droites $A_4\,S$, les points S_4 étant les points d'intersection des coniques k avec la droite passant par le point fondamental P_4 du faisceau (k), droite dans laquelle le plan $(A_4\,p)$ coupe le plan $(A_1\,A_2\,A_3)$. Or, le faisceau (k) est encore projectif avec le faisceau des tangentes t des courbes k au

point P_4. C'est pourquoi le faisceau des tangentes t est projectif avec la série des points S sur p. De là suit le théorème de Plücker:*)

„Les cônes du complexe ayant un rayon quelconque p du complexe tétraédral commun, jouissent de la propriété que la série de leur sommets sur p et le faisceau de leurs plans tangents le long de p sont projectifs".

Le théorème dualistique dit:

„Le faisceau de plans menés par la droite quelconque p du complexe et la série de points de contact des coniques du complexe dans les plans du faisceau avec la droite p sont projectifs."

2. Supposons maitenant que la droite p n'appartienne pas au complexe.

Soit encore P_4 sa trace dans le plan $A_1 A_2 A_3$, et soit p_4 la trace du plan $(A_4 p)$ que l'on suppose coupant les droites $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$ aux points B_1, B_2, B_3. Si l'on fixe la position du point B_4 sur p_4 telle que l'on ait $(B_1 B_2 B_3 B_4) = \varrho$, la conique du complexe dans le plan $(A_4 p)$ se décompose en faisceaux de droites ayant pour sommets A_4 et B_4. Menons dans ce plan par le point B_4 une droite quelconque b; elle appartient au complexe. La trace du cône du complexe dont le sommet est un point quelconque S sur la droite p, s'identifie, d'après ce qui précède, avec la trace du cône du complexe ayant pour sommet le point S_β dans lequel la droite $A_4 S$ coupe la droite b. La trace de ce cône passe donc par les points A_1, A_2, A_3, B_4 et par le point S_4 dans lequel $S\,A_4$ coupe le plan $A_1 A_2 A_3$.

Il en résulte que même les traces k des cônes du complexe fondamental, dont les sommets se trouvent sur une droite quelconque sur n'importe quelle face du tétraèdre fondamental forment un faisceau de coniques (k). Ce faisceau est projectif avec la série de points $S_4, \ldots$ dans laquelle il est coupé par la droite p_4 passant par le point fondamental B_4 du faisceau. En même temps le faisceau (k) est projectif avec le faisceau de polaires t du point P_4 par rapport à ses éléments respectifs. On peut donc écrire $S \ldots \barwedge S_\beta \ldots \barwedge S_4 \ldots \barwedge t \ldots$ Il s'en suit que la série de points S sur p est projective avec le faisceau de polaires t du point P_4 par rapport aux coniques dans lesquelles les cônes du complexe ayant pour sommets les points S coupent le plan $A_1 A_2 A_3$. Si le point S se rapproche au point P_4, le point S_4 se rapproche en même temps au point P_4 et pour la position limite S_4 se confond avec P_4; en ce cas la droite respective t elle-même passe par le point P_4.

De la relation $(B_1 B_2 B_3 B_4) = \varrho$ nous avons encore $(B_4 A_1,\ B_4 A_2,\ B_4 A_3,\ p) = \varrho$, car $(B_1 B_2 B_3 B_4) = A_1\ (B_1 B_2 B_3 B_4) = (p_4,\ B_4 A_3,\ B_4 A_2,\ B_4 A_1) = (B_4 A_1,\ B_4 A_2,\ B_4 A_3,\ p_4)$.

Si donc S_4 se confond avec P_4, q_4 étant la droite dans $A_1 A_2 A_3$ pour laquelle $(P_4 A_1,\ P_4 A_2,\ P_4 A_3,\ q_4) = \varrho$, le cône du complexe se décompose

---

*) Cf. Th. Reye: Die Geom. d. Lage 3ème volume, 4ème édition, p. 6 et suiv.

en un faisceau autour de P_4 dans le plan $(A_4\, q_4)$ et en un faisceau des droites dans $A_1\, A_2\, A_3$ ayant aussi P_4 pour centre, et la conique, dans laquelle les cônes du complexe aux sommets situés sur la droite $(A_4\, P_4)$ coupent le plan $A_1\, A_2\, A_3$, est tangente au point P_4 à la droite q_4. Comme la série $S, \ldots$ est projective avec le faisceau $t, \ldots$ et que pour le point $S \equiv P_4$ la droite respective $t \equiv q_4$ passe par ce point, les plans $(S\, t), \ldots$ déterminent donc un faisceau. Désignons son axe par p^*. Nous pouvons alors énoncer les théorèmes suivants se rapportant au complexe tétraédral:

„Les plans polaires d'une droite donnée p par rapport aux cônes du complexe ayant leurs sommets sur p forment un faisceau de plans qui est projectif avec la série de ces sommets.“

„Les pôles d'une droite donnée p par rapport aux coniques du complexe dans les plans passant par la droite p forment une série de points qui est projective avec le faisceau de ces plans.“

3. Exprimons cette relation algébriquement. L'équation du complexe tétraédral par rapport au tetraèdre fondamental peut s'écrire sous la forme

$$p_{31}\, p_{24} + \varrho\, p_{23}\, p_{14} = 0.$$

Les cônes du complexe pour les points (x) et (y) sont les suivants:

$$K_1 \equiv (x_3 X_1 - x_1 X_3)(x_2 X_4 - x_4 X_2) + \varrho\,(x_2 X_3 - x_3 X_2)(x_1 X_4 - x_4 X_1) = 0$$
$$K_2 \equiv (y_3 X_1 - y_1 X_3)(y_2 X_4 - y_4 X_2) + \varrho\,(y_2 X_3 - y_3 X_2)(y_1 X_4 - y_4 X_1) = 0$$

et le cône du complexe ayant pour sommet un point quelconque de la droite $(x\, y)$ est:

$$[(x_3 + \lambda\, y_3)\, X_1 - (x_1 + \lambda\, y_1)\, X_3] \,.\, [(x_2 + \lambda\, y_2)\, X_4 - (x_4 + \lambda\, y_4)\, X_2] +$$
$$+ \varrho\, [(x_2 + \lambda\, y_2)\, X_3 - (x_3 + \lambda\, y_3)\, X_2] \,.\, [(x_1 + \lambda\, y_1)\, X_4 - (x_4 + \lambda\, y_4)\, X_1] = 0$$

Pour le plan polaire du point (x) par rapport à ce cône on obtient donc l'équation

$$(- x_3\, p_{24} + \varrho\, x_4\, p_{23})\, X_1 + (x_4\, p_{31} + \varrho\, x_3\, p_{14})\, X_2 + (x_1\, p_{24} - \varrho\, x_2\, p_{14})\, X_3 +$$
$$+ (- x_2\, p_{31} - \varrho\, x_1\, p_{23})\, X_4 + \lambda\, [(- y_3\, p_{24} + \varrho\, y_4\, p_{23})\, X_1 + (y_4\, p_{31} +$$
$$+ \varrho\, y_3\, p_{14})\, X_2 + (y_1\, p_{24} - \varrho\, y_2\, p_{14})\, X_3 + (- y_2\, p_{31} - \varrho\, y_1\, p_{23})\, X_4] = 0.$$

Si le sommet du cône parcourt la droite $(x\, y)$, le plan polaire du point x et par suite de la droite $p \equiv (x\, y)$ décrit par rapport à ce cône, comme le montre la dernière équation, un faisceau de plans projectif; l'axe p^* du faisceau est formé par l'intersection des plans ayant pour coordonnées:

$$- x_3\, p_{24} + \varrho\, x_4\, p_{23},\ x_4\, p_{31} + \varrho\, x_3\, p_{14},\ x_1\, p_{24} - \varrho\, x_2\, p_{14},\ - x_2\, p_{31} - \varrho\, x_1\, p_{23},$$
$$- y_3\, p_{24} + \varrho\, y_4\, p_{23},\ y_4\, p_{31} + \varrho\, y_3\, p_{14},\ y_1\, p_{24} - \varrho\, y_2\, p_{14},\ - y_2\, p_{31} - \varrho\, y_1\, p_{23}.$$

Si nous désignons par Q_{ik} les coordonnées de cette droite, nous obtiendrons facilement que

$$
\begin{aligned}
Q_{12} &= -\,p_{34}\,(p_{31}\,p_{24} + \varrho^2\,p_{23}\,p_{14}),\\
Q_{23} &= -\,p_{14}\,(p_{31}\,p_{24} - 2\,\varrho\,p_{31}\,p_{24} - \varrho^2\,p_{23}\,p_{14}),\\
Q_{31} &= -\,p_{24}\,(-\,p_{31}\,p_{24} - 2\,\varrho\,p_{23}\,p_{14} + \varrho^2\,p_{23}\,p_{14}),\\
Q_{14} &= -\,p_{23}\,(p_{31}\,p_{24} - 2\,\varrho\,p_{31}\,p_{24} - \varrho^2\,p_{23}\,p_{14}),\\
Q_{24} &= -\,p_{31}\,(-\,p_{31}\,p_{24} - 2\,\varrho\,p_{23}\,p_{14} + \varrho^2\,p_{23}\,p_{14}),\\
Q_{34} &= -\,p_{12}\,(p_{31}\,p_{24} + \varrho^2\,p_{23}\,p_{14}).
\end{aligned}
$$

Si au lieu des coordonnées de plans Q_{ik} nous introduisons les coordonnées de points P_{lm} de la droite p^*, les expressions qu'on a indiquées nous donnent d'une part les équations

$$\frac{P_{12}}{p_{12}} - \frac{P_{34}}{p_{34}} = 0, \quad \frac{P_{23}}{p_{23}} - \frac{P_{14}}{p_{14}} = 0, \quad \frac{P_{31}}{p_{31}} - \frac{P_{24}}{p_{24}} = 0, \tag{1}$$

et d'autre part, après avoir éliminé les produits entre les parenthèses, les équations

$$
\begin{aligned}
&(1-\varrho)\frac{P_{12}}{p_{12}} + \varrho\frac{P_{31}}{p_{31}} - \frac{P_{23}}{p_{23}} = 0 \qquad (1-\varrho)\frac{P_{34}}{p_{34}} + \varrho\frac{P_{24}}{p_{24}} - \frac{P_{14}}{p_{14}} = 0\\
&(1-\varrho)\frac{P_{12}}{p_{12}} + \varrho\frac{P_{24}}{p_{24}} - \frac{P_{14}}{p_{14}} = 0 \qquad (1-\varrho)\frac{P_{34}}{p_{34}} + \varrho\frac{P_{31}}{p_{31}} - \frac{P_{23}}{p_{23}} = 0\\
&(1-\varrho)\frac{P_{34}}{p_{34}} + \varrho\frac{P_{24}}{p_{24}} - \frac{P_{23}}{p_{23}} = 0 \qquad (1-\varrho)\frac{P_{12}}{p_{12}} + \varrho\frac{P_{31}}{p_{31}} - \frac{P_{14}}{p_{14}} = 0\\
&(1-\varrho)\frac{P_{34}}{p_{34}} + \varrho\frac{P_{31}}{p_{31}} - \frac{P_{14}}{p_{14}} = 0 \qquad (1-\varrho)\frac{P_{12}}{p_{12}} + \varrho\frac{P_{24}}{p_{24}} - \frac{P_{23}}{p_{23}} = 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Nous avons trouvé ainsi une série des complexes des droites qui contiennent tous la droite donnée p et la droite p^*. On remarque tout d'abord que l'on aboutirait à ces mêmes équations si l'on avait introduit aussi bien dans les équations du complexe tétraédral que dans les équations (1) et (2) au lieu des coordonnées de points des droites des coordonnées de plans; en effet, les équations (1) se ramènent par là en elles mêmes et chaque équation en (2) du côté gauche passe dans l'équation correspondante du côté droit et vice versa. On en déduit que la droite p^* est alors d'une part l'intersection des plans polaires de la droite p pour les cônes du complexe ayant leurs centres sur p et que d'autre part elle est aussi le lieu géométrique des pôles de la droite p pour les courbes du complexe dans les plans du faisceau ayant p pour axe. Or ceci peut être déduit directement. Soit, en effet, S un point quelconque sur p et soit S un plan quelconque passant par la droite p. La droite du plan S passant par le point S et conjuguée à p par rapport à la conique k du complexe comprise en S passe par le pôle de la droite p par rapport à k est située en même temps dans le plan polaire de la droite p par rapport au cône du complexe K avec le sommet S. Par conséquent, les pôles de la droite p par rapport aux coniques du complexe se trouvent dans tous les plans passant par la droite p dans le plan polaire de la droite p par rapport à K et ceci est vrai pour n'importe quel point S sur p.

Les complexes des droites (2) sont toujours spéciaux, car ils sont contenus dans les systèmes de complexes à trois membres dans lesquels les complexes fondamentaux sont particuliers et dont les axes sont représentés par les arêtes du tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$. Pour les complexes du côté gauche des équations (2) les axes passent par les sommets du tétraèdre, pour les complexes du côté droit les axes se trouvent sur ses faces. Ces axes sont les droites q_1, q_2, q_3, q_4 sur les faces du tétraèdre fondamental que nous avons déterminées dans ce qui précède. Si nous désignons par $P_1 \ldots P_4$ les traces de la droite p dans les plans $(A_2 A_3 A_4), \ldots (A_1 A_2 A_3)$ nous avons alors $P_4 (A_1, A_2, A_3, q_4) = P_3 (A_1, A_2, q_3, A_4) = P_2 (A_1, q_2, A_3, A_4) = P_1 (q_1, A_2, A_3, A_4) = \varrho$. Le point P_4 a, en effet, pour coordonnées $(p_{14}, p_{24}, p_{34}, 0)$; les droites $P_4 A_1$, $P_4 A_2$, $P_4 A_3$ ont par conséquent les équations

$$\begin{array}{lll} * & p_{34} x_2 & - p_{24} x_3 = 0 \\ p_{34} x_1 & * & - p_{14} x_2 = 0 \\ p_{24} x_1 & - p_{14} x_3 & * \quad = 0 \end{array}$$

De ces équations nous obtiendrons par un calcul connu l'équation de la droite q_4 qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{1-\varrho}{p_{34}} x_3 + \frac{\varrho}{p_{24}} x_2 - \frac{1}{p_{14}} x_1 = 0.$$

Cette droite a donc les coordonnées r_{ik} dont les valeurs proportionnelles sont

$$r_{12} = \frac{1-\varrho}{p_{34}}, \quad r_{31} = \frac{\varrho}{p_{24}}, \quad r_{23} = -\frac{1}{p_{14}}, \quad r_{14} = r_{24} = r_{34} = 0,$$

et les coordonnées P_{ik} des droites qui coupent la droite q_4 satisfont à l'équation

$$\frac{1-\varrho}{p_{34}} P_{34} + \frac{\varrho}{p_{24}} P_{24} - \frac{P_{14}}{p_{14}} = 0,$$

qui est l'équation du premier complexe du côté droit en (2). Cette dernière équation avec d'autres équations du côté droit en (2) indique simplement que p^* est la transversale des droites q_1, q_2, q_3, q_4 ayant des coordonnées telles qu'elles donnent à r_{12}, r_{23}, r_{31}, r_{14}, r_{24}, r_{34} des valeurs proportionnelles respectives

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1-\varrho}{p_{34}}, & -\frac{1}{p_{14}}, & \frac{\varrho}{p_{24}}, & 0, & 0, & 0, \\ \frac{1-\varrho}{p_{34}}, & 0, & 0, & -\frac{1}{p_{23}}, & \frac{\varrho}{p_{31}}, & 0, \\ 0, & -\frac{1}{p_{14}}, & 0, & 0, & \frac{\varrho}{p_{31}}, & \frac{1-\varrho}{p_{12}}, \\ 0, & 0, & \frac{\varrho}{p_{24}}, & -\frac{1}{p_{23}}, & 0, & \frac{1-\varrho}{p_{12}}. \end{array}$$

D'une façon analogue nous obtiendrons les axes des complexes spéciaux linéaires exprimés sur le côté gauche des équations (2). Si nous designons par $P_1 \ldots P_4$ les traces de la droite p sur les plans $(A_2, A_3, A_4), \ldots,$ $(A_1 A_2 A_3)$ et si nous fixons sur p des points G_1, G_2, G_4 tels que l'on ait

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = (P_1 P_2 G_3 P_4) = (P_1 G_2 P_3 P_4) = (G_1 P_2 P_3 P_4) = \varrho,$$

alors les droites

$$g_4 \equiv (A_4 G_4), g_3 \equiv (A_3 G_3), g_2 \equiv (A_2 G_2), g_1 \equiv (A_1 G_1)$$

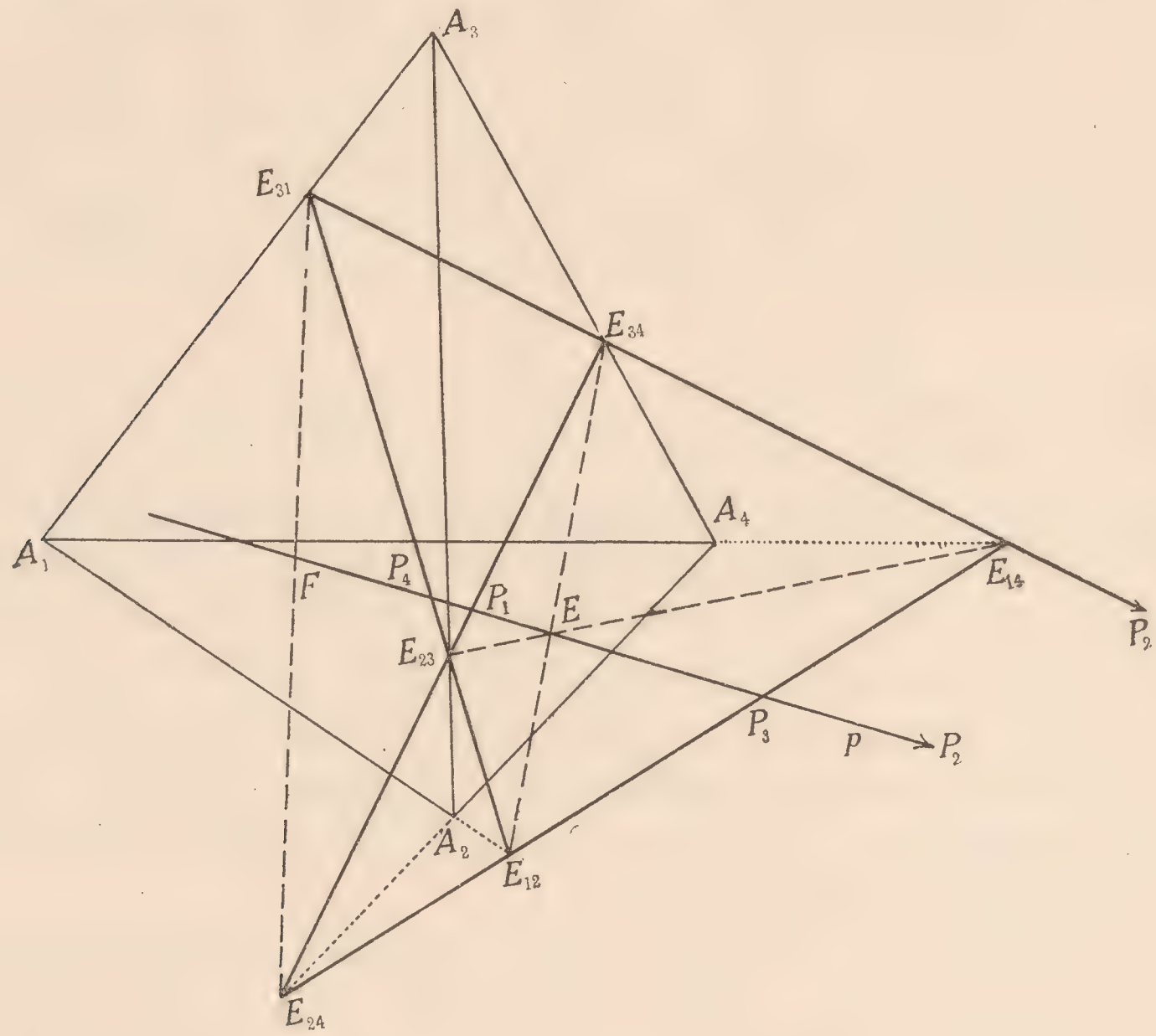
représentent les axes de ces complexes et leurs équations peuvent être exprimées d'une façon analogue à celle du cas précédent. Puisque nous aboutissons à la droite p^* par deux procédés dualistiques, la construction elle-même nous montre aussi directement que cette droite coupe bien les droites $g_1, \ldots g_4$.

4. Il est à remarquer que de ces huits droites ni les premières quatre, ni les secondes quatre ne sont en position hyperboloïdique car autrement les déterminants principaux des coordonnées de ces droites devraient être égaux à zéro, ce qui n'est pas vrai. Il en suit, au point de vue géométrique, que pour une telle position deux cas pourraient se présenter: ou bien les projections de ces quatre droites, projetées de l'un des sommets du tetraèdre A_1, A_2, A_3, A_4 sur la face opposée devraient nécessairement appartenir à deux faisceaux des droites, ou bien leurs traces sur l'une des faces quelconque de ce tétraèdre devraient être situées sur deux droites: ce qui, évidémment n'est pas vrai.

Les équations (1) expriment trois complexes linéaires généraux qui ont la droite p commune et dont chacun possède un des quadrilatères ayant pour côtés les arètes du tetraèdre $A_1 \ldots A_4$. Considérons les deux premiers d'entre eux, soit p, $A_1 A_4 A_2 A_3$ et p, $A_1 A_2 A_4 A_3$. Le premier a pour polaires les arètes $A_1 A_2$, $A_3 A_4$, l'autre $A_1 A_4$, $A_2 A_3$. Tous les deux ont donc les droites $A_1 A_3$, $A_2 A_4$, p communes et par suite ils ont encore commune une série de droites sur la surface du deuxième degré R définie par elles.

Les droites de jonction de la droite p et des polaires $A_1 A_2$, $A_3 A_4$ forment une série de droites sur la surface du deuxième degré L_1 dans le premier complexe et les droites de jonction de la droite p et des polaires $A_1 A_4$, $A_2 A_3$ forment une série de droites sur la surface du deuxième degré L_2 dans le seconde complexe. Un plan quelconque passant par la droite p contient une telle droite de jonction l_1 sur L_1 et une l_2 sur L_2; soient L_1, L_2 les points, où la première et la seconde droite coupent p. Si ce plan tourne autour de p (voir la figure) les points L_1, L_2 décrivent deux séries projectives ayant comme éléments doubles E, F. Il en résulte que de telles droites de jonction l_ε^1, l_ε^2 passant par le point E se trouvent dans un plan E et les droits de jonctions $l_\varphi^{(1)}$, l_φ^2 passant par le point F, dans un plan F avec la droite p. Les points E et F sont donc les pôles des plans E, F pour

les deux complexes. Le plan E coupe les faces du tetraèdre $A_1 \ldots A_4$ dans un quadrilatère. Désignons E_{ik} ses sommets sur les arêtes $A_i A_k$. Son triangle polaire est formé par les droites $l_\varepsilon^{(1)} = E_{12} E_{34}$, $l_\varepsilon^{(2)} = E_{23} E_{14}$ et par la droite $l_\varepsilon = E_{31} E_{24}$ qui du fait qu'elle coupe $A_1 A_3$, $A_2 A_4$ et p appartient au troisième complexe en (1) défini par la droite p et par le quadrilatère $A_1 A_2 A_3 A_4$. La droite e harmonique avec p par rapport aux droites $(A_1 A_3)$ et $(A_2 A_4)$ appartient à tous les trois complexes (1), car elle se trouve sur



la surface R et les droites du troisième complexe qui coupent la droite p forment une surface du deuxième degré L_3 dont les droites de la deuxième série sont formées par les couples de l'involution des polaires conjuguées de ce complexe. Dans cette involution $A_1 A_3$, $A_2 A_4$ forment un de ces couples, la droite p est un élément double de cette involution; l'autre élément double, c'est la droite qui forme avec p une division harmonique par rapport à $A_1 A_3$, $A_2 A_4$. C'est donc la droite e; or, une polaire double d'un complexe des droites est une droite du complexe.

Les deux premiers complexes ont donc en point E_{31} le plan polaire $(A_1 A_3 E)$ communs, en point E_{24} le plan polaire $(A_2 A_4 E)$, en point E_0, dans lequel la droite e coupe le plan E, le plan polaire (E_e). Ces trois plans se rencontrent en droite de jonction l_φ menée du point E aux droites $A_1 A_3$, $A_2 A_4$. Il s'en suit que les deux complexes ont dans tous les points sur l_ε leurs plans polaires communs passant par la droite l_φ. Les droites l_ε, l_φ du troisième complexe sont donc les polaires communes des deux premiers complexes et par suite elles sont les directrices de la congruence commune à ces deux complexes.

Des considérations analogues s'appliquent au point F qui nous fait aboutir à nouveaux aux directrices de la dite congruence.

Nous en déduisons que la droite l_φ passe déjà par le point F. Ces complexes sont alors en involution. Ceci résulte directement des équations (1), car les formes polaires de leurs déterminants considérés deux par deux sont égales à zéro. Mais on le déduit aussi directement de leur construction. En effet, si nous envisageons par exemple le rayon commun $A_1\,A_3$ à deux prémiers complexes, nous rémarquons que le plan $A_1\,A_2\,A_3$ a A_3 pour point polaire dans le premier, A_1 dans le deuxième complexe et que le plan $A_1\,A_3\,A_4$ a A_1 pour point polaire dans le prémier complexe et A_3 dans le second. Le plan $(p\,A_2)$ contient les rayons p et $P_1\,A_2$, il a donc P_1 pour point polaire dans le premier complexe. Il contient aussi les rayons p et $P_3\,A_2$ et a donc P_3 pour point polaire dans le second complexe. Par conséquent les points E et F forment une division harmonique avec les points P_1 et P_3; de même, le plan $(p\,A_3)$ joint les droites p et $P_4\,A_3$ et a alors P_2 pour point polaire dans le prémier complexe et comme il joint en outre les droites p et $P_2\,A_3$, il a P_2 pour point polaire dans le second complexe. Il s'en suit que les points E, F forment une division harmonique d'une part avec les points P_1, P_3 et d'autre part avec les points P_2, P_4. Ceci se trouve confirmé encore par la construction des droites $l_\varepsilon\,l_\varphi$. En effet, si nous coupons les côtés du quadriangle $E_{12}\,E_{23}\,E_{34}\,E_{14}$ par la droite p nous trouvons que les couples de points $P_1\,P_3\,.\,P_2\,P_4$ définissent l'involution ayant en E un point double. Il résulte de ce quadriangle que les droites $E_3\,E$, $E_{31}\,E_{24}$ forment une division harmonique avec les droites $E_{31}\,E_{12}$, $E_{31}\,E_{14}$; si l'on les coupe par la droite p, on voit que les points E, F forment aussi avec les points P_2, P_4 une division harmonique.

Nous déduisons par dualité que les plans E, F représentent les éléments doubles dans l'involution des plans $(A_1\,p)\;(A_3\,p)$, $(A_2\,p)\;(A_4\,p)$. Ceci nous conduit au résultat suivant.

Si une droite quelconque p coupe les faces du tetraèdre donné $A_1 \ldots A_4$ aux points P_1, P_2, P_3, P_4, ces points définissent trois involutions sur p, à savoir $P_3\,P_1\,.\,P_2\,P_4$; $P_1\,P_2\,.\,P_3\,P_4$; $P_2\,P_3\,.\,P_1\,P_4$ aux éléments doubles E, F; E', F'; E'', F''; ils définissent en outre trois involutions dans le faisceau de plans ayant pour axe p, à savoir $(A_3\,p)\;(A_1\,p)\,.\,(A_2\,p)\;(A_4\,p)$; $(A_1\,p)\;(A_2\,p)\,.\;(A_3\,p)\;\;(A_4\,p)$; $(A_2\,p)\;\;(A_3\,p).\;(A_1\,p)\;(A_4\,p)$ aux éléments doubles respectifs E, F; $E'\,F'$; $E''\,F''$. Les droites de jonction l_φ, l_ε; $l'_\varphi, l'_\varepsilon$; $l''_\varphi, l''_\varepsilon$ menées de ces points double respectivement aux couples de droites $A_3\,A_1$, $A_2\,A_4$; $A_1\,A_2$, $A_3\,A_4$; $A_2\,A_3$, $A_1\,A_4$ sont situées sur la surface du deuxième degré R; leurs transversales forment sur cette surface une série de droites communes aux complexes (1). En même temps, ces droites de jonction sont situées respectivement dans les plans F, E; F', E'; F'', E''.

Puisque les points A_1, A_3 sont les points polaires du plan $A_1\,A_3\,A_4$

pour les deux premiers complexes en (1), ils font une division harmonique avec les points d'intersection des droites l_ε, l_φ avec $(A_1\ A_3)$.

Les points A_1, A_3 sont par consequent conjugués par rapport à la surface R. On remarque de la même façon que tous les deux sommets du tetraèdre $A_1 \ldots A_4$ sont conjungués par rapport à la surfare R et $A_1 \ldots A_4$ est un tétraèdre polaire de la surface R, de sorte que celle-ci est complètement déterminée si nous connaissons sa droite p.

5. Si l'on se donne un complexe tétraédral quelconque ayant $A_1 \ldots A_4$ pour tétraèdre fondamental, la conique du complexe k dans le plan E est alors circonscrite au quadrilatère dans lequel il coupe le tétraèdre fondamental; les droites l_ε, $l_\varepsilon^{(1)}$, $l_\varepsilon^{(2)}$ forment donc son triangle polaire et le pôle de la droite p par rapport à k se trouve sur la droite l_ε, La droite p^* que nous avons associée à la droite p par rapport au complexe tétraédral coupe donc la droite l_ε. De même nous remarquons que la droite p^* coupe aussi les droites l_φ, l_ε', l_φ', l_ε'' et l_φ''. La droite p^* appartient par conséquent à la surface R ce qui démontre d'une façon synthétique l'exactitude des équations (1) pour cette droite.

Appelons p^* la droite conjuguée à la droite p par rapport au complexe tétraédral; nous pouvons alors énoncer le théorème suivant:

„Les droites conjuguées à une droite donnée p par rapport à tous les complexes tetraédraux ayant le tétraèdre fondamental $A_1 \ldots A_4$ commun, forment une série de droites sur la surface du second degré R qui passe par la droite p et qui a ce tetraèdre pour tetraèdre polaire. Les droites, sur la surface R, appartenant avec p à une même série de droites ont pour droites conjuguées encore des droites de la même surface et de la même série."

Si la droite p' de cette série coupe le plan $A_1 A_2 A_3$ au point P_4', la droite q_4' menée par le point P_4' pour laquelle on a $P_4'\ (A_1\ A_2\ A_3\ q_4') = \varrho$ coupe la trace r de la surface R sur ce plan au point par lequel passe la droite $p^{*\prime}$ conjuguée à p' dans le complexe tetraèdral C_ϱ correspondant au rapport ϱ. Les droits q_4' correspondant aux points P_4' enveloppent une courbe de la quatrième classe s_4 qui a pour tangentes doubles les côtés du triangle $A_1\ A_2\ A_3$.

Si nous considérons le tétraèdre $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$ comme tétraèdre fondamental pour un système des coordonnées de planes, nous aurons pour l'équation de la surface

$$M_1\ u_1^{\,2} + M_2\ u_2^{\,2} + M_3\ u_3^{\,2} + M_4\ u_4^{\,2} = 0.$$

Cette équation se ramène par un procédé connu en équation correspondante en coordonnées de droites. Désignons par P_{ik} les coordonnées de points de la droite, nous avons:

$$P_{12}^{\,2}\ M_3\ M_4 + P_{23}^{\,2}\ M_1\ M_4 + \ldots + P_{34}^{\,2}\ M_1\ M_2 = 0. \qquad (4)$$

Puisque la surface passe aussi par la droite p, on peut écrire de même

$$p_{12}^2 M_3 M_4 + \ldots + p_{34}^2 M_1 M_2 = 0. \qquad (4')$$

Pour les droites du complexe (4) qui se trouvent dans le plan des coordonnées $(A_1 A_2 A_3)$, on a $P_{14} = P_{24} = P_{34} = 0$ et par conséquent ces droites sont données par l'équations

$$P_{12}^2 M_3 M_4 + P_{23}^2 M_1 M_4 + P_{31}^2 M_2 M_4 = 0. \qquad (5)$$

D'une façon analogue nous obtiendrons les droites du complexe dans les autres plans des coordonnées. Ceci nous donne par rapport à (4') pour les coefficients $M_1, \ldots M_4$ les équations conditionnelles suivants

$$\begin{aligned}
p_{23}^2 M_1 + p_{31}^2 M_2 + p_{12}^2 M_3 &= 0 \\
p_{24}^2 M_1 + p_{41}^2 M_2 + p_{12}^2 M_4 &= 0 \\
p_{34}^2 M_1 + p_{14}^2 M_3 + p_{13}^2 M_4 &= 0 \\
p_{34}^2 M_2 + p_{24}^2 M_3 + p_{23}^2 M_4 &= 0
\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\frac{M_1}{M_4} = \frac{p_{12}\, p_{31}}{p_{24}\, p_{34}}, \quad \frac{M_2}{M_4} = \frac{p_{12}\, p_{23}}{p_{14}\, p_{34}}, \quad \frac{M_3}{M_4} = \frac{p_{23}\, p_{31}}{p_{14}\, p_{24}}$$

de sorte que l'équation de la surface R est

$$p_{34} \frac{P_{12}^2}{p_{12}} + p_{14} \frac{P_{23}^2}{p_{23}} + p_{24} \frac{P_{31}^2}{p_{31}} + p_{23} \frac{P_{14}^2}{p_{14}} + p_{31} \frac{P_{24}^2}{p_{24}} + p_{12} \frac{P_{34}^2}{p_{34}} = 0. \quad (5)$$

On obtient l'équation tangentielle de la courbe r_4 dans laquelle la surface R coupe le plan $(A_1 A_2 A_3)$ en posant

$$P_{14} = P_{24} = P_{34} = 0,$$

et alors

$$\frac{p_{34}}{p_{12}} u_3^2 + \frac{p_{14}}{p_{23}} u_1^2 + \frac{p_{24}}{p_{31}} u_2^2 = 0. \qquad (6)$$

Son équation en coordonnées ponctuelles est donc

$$\frac{p_{23}}{p_{14}} x_1^2 + \frac{p_{31}}{p_{24}} x_2^2 + \frac{p_{12}}{p_{34}} x_3^2 = 0. \qquad (6')$$

En tenant compte de l'équation (3) on a pour les coordonnées de la droite q_4

$$u_1 = -\frac{1}{p_{14}}, \quad u_2 = \frac{\varrho}{p_{24}}, \quad u_3 = \frac{1-\varrho}{p_{34}},$$

or bien en tenant compte du fait que les coordonnées du point P_4 sont $x_1 = p_{14}$, $x_2 = p_{24}$, $x_3 = p_{34}$, on a

$$u_1 = -\frac{1}{x_1}, \quad u_2 = \frac{\varrho}{x_2}, \quad u_3 = \frac{1-\varrho}{x_3},$$

et comme ces relations sont valables pour chaque point P_4 de la courbe r_4 et la droite correspondante q_4, on obtient de (6′) l'équation de la courbe s_4 sous la forme

$$\frac{p_{23}}{p_{14}\,u_1^{\,2}} + \frac{\varrho^2\,p_{31}}{p_{24}\,u_2^{\,2}} + \frac{(1-\varrho)^2\,p_{12}}{p_{34}\,u_3^{\,2}} = 0. \tag{7}$$

Dans cette équation les valeurs proportionnelles p_{ik} représentent les coordonnées d'une droite quelconque sur la surface R appartenant à la même série comme la droite p, ce qui s'accorde bien avec les équations (1). Si la droite (u_1, u_2, u_3) est tangente à cette courbe, la droite $(-u_1, u_2, u_3)$ par exemple est aussi tangente à cette courbe, d'où il suit que la courbe s_4 correspond à elle même dans les involutions qui ont pour centre un des sommets du triangle $A_1\,A_2\,A_3$ et pour axe d'involution son côté opposé. Déduisons les tangentes communes des courbes (6) et (7). Si nous éliminons de leurs équations u_3, nous obtenons $(p_{23}\,p_{24}\,u_2^{\,2} + \varrho\,p_{14}\,p_{31}\,u_1^{\,2})^2 = 0$; cette dernière équation montre que les courbes en question se touchent dans les quatre points formant un quadriangle qui a $A_1\,A_2\,A_3$ pour triangle diagonal; les tangents communes dans ces points forment un quadrilatère qui a le même triangle diagonal. Pour les coordonnées de ces tangentes communes nous obtiendrons par un calcul simple

$$u_1 : u_2 : u_3 = \pm\sqrt{-\frac{p_{23}}{p_{14}}} : \pm\sqrt{\frac{p_{31}}{p_{24}}\,\varrho} : \pm\sqrt{\frac{p_{12}}{p_{34}}\,(1-\varrho)}.$$

Un point quelconque Q de la courbe (6) a pour coordonnées $x_1 = p_{14}$, $x_2 = p_{24}$, $x_3 = p_{34}$, où p_{ik} représente les coordonnées d'une droite sur la surface R de la série considérée qui passe par ce point et nous déduirons par conséquent de (6′) les équations de la tangente au point Q sous la forme

$$p_{23}\,x_1 + p_{31}\,x_2 + p_{12}\,x_3 = 0.$$

On peut donc écrire pour ses coordonnées

$$u_1 : u_2 : u_3 = p_{23} : p_{31} : p_{12}.$$

Si Q est un des points de contact des courbes (6) et (7), il faut qu'on ait

$$p_{23} : \pm\sqrt{-\frac{p_{23}}{p_{14}}} = p_{31} : \pm\sqrt{\frac{p_{31}}{p_{24}}\,\varrho} = p_{12} : \pm\sqrt{\frac{p_{12}}{p_{34}}\,(1-\varrho)},$$

ou bien

$$\pm\sqrt{-p_{23}\,p_{14}} = \pm\sqrt{\frac{p_{31}\,p_{24}}{\varrho}} = \pm\sqrt{\frac{p_{12}\,p_{34}}{1-\varrho}},$$

ce qui impose la condition

$$p_{31}\,p_{24} + \varrho\,p_{23}\,p_{14} = 0.$$

6. Dans les considérations précédentes nous envisagions les droites sur la surface R appartenant à la même série que la droite p. Les équations respectives sont valables lorsque nous remplaçons la droite p par n'im-

porte quelle droite sur R de la même série. Mais les équations de la surface R et des courbes r_4, s_4 sont valables encore, si au lieu de la droite p nous choisissons une droite quelconque de R appartenant à la deuxième série. De la dernière équations il résulte par conséquence:

„La surface R a avec le complexe tétraédral C_ϱ quatre droites de la première et quatre droites de la deuxième série communes; les quatre deuxièmes droites coupent donc les faces du tetraèdre $A_1, \ldots A_4$ dans les mêmes points que les quatre premières droites."

Ceci résulte aussi des expressions des coordonnées des quatre droites *I, II, III, IV* de l'une et de l'autre séries qui coupent le plan $A_1 A_2 A_3$ du tetraèdre dans les quatre points qui forment sur r_4 un quadriangle ayant le triangle $A_1 A_2 A_3$ comme triangle diagonal.

Ces droites ont évidemment pour coordonnées:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
\text{I:} & p_{12}, & p_{23}, & p_{31}, & p_{14}, & p_{24}, & p_{34} \\
\text{II:} & -p_{12}, & p_{23}, & p_{31}, & p_{14}, & p_{24}, & -p_{34} \\
\text{III:} & p_{12}, & p_{23}, & -p_{31}, & p_{14}, & -p_{24}, & p_{34} \\
\text{IV:} & p_{12}, & -p_{23}, & p_{31}, & -p_{14}, & p_{24}, & p_{34}
\end{array}$$

et leurs traces dans les plans $A_2 A_3 A_4$, $A_3 A_4 A_1$, $A_1 A_1 A_2$, $A_1 A_2 A_3$ ont des coordonnées correspondantes

pour I: $(0, p_{21}, p_{31}, p_{41})$; $(p_{12}, 0, p_{32}, p_{42})$;
$(p_{13}, p_{23}, 0, p_{43})$; $(p_{14}, p_{24}, p_{34}, 0)$,

pour II: $(0, -p_{21}, p_{31}, p_{41})$; $(-p_{12}, 0, p_{32}, p_{42})$;
$(p_{13}, -p_{23}, 0, -p_{43})$; $(p_{14}, p_{21}, -p_{34}, 0)$,

pour III: $(0, p_{21}, -p_{31}, p_{41})$; $(p_{12}, 0, p_{32}, -p_{42})$;
$(-p_{13}, p_{23}, 0, p_{43})$; $(p_{14}, -p_{24}, p_{34}, 0)$,

pour IV: $(0, p_{21}, p_{31}, -p_{41})$; $(p_{12}, 0, -p_{32}, p_{42})$;
$(p_{13}, -p_{23}, 0, p_{43})$; $(-p_{14}, p_{24}, p_{34}, 0)$.

Les coordonnées de ces droites satisfont en effet à l'équation (5). Mais cette équation est encore satisfaite par les coordonnées des droites *I′, II′, III′, IV′*, qui sont respectivement pour

$$\begin{array}{rrrrrrr}
\text{I}': & p_{12}, & -p_{23}, & p_{31}, & p_{14}, & -p_{24}, & -p_{34}; \\
\text{II}': & p_{12}, & p_{23}, & -p_{31}, & -p_{14}, & p_{24}, & -p_{34}; \\
\text{III}': & p_{12}, & -p_{23}, & -p_{31}, & p_{14}, & p_{24}, & -p_{34}; \\
\text{IV}': & p_{12}, & p_{23}, & p_{31}, & -p_{14}, & -p_{24}, & -p_{34};
\end{array}$$

et dont les de traces dans les plans (A_2, A_3, A_4), $(A_3 A_4 A_1)$, $(A_4 A_1 A_2)$, $(A_1 A_2 A_3)$ ont des coordonnées

pour I′: $(0, p_{21}, p_{31}, p_{41})$; $(-p_{12}, 0, p_{32}, p_{42})$;
$(-p_{13}, p_{23}, 0, p_{43})$; $(-p_{14}, p_{24}, p_{34}, 0)$,

pour II′: $(0, -p_{21}, p_{31}, p_{41})$; $(p_{12}, 0, p_{32}, p_{42})$;
$(p_{13}, -p_{23}, 0, p_{43})$; $(p_{14}, -p_{24}, p_{34}, 0)$,

pour III′: $(0, p_{21}, p_{31}, p_{41})$; $(p_{12}, 0, -p_{32}, p_{42})$;
$(p_{13}, p_{23}, 0, p_{43})$; $(p_{14}, p_{24}, -p_{34}, 0)$,

pour IV′: $(0, p_{21}, p_{31}, -p_{41})$; $(p_{12}, 0, p_{32}, -p_{42})$;
$(p_{13}, p_{23}, 0, -p_{43})$; $(p_{14}, p_{24}, p_{34}, 0)$.

Désignons par $I_i, \ldots$ les points d'intersection des droites $I, \ldots$ avec les faces du tétraèdre $A_1 \ldots A_4$ qui sont opposées aux sommets A_i. On voit d'après la disposition indiquée que les droites I, II, III, IV coupent la droite I' respectivement dans les points $I_1' = I_1$, $I_2' = II_2$, $I_3' = III_3$, $I_4' = IV_4$; alors si nous considérons aussi les points d'intersection avec les droites II', III', IV', nous arrivons aux rapports anharmoniques

$$(I_1\, II_1\, III_1\, IV_1) = (I_1'\, I_2'\, I_3'\, I_4') = (II_1'\, II_2'\, II_3'\, II_4') = (I_1\, II_2\, III_3\, IV_4),$$
$$(I'\, II'\, III'\, IV') = (I_1\, I_2\, I_3\, I_4) = (II_1\, II_2\, II_3\, II_4) = \ldots = (I_1'\, II_2'\, III_3'\, IV_4').$$

Ces mêmes relations sont valables même lorsque $I_i \ldots I_i'$ désignent les plans qui joignent les droites $I \ldots$, I' avec les sommets A_i. Il s'en suit:

„Les droites du complexe C_ϱ qui sont situées sur la surface du deuxième degré R ayant son tétraèdre fondamental pour tétraèdre polaire, et qui appartiennent à l'une ou à l'autre de ses séries, forment un rapport anharmonique équivalent au rapport anharmonique du complexe."

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant:

„Les droites conjuguées à une droite donnée p par rapport à tous les complexes tetraédraux qui ont commun le tetraèdre fondamental T forment une série de droites sur la surface du deuxième degré R à laquelle la droite donnée appartient elle même. Cette surface passe par cette droite p et a le tétraèdre en question pour tétraèdre polaire; les droites appartenant au complexe C_ϱ sont conjuguées à elles mêmes."

„A chaque droite p correspond dans le complexe donné C_ϱ une droite conjuguée p^* tandisque à la droite quelconque p^* correspondent trois droites p qui l'ont pour droite conjuguée."

En effet, si l'on se donne la droite p^*, la droite correspondante p se trouve sur la surface R qui contient p^* et qui a T pour tétraèdre polaire. Si P_4^* est la trace de la droite p^* et r_4 la trace de la surface R dans le plan $A_1 A_2 A_3$, quatre tangentes à la courbe correspondante s_4 passent alors par le point P_4^*; une d'entre elles est la droite $\overline{p}_4$ pour laquelle $P_4^*\,(A_1\, A_2\, A_3\, \overline{p}_4) = \varrho$, et alors elle coupe r_4 encore dans le point $\overline{P}_4^*$ qui est la trace de la droite $\overline{p}^*$ conjuguée à la droite $\overline{p} = p^*$ par rapport au complexe C_ϱ. Les trois autres tangentes couperont r_4 encore dans les points P_4, P_4', P_4'' par lesquels passent sur R les droites p, p', p'' de la même série que p^*. Par conséquent on peut dire:

„Chacune des deux séries de droites p sur R est projective avec l'involution cubique des droites correspondantes conjuguées sur cette surface et les éléments de coïncidence sont les droites du complexe C_ϱ appartenant à cette série."

Terrain crétacé dans la partie Sud des environs de Kolín.

Par

LADISLAV URBÁNEK.

Avec 5 figures.

Présenté dans la séance du 28 octobre 1924.

Les couches crétacées situées au Sud de *Kolín* remplissent une petite dépression enfermée entre deux chaînes de collines dans lesquelles le gneiss affleure à une hauteur assez considérable. Ces chaînes portent le nom de leurs sommets culminants, c'est-à-dire la première de *Vysoká* (470 *m*) et de *Kaňk* (352 *m*) et la deuxième le nom de *Křečhoř* (333 *m*) et de *Dobřeň*. Les couches appartiennent principalement à la *zone de Skuteč* (I *d* + II), puis aussi à la *zone de Břvany* (III *a*) d'après la division du M. Č. Zahálka. Nous trouvons des affleurements de ces couches dans de nombreuses carrières situées dans les vallées où il est donc avantageux de les suivre systématiquement.

Stratigraphie.

La zone de Skuteč (I *d* + II) peut être divisée en deux séries *a* et *b*. *La première* est formée principalement de grès kaoliniques marins (à *Štítary* par exception elle est formée d'eau douce), la seconde, *b*, à sa base de grès à glauconie, plus haut de calcaires cristallins durs, et enfin de calcaires sablonneux (dits „Scyphiová opuka"). Nous rencontrons la série *a* à *Zibohlavy* (grès kaoliniques), à *Radovesnice* dont une coupe a été décrite par M. Čeněk Zahálka, puis près du moulins de *Štítary*, et enfin au Nord de *Štítary* où les couches sont d'origine d'eau douce. C'est M. Čeněk Zahálka qui lui aussi a reconnu que les sédiments de la série *a* sont, à l'Est de *Štítary*, d'*origine marine*, tandis qu'à l'Ouest ils sont *d'origine d'eau douce*.

Dans la vallée du ruisseau de *Polepka* la série *a* affleure derrière le village de *Pašinka* et sous la ferme du même nom. La vallée principale de *Pašinka* n'offre malheureusement aucun affleurement. La carrière la plus remarquable est située près de *Kolín* à l'endroit dit „*Na Čerčance*"

Fig. 1.

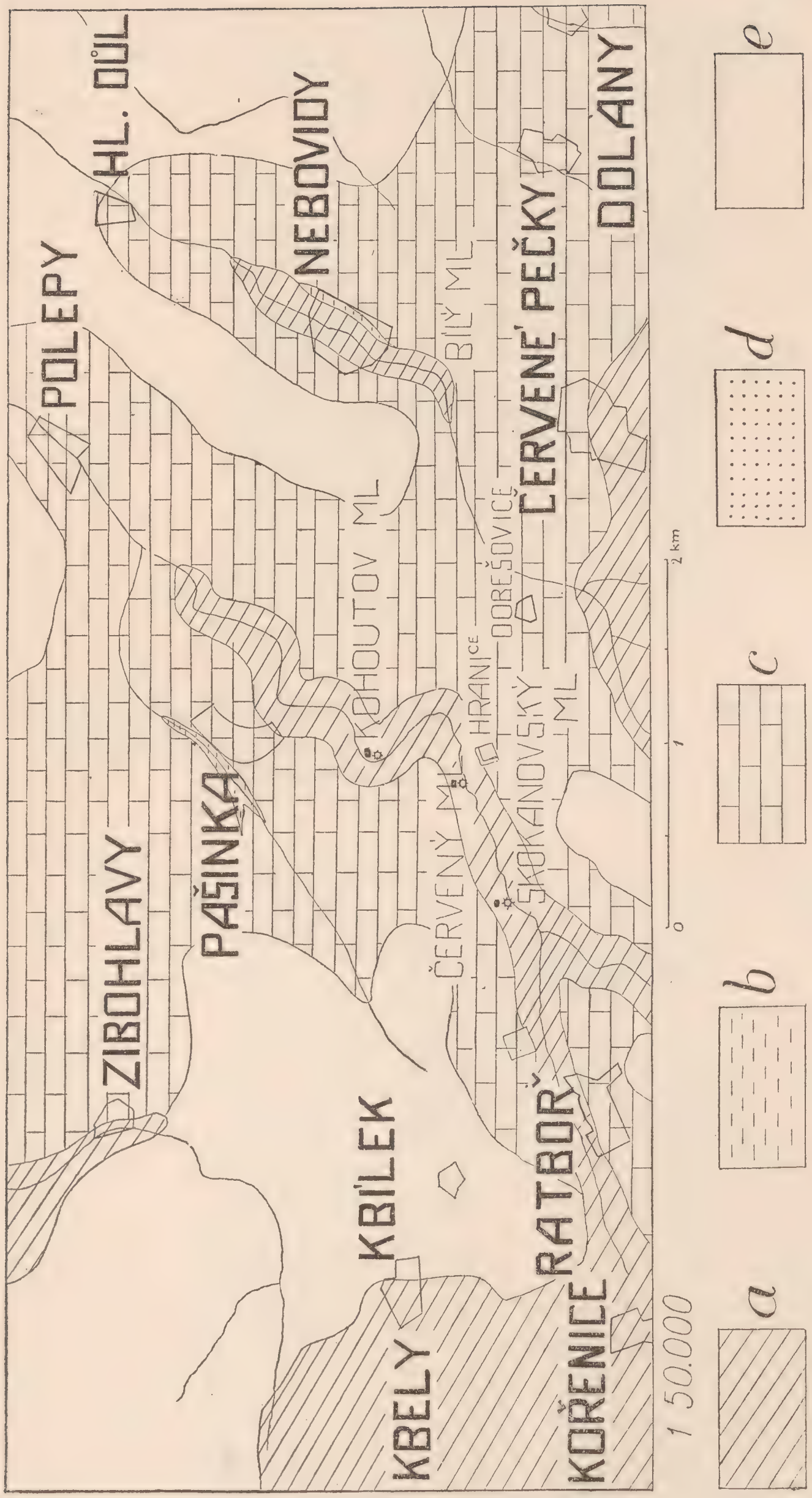


Fig. 2. a = gneiss, b = serie a, c = serie b, } de la zone de *Skuteč* (I d + II.), d = zone de *Břvany* (III a), e = pléistocène + holocène.

Fig. 1. Fig. 2.

Là, les grès à gros grains alternent avec d'autres à grains fins. Dans la vallée de *Červené Pečky* ou de *Nebovidy* il y a un affleurement près de la gare de *Červené Pečky*, où sous une couche de grès vert à glauconie et sous

Fig. 3. *Les environs du moulin de Peklo et la vallée dit „Na Šornici."*
a = gneiss
b = serie *a*, } de la zone de *Skuteč* (I *d* + II.),
c = serie *b*, }
d = limon pléistocène,
e = holocène.

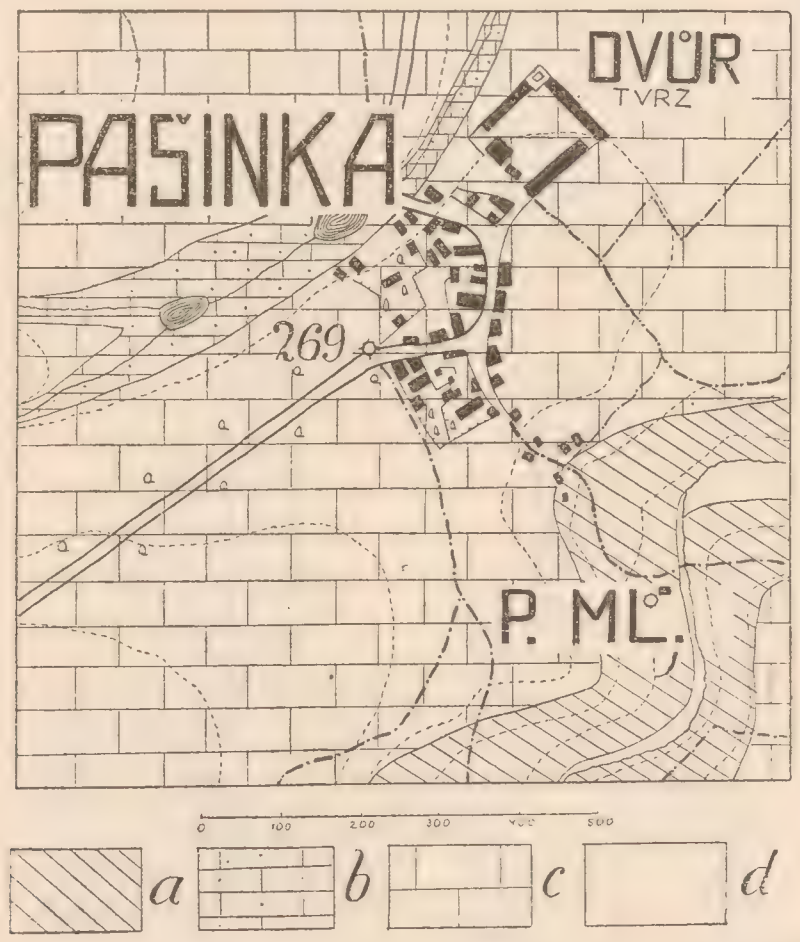


Fig. 4. *Les environs du village de Pašinka.*
a = gneiss,
b = serie *a*, } de la zone de *Skuteč* (I *d* + II.),
c = serie *b*, }
d = holocène.

des bancs à *Exogyra columba* Sow., faisant partie de la série *b* zone de Skuteč, nous trouvons des grès kaoliniques à mica blanc. La même succession des couches se trouve près de l'ancienne scierie. Enfin aussi à *Nebovidy*, où dans le jardin de l'auberge de M. Skokan on a creusé des grès pour l'exploitation de sables verriers. Ce grès a une épaisseur d'environ 4·80 mètres et affleure également sur la pente au dessous de l'église et près de l'ecole.

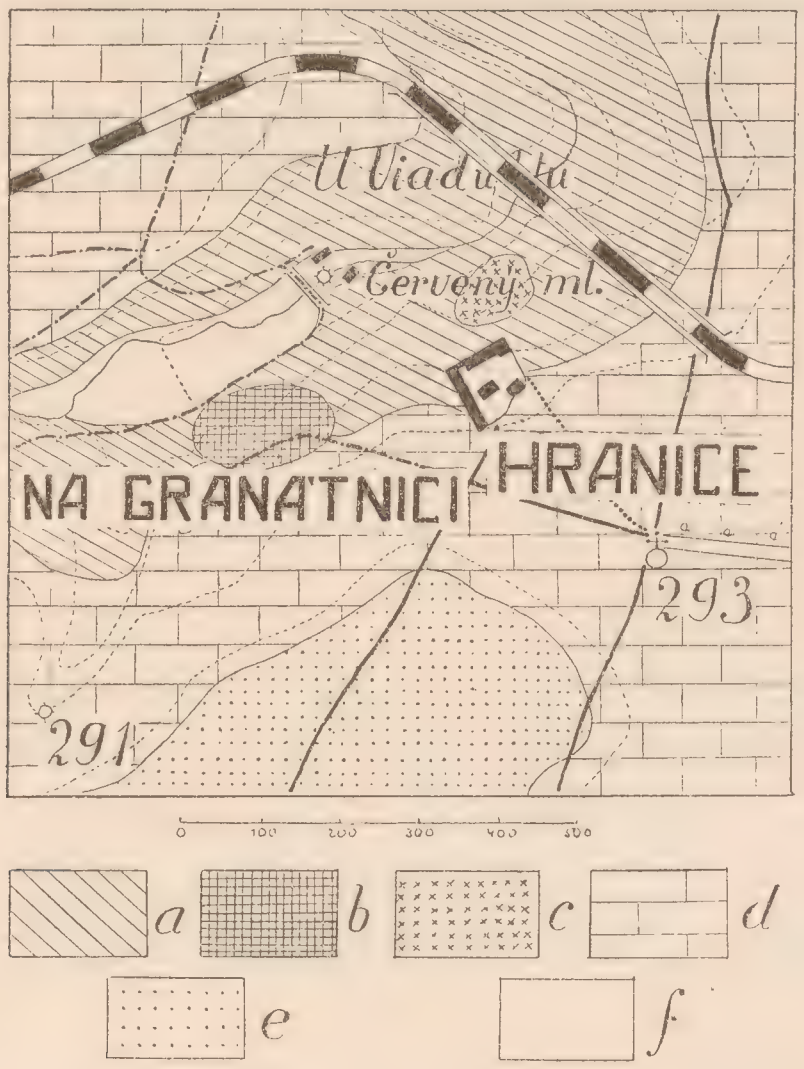


Fig. 5. *La vallée de Pašinka et l'endroit dit: „Na Granátníci."*
a = gneiss, *d* = serie *b* de la zone de *Skuteč* (I *d* + II.),
b = serpentin, *e* = limon pléistocène,
c = granit, *f* = holocène.

La série b de la zone de Skuteč a une plus grande étendue gisant non seulement sur la série *a*, mais recouvrant aussi le gneiss en transgression. Nous pouvons la voir à *Zibohlavy* (bancs à Caprotines), à *Kutlíře* („na Štrampouchu" a „v Zahradách"), à *Radovesnice* et dans la vallée de *Štítary* (près de l'ancien four à chaux etc.) où elle forme les deux pentes de la vallée. Dans les vallées de *Pašinka* et de *Ratboř* elle est très développée, représentée principalement par des calcaires cristallins contenant beaucoup de débris de coquilles. C'est ainsi que les calcaires passent en quelques endroits à de vraies brèches. Les calcaires étaient exploités en de nombreuses carrières et livrés aux sucreries. On trouve d'anciennes carrières à *Ratboř* près de *Pašinka* et près de la ferme *Potřeba*. La carrière près de la commune de *Čertovka* est analogue à celle se trouvant près de l'ancien four à chaux.

La zone de Břvany (III *a*) n'affleure qu'en quelques endroits près de *Kolín*, par exemple: derrière la villa „*Bělka*", puis en face de l'hôpital

et là où a été construit le nouveau bâtiment de l'école commerciale. Partout elle est représentèe par des argiles marneuses à nombreuses foraminifères.

La tectonique.

Les couches crétacées d'inclinaison très faible d'environ 1^0 (52′) vers le *N E* ont une direction *N* 68^0 *W*. Cette inclinaison est rendue visible par la pente de nombreux ruisseaux qui dans leur cours moyen ont la direction *N E*. Les vallées sont toujours epigéniques et il n'est pas exclu que l'érosion causée par les ruisseaux n'y ait suivi de grandes fissures transversales.

Institut géologique de l'Université Charles, Prague.

Note sur la théorie des courbes dans les espaces de Riemann.

Par

V. HLAVATÝ.

Présenté le 28 Octobre 1924.

Dans ce traité l'auteur se sert de la symbolique de M. Ricci remaniée par M. Schouten.[1]) Soit A^{ν}_{λ} la composante mixte du tenseur métrique de la variété riemannienne V_n à n dimensions, B^{ν}_{λ} la composante mixte du tenseur métrique de V_m plongée dans V_n $(m < n)$. On peut toujours trouver m congruences rectangulaires $\underset{a}{i^{\nu}}$ dans V_m telle que l'on a [2])

$$B^{\nu}_{\lambda} = \sum_{a} \underset{a}{i^{\nu}}\, \underset{a}{i_{\lambda}} = A^{\nu}_{\lambda} - \sum_{e} \underset{e}{i^{\nu}}\, \underset{e}{i_{\lambda}}$$

où $\underset{e}{i^{\nu}}$ est la congruence orthogonale à V_m.

Le point de départ de cette étude est l'équation

1. $$B^{\alpha\,\beta\,\gamma\,\nu}_{\omega\,\mu\,\lambda\,\delta}\, K^{\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\,\beta\,\gamma} = K'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\,\mu\,\lambda} - 2\, B^{\nu}_{\delta}\, H^{\cdot\cdot\cdot\delta}_{[\omega\,\mu]\,\lambda}$$ [3]) $\quad (B^{\alpha\,\beta\,\gamma}_{\omega\,\mu\,\lambda} = B^{\alpha}_{\omega}\, B^{\beta}_{\mu}\, B^{\gamma}_{\lambda})$

où $K^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\,\mu\,\lambda}$ et *le corps de courbure* (l'affineur de Riemann) de V_n, $K'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\,\mu\,\lambda}$ celui de V_m et $H^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{[\omega\,\mu]\,\lambda}$ satisfait l'équation

$$H^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{[\omega\,\mu]\,\lambda} = B^{\alpha\,\beta\,\gamma}_{[\omega\,\mu]\,\lambda}\, \nabla_{\alpha} B^{\delta}_{\gamma}\, \nabla_{\beta} B^{\nu}_{\delta}$$

[1]) J. A. Schouten: „Ricci-Kalkül" (Berlin, Julius Springer 1922).

[2]) Les indices latins, qui désignent les directions rectangulaires

$a\ b\ c\ d$		1		m
$e\ f\ g\ h$	s'étendent de	$m+1$	jusqu'à	n
$i\ j\ k\ l$		1		n

Les vecteurs i^{ν}, j^{ν} sont des vecteurs d'unité.

[3]) On trouve la relation qui est équivalente à 1. chez M. Schouten l. c. page 198.

L'équation 1. nous mène aux scalaires ($g'^{\mu\lambda}$ est le tenseur métrique de V_m).:

$$K_0' = -\frac{1}{m(m-1)} g'^{\omega\nu} g'^{\mu\lambda} K'_{\omega\mu\lambda\nu} \qquad \overset{1}{M'} = -\frac{1}{m-1} g'^{\mu\lambda} \overset{\omega}{i}_1 \overset{\nu}{i}_1 K'_{\omega\mu\lambda\nu}$$

$$2\,K_z = -\frac{1}{m(m-1)} g'^{\omega\nu} g'^{\mu\lambda} K_{\omega\mu\lambda\nu} \qquad \overset{1}{M}_z = -\frac{1}{m-1} g'^{\mu\lambda} \overset{\omega}{i}_1 \overset{\nu}{i}_1 K_{\omega\mu\lambda\nu}$$

$$K_r = -\frac{2}{m(m-1)} g'^{\omega\nu} g'^{\mu\lambda} H_{[\omega\mu]\lambda\nu} \qquad \overset{1}{M}_r = -\frac{2}{m-1} g'^{\mu\lambda} \overset{\omega}{i}_1 \overset{\nu}{i}_1 H_{[\omega\mu]\lambda\nu}$$

K_0 *absolue* $\overset{1}{M'}$

où K_z est *la courbure forcée* de V_m dans V_n, $\overset{1}{M}_r$ est *la mesure*

K_r *relative* $\overset{1}{M}_z$

absolue

moyenne de courbure *forcée* de V_m dans la direction $\overset{\nu}{i}_1$.[4])

relative

Imaginons une courbe quelconque sur V_{n-1}, avec le vecteur tangent $\overset{\nu}{i}_1$ dont le (p-1)ième vecteur normal $\overset{\nu}{j}_p$ est orthogonal à V_{n-1} le long d'elle ($p > 2$). *Grâce aux équations* 1, 2 on parvient à

3. $$\boxed{\frac{1}{n-2}(\overset{2}{k}_p + \overset{2}{k}_{p-1}) = (\overset{1}{M}_z - \overset{1}{M'})}$$

où $\overset{i}{k}$ est la i-tième courbure de la courbe examinée. Pour $n = 3$ la courbe devient asymptotique et on déduit de 3.

4. $$\boxed{\overset{2}{k} = K_z - K_0'}$$

Cette équation nous livre la généralisation du théorème d'Enneper[5]) pour V_2 dans V_3. En posant $V_3 = R_3$ ($K_z = 0$) on l'obtient dans sa forme connue. Pour la courbe asymptotique de la (n — 2)ième espèce dans V_n ($n > 3$) on a à supposer $p = n$. Cette supposition nous livre pour l'équation 3.

5. $$\boxed{\frac{1}{n-2}\overset{2}{k}_{n-1} = \overset{1}{M}_z - \overset{1}{M'}}$$

---

[4]) Sur les K voir le livre cité p. 199, les $\overset{1}{M}$ sont traitées dans mon mémoire „*Sur les courbes quasiasymptotiques* (qui paraîtra dans le journal hollandais „Christiaan Huygens" 1924).

[5]) Le carré de la torsion de la courbe asymptotique sur V_2 dans R_3 (l'espace euclidien) égale à la courbure négative de Gauss.

S'il y a une V_m $(m < n)$ qui admet une courbe avec le p-ième vecteur normal orthogonal à V_m le long d'elle, on trouve la relation

6. $$\boxed{{}'\overset{1}{M}_r - \overset{1}{M}_r = \frac{1}{m-1}\left(\overset{p}{k}^2 \cos^2 \overset{p+1}{\omega} + \overset{p-1}{k}^2 \cos^2 \overset{p-1}{\omega}\right)}$$

où ${}'\overset{1}{M}_r$ est la mesure moyenne de courbure relative de V_m dans V_{n-1}. (Cette V_{n-1} est le prolongement géodésique de V_m moyennant les congruences $\overset{m+1}{i^\nu}, \overset{m+2}{i^\nu} \ldots \overset{p-1}{i^\nu}, \overset{p+1}{i^\nu}, \ldots \overset{n}{i^\nu}$ rectangulaires, orthogonales à V_m et à $\overset{p}{j^\nu}$ le long de la courbe examinée, $\overset{u}{\omega}$ est l'angle formé par $\overset{u}{j}$ et V_m.

Si $p = 2$ on obtient la courbe géodésique sur V_m. En supposant $m = n - 1$ et en désignant par $\overset{i}{k}$ la i-ième courbure de la geodésique dans la direction $\overset{a}{i^\nu}$ on trouve

7. $$\boxed{K_z - K_0' = \frac{1}{(n-1)(n-2)} \sum_{a,b,c} \overset{c}{(k)}^2_2 - \overset{a}{k}_1 \overset{b}{k}_1 \quad a \neq b}$$

Parce que cette relation peut être écrite

$$K_z - K_0' = \frac{1}{(n-1)(n-2)} \sum_c \overset{c}{(k)}^2_2 + \overset{c}{(k)}^2_1 - h^2$$

avec

$$h = + \sum_a \overset{a}{k}_1 = B^\alpha_{\mu\, n}\, i_\lambda \nabla_\alpha g'^{\mu\lambda}$$

on voit que la somme de carrés $\sum_c \overset{c}{(k)}^2_2 + \overset{c}{(k)}^2_1$ ne dépend pas de l'orientation précise des $n - 1$ vecteurs $\overset{a}{i^\nu}$.

Le travail finit par la relation

8. $$\boxed{-\overset{1}{M}_r = \frac{1}{m-1} \overset{m}{k}^2 = \overset{1}{M}_z - \overset{1}{M'}}$$

qui exprime la m-ième courbure d'une courbe quelconque moyennant les mesures $\overset{1}{M}$ de la variété V_m qui est le prolongement de la courbe à l'aide de ses vecteurs normaux $\overset{2}{j^\nu} \ldots \overset{m}{j^\nu}$.

Sur les lignes d'étincelles dans la serie *K*.

Par

VÁCLAV DOLEJŠEK.

Présenté le 28 Novembre 1924.

C'est dans la série *K* que nous sommes le plus renseignés sur les lignes d'étincelle de spectres *X*. Il faut en chercher la cause probablement dans le fait que la série *K* nous permet des recherches jusqu'aux élémentes relativement le plus légers, dont le numéro atomique est 11 (Na). C'est ici que pour les éléments plus légers apparaissent ces lignes dites lignes d'étincelles. Ce sont les lignes $K\,\alpha_3$, α_4 qui en sont les plus importantes. On les a jusqu'ici trouvées et mésurées pour tous les éléments, depuis le plus léger (num. at. 11 Na)[1]), jusqu'au numéro atomique 29[2]) (Cu).

Pour les éléments plus lourds, ces lignes disparaissent ou plutôt — contrairement aux lignes d'arc — se dérobent a notre observation.

Les deux sortes de lignes different encore en ceci qu'il est possible de classer les dernières, dites lignes d'arc dans le schême de Bohr-Coster, se qui n'est pas possible de faire des lignes d'étincelles. (Dauvillier a classé quelques unes dans son scheme modifié. Cependant Siegbahn fait remarquer que ce n'est pas tout justifié. Il faudra certainement attendre de savoir, s'il s'agit vraiment des lignes d'étincelles c'est à dire si leur origine (base sur) d'autres conditions que celle des lignes d'arc. Mais ici la question n'est pas encore tranchée, quoique la dénomination de lignes d'étincelles soit généralement employée.)

J'ai essayé poursuivre ces lignes encore pour les élémentes plus lourds. J'ai taché en même temps de mésurer ces deux-lignes le plus loin possible et toujours comme deux-lignes distinctement séparées. Car ces deux-lignes n'ont été jusqu'ici mésurées séparément que pour les éléments le plus légers depuis Na jusqu'au Sc (n. a. 11—21). A partir de ce dernier élément Sc,[3]) on à mésuré ces deux-lignes comme formant une seule.

---

[1]) E. Hjalmar, Z. S. für Phys. 1920, pag. 439.

[2]) V. Dolejšek, Comptes Rendus de l'académie des sciences 1922.

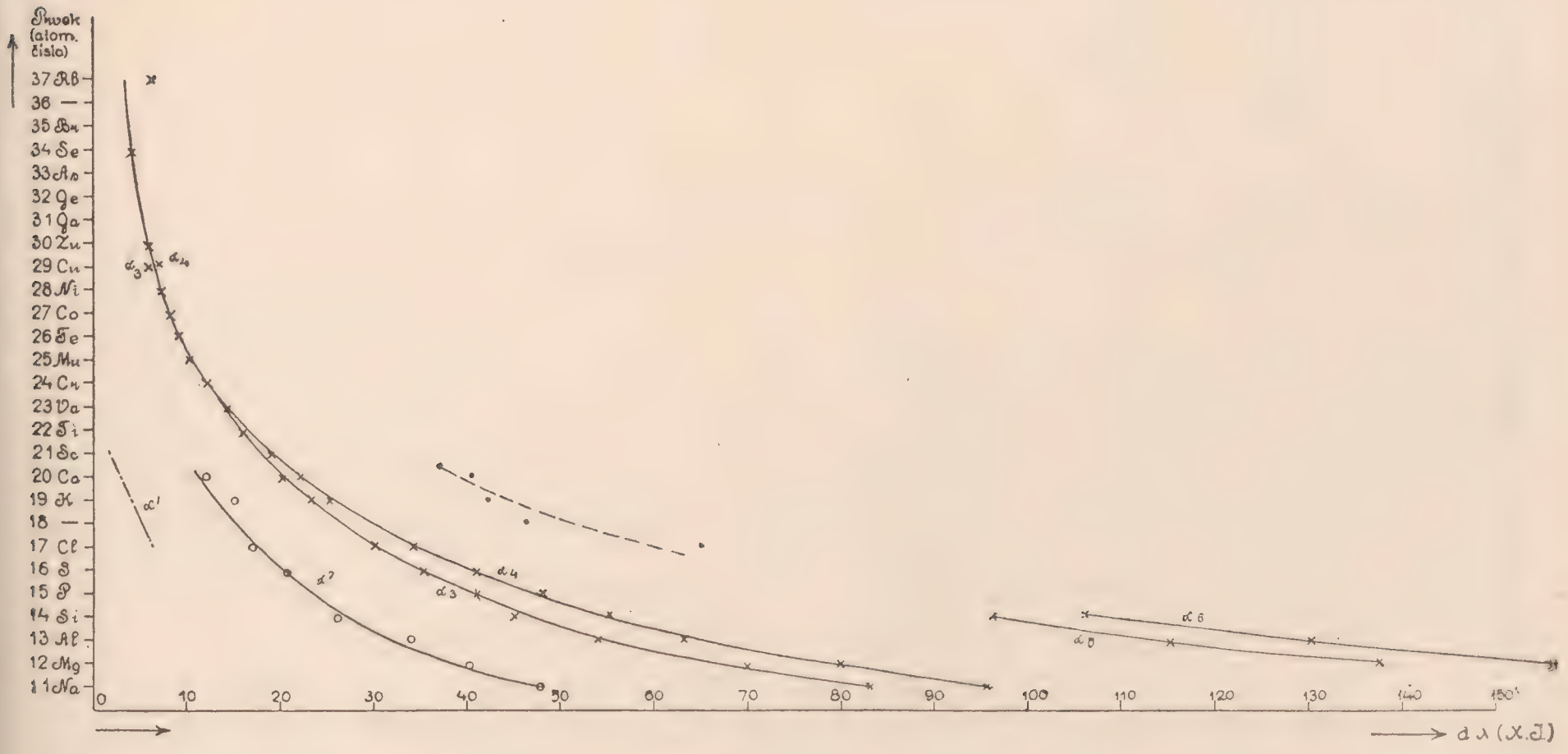
[3]) V. Dolejšek l. c.

Dauvillier[4]) donne a ces mésures la dénomination des „valeurs moyennes“ des deux-lignes. Dans le travail cité ci-dessus il donne les valeurs des lignes $K\,\alpha_3$ et $K\,\alpha_4$ pour le Cu (n. a. 29), cependant non pas comme leurs valeurs moyennes, mais comme deux-lignes différantes. Comme il le dit expressément, il n'a pas reussi a séparer nettement ces deux-lignes de façon a pouvoir les mésurer chacunne à elle. Rien qu'en comparant la zone de noircissement à la largeur de la ligne de Tungstème il la conclu qu'il s'agit de deux-lignes étroitement une près de l'autre c'est ainsi qu'il les a mésurées.

Que son résultat soit juste, on peut en faire la preuve par la recherche suivant pour le Ni, ou j'ai obtenu une épreuve très reussi (dans le seconde ordre) j'ai trouvé qu'il s'agit vraiment de deux-lignes. Ces lignes n'étaient pas non plus séparées à la dispersion que j'avais utilisées. Mais elle se transcosaient en se couvrant, ce qui se manifestait par l'apparition soudaine au milieux, d'une bande avec un noircissement visiblement plus grand. Attendu que les deux-lignes son de la même largeur (ce qui en effet a lieu aux éléments plus légers) il était possible de fixer le centre des deux-lignes et de les mésurer séparément.

Pour le prochain element plus haute pour le Zn (n. a. 30) je n'ai réussi qu'à mésurer la valeur moyenne de ces lignes $\lambda = 1426.4$ X. I. En comparaison avec la valeur que j'ai indiqué autérieurement (l. cit.), la présente est plus petite de 2 X. I. La différence si nous tenons compte de la précision observée lorsqu'on mésure ces lignes n'est pas trop grande. Elle n'en est pas moins importante pour la suite de ces différences dans les autres éléments encore plus lourds.

Pour le Se (n. a. 34) j'ai trouvé la longueur d'onde $K\,\alpha_{3,\,4}\;\lambda = 1098{\cdot}3$ X. I. Comme on peut le voir au diagramme (1), la différence d' pour cet



4) A. Dauvillier, Comptes Rendus de l'académie des sciences 1922.

élément est juste celle a laquelle on pouvait s'attendre d'après l'allure des différences.

Au contraire la valeur que j'ai trouvé pour le Rb (n. a. 37) ne semble pas être correcte. Voilà pourquoi il n'est pas sur si, pour le Rb, il s'agit vraiment de lignes $K\,\alpha_3$, α_4. Pour le Br (n. a. 35) il m'a été impossible de mésurer ces deux-lignes vu que je n'avais pas pu déterminer le centre de la ligne. Car les lignes L du mercure sont venues se superposer. (Je ne peux pas publier les valeurs précises de ces lignes n'ayant pas les appareils necessaires pour faire des recherches exactes.)

L'allure des differences ($\Delta\,\lambda$) des ces lignes de la ligne $K\,\alpha_1$ est donné dans le tableau Nr 1.

Table 1.

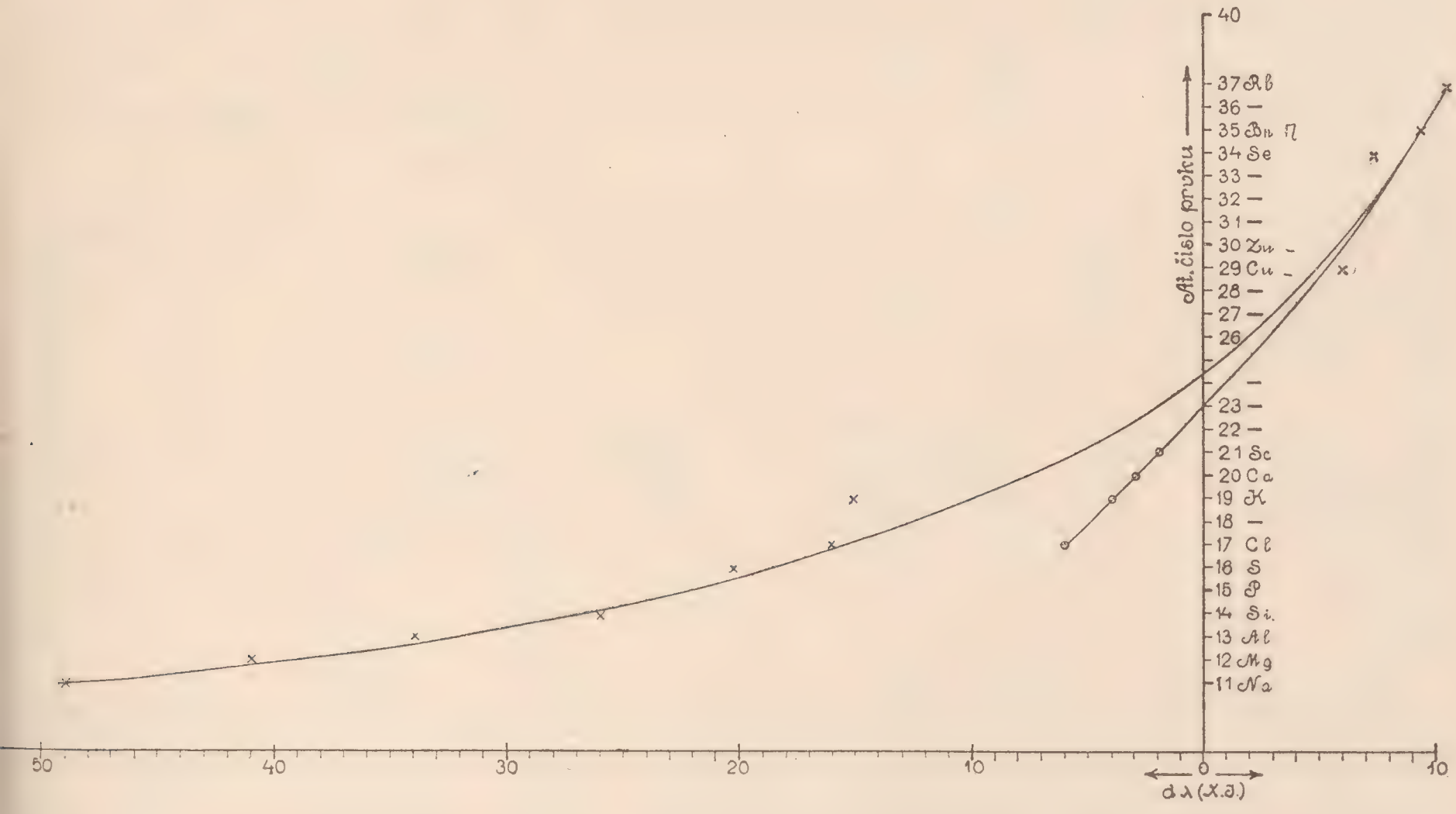
La difference $d\,\lambda$ (*X. J.*) des lignes $K\,\alpha_3$, $K\,\alpha_4$, $K\,\alpha_4$ et $K\,\alpha_7$ (de la ligne $K\,\alpha_1$).

Numéro atomique	Elément	$\Delta\lambda$ $\lambda\alpha_1 - \lambda\alpha_3$	$\Delta\lambda$ $\lambda\alpha_1 - \lambda\alpha_4$	$\lambda\alpha_3 - \lambda\alpha_4$	$\Delta\lambda$ $\lambda\alpha_1 - \lambda\alpha_7$	$\Delta\lambda$ $\lambda\alpha_1 - \lambda\alpha'$	Remarque
11	Na	81·2	102·2		49	—	
12	Mg	68·4	81·6	13·2	41	—	
13	Al	54·8	66·4	12·4	34	—	
14	S	45·4	56·5	11·1	26	—	
15	P	33·5	46·7	7·2	—	—	
16	S	32·3	38·9	6·5	20·3	—	
17	Cl	30·2	34·2	4	16	6	
19	K	22·7	24·9	2·2	(15)	4	
20	Ca	19·4	21·7	2	(11)	3	
21	Sc	19*)		—	—	2	*) La valeur moyenne des deux lignes
22	T	16		—			
23		13·8		—			
24	Cr	11·5		—			
25		9·4		—			
26	Fe	9		—			
27		7·9		—			
28	Ni	6·9		—			
29	Cu	6·5**)		—	— 6		**) D'après Dauvillier $\Delta\lambda\,\alpha_3 = 7{,}0$ $\Delta\lambda\,\alpha_4 = 6{,}0$
30	Zn	6		—			
34	Se	4		—	— 7		
35	Br	*		—	—10		*) Non mesurable parsque impossible fixer le centre
37	Rb	(6)		—	—11		

A côte de ces lignes donné plus haute j'ai trouvé encore pendant le travail, pour Cu une ligne de longueur d'onde $\lambda = 1527{\cdot}9$, pour le Selenium 1093.9, pour le Rubidium 914·7 X. I. Je n'ai pas encore réussi

à classer ces lignes. Elles correspondent approximativement aux valeurs auxquelles on pourrait s'attendre pour les lignes $K\,\alpha_5$, α_6 de ces éléments. Mais il est a peine possible que les lignes qui disparraissent pour les éléments du numéro atomique 15 (S), n'aient pas été observées ou n'existent pas pour le nombre d'éléments 16—27 et qu'elles apparaissent de nouveau soudain pour les éléments supérieurs. De même il n'est pas probable qu'il s'agisse en ces lieux d'une ligne nouvelle. Voilà pourquoi le classement de ces lignes est, pour le moment très douteuse et demandera encore de travail spécial.

Il est plus facile de classer la ligne nouvellement trouvée à ces éléments au coté des longueurs d'onde plus grandes de $K\,\alpha_1$. Pour le cuivre, la longueur d'onde de cette ligne est à peu près $\lambda = 1543$, pour le Sélénium $\lambda = 1110$, pour le Brome $\lambda = 1047$ et pour le Rubidium $\lambda = 934$ X. I. S'il ne s'agit donc pas d'une nouvelle ligne qui apparaît soudain — ce que le caractère de cette ligne ne semble pas indiquer, on peut l'identifier avec une des lignes connues déjà seulement dans le cas, si cette ligne croise la ligne $K\,\alpha_1$ et $K\,\alpha_2$.



Aux éléments inférieurs on trouve en dehors des lignes $\alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6$ dans le groupe $K\,\alpha$ (dont il peut seulement être question ici) encore deux lignes α_7 et α'. Ces deux lignes (α_7 trouvée par Hjalmar[5]) jusq'à l'élément K) α' — trouvée par moi[6]) (jusq'à l'élément Se), si elles existent pour les éléments supérieurs, semblent pouvoir être identifiées avec la ligne trouvée. Le caractère de ces lignes est indiqué par le diagramme Nr 2.

Les valeurs de cette ligne sont dans le table 2.

---

[5]) E. Hjalmar, l. cit.
[6]) V. Dolejšek, l. cit.

Table 2.

La ligne $K\alpha_7$.

Elément	$\lambda X. J.$	L'auteur	$\frac{\nu}{R}$	$\sqrt{\frac{\nu}{R}}$	
11 Na	11835		76·997	8·775	
12 Mg	9826·5		92·736	9·630	
13 Al	8285·6	E. Hjalmar	109·982	10·487	
14 Si	7083		128·656	11·343	
16 S	5340·6		170·630	13·065	
17 Cl	4702·5	V. Dolejšek	193·783	13·920	
	4712			13·906	(la ligne $K\alpha'$)
19 K	3718·7	Hjalmar	245·05	15·654	
	3730	Dolejšek	244·31	15·630	(la ligne $K\alpha'$)
20 Ca	3339·9	Hjalmar	272·84	16·518	
	3349	Dolejšek	272·10	16·447	(la ligne $K\alpha'$)
21 Sc	—				
	3023	Dolejšek	301·45	17·362	(la ligne $K\alpha'$)
22 Ti	—			—	
23 Va	—			—	
24 Cr	—			—	
25 Mn	—			20·84 *	calculée *
26 Fe	—			21·71 *	,,
27 Co	—			—	
29 Cu	—			23·44 *	,, *
29 Cu	1543	Dolejšek	590·49	24·30	,, *
30 Zn	—			25·15 *	
34 Se	1120	Dolejšek	817·96	28·6	
35 Br	1047	Dolejšek	867·9	29·5	
37 Rb	934	Dolejšek	973·4	31·2	

Qu'au moins une des lignes ces croise les lignes $K\alpha_1$ et $K\alpha_2$, on le voit aussi p. ex. à l'élément Co, où l'on voit qu'entre les lignes $K\alpha_1$ et $K\alpha$, se trouve encore une ligne. Cependant il n'est pas possible de la mesurer vu qu'on ne peut pas fixer son centre.

Pour préciser s'il s'agit de la ligne α_7 ou α', il faut constater encore deux circonstances.

1⁰. Si la ligne α' n'est qu'une zone d'emission, comme nous l'avons désignée antérieurement.[6]) (On pourra decider la-dessus aux éléments inférieurs voisins jusqu'auxquels elle a été mesurée jusqu'ici.)

2⁰. Si la ligne α_7 apparaît aussi aux éléments Sc, Ti et Va, et quelle caractère elle y a.

Si la ligne α' n'est vraiment pas tout simplement une zone d'émission,[6]) il s'agit plutôt de cette ligne quand on identifie notre ligne avec

une de ces deux lignes. Car celleci est mesurée jusqu'au Scandium ou elle disparaît presque totalement de sorte qu'elle n'a plus pu être mesurée jusqu'ici. Au contraire ligne α_7 pourrait très bien être mesurée encore pour cet élément et pour quelques éléments suivants, si elle existe et si elle peut être mesurée pour des éléments supérieurs, ou probablement son intensité est encore plus petite.

* * *

Pour le classement précis de ces lignes d'étincelles qui sera possible quand on aura obtenu le matériel d'un plus grand nombre de lignes de genre (et même d'autres séries) il faut encore faire la remarque suivante:

Comme on sait, les valeurs absolues des lignes d'etincelles sont très peu exactes et dépendent toujours de la précision des valeurs auxquelles elles ont été relativement mesurées. Mais s'il ne s'agit que des leurs différences, or, comme il est visible de ce qui vient d'être dit et du caractère du diagramme, on peut faire des conclusions beaucoup plus certaines. Cela vaut encore plus s'il s'agit de la différence des valeurs des deux lignes entre elles. En ce sens. surtout les lignes $K\alpha_3$ et $K\alpha_4$ sont très importantes comme il a été déjà dit plus haut. Car elles sont mesurées pour un nombre d'éléments considérable et elles sont pour la plupart divisées. Le tableau en est donné à la table No 3. La différence la plus importante

Table 3.

Elément	λ_ε		$\frac{\nu}{R}$		$\sqrt{\frac{\nu}{R}}$		$\Delta\sqrt{\frac{\nu}{R}}$
	α_3	α_4	α_3		α_3		
11 Na	11802	11781	77·213	77·351	8·787	8·795	0·008
12 Mg	9799·4	9786·2	92·992	93·117	9·643	9·650	0·007
13 Al	8264·6	8253·0	110·261	110·417	10·501	10·508	0·007
14 Si	7063·8	7053·7	129·006	129·190	11·358	11·366	0·008
15 P	6102·2	6095·0	149·334	149·511	12·220	11·228	0·008
16 S	5329·4	5323·3	170·989	179·185	13·076	13·084	0·008
17 Cl	4688	4684	194·383	194·549	13·942	13·948	0·006
19 K	3711·0	3708·8	245·559	245·705	15·670	15·675	0·005
20 Co	3332·3	3330·0	273·465	273·654	16·537	16·543	0·006
21 Sc	3006		303·15		17·41		—
22 Ti	2726·9		334·18		18·28		—
23 Va	2484·6		366·77		19·15		—
24 Cr	2273·3		400·86		20·02		—
25 Mn	2087·9		436·45		20·89		—
26 Fe	1923 50		473·81		21·77		—
27 Co	1777·4		512·69		22·64		—
28 Ni	1647·6		553·09		23·52		—
29 Cu	1531·3	1530·1					(0·007)
30 Zn	1426·4		638·86		25·28		—
34 Se	1098·3						

dans cette table est celle des valeurs $\sqrt{\frac{\nu}{R\,\alpha_3}} - \sqrt{\frac{\nu}{R\,\alpha_4}}$ des deux lignes. Comme il apparaît à la table, cette différence est constante dans les limites des érreurs d'observation et est égale a

$$\sqrt{\frac{\nu}{R}} = 0{\cdot}007 \pm 0{\cdot}001 = \text{const.}$$

Si aux lignes d'arc $\sqrt{\frac{\nu}{R}} = \text{const}$ est constant, nous disons, qu'elles forment un doublet irrégulier.[7]) Ces lignes forment donc un doublet irrégulier analogue à celui des lignes d'arc.

Comme nous l'avons déjà dit, Dauvillier a mésuré, pour le cuivre, (n. a. 29) les lignes comme deux lignes, quoiqu'il n'ait pas réussi à les séparer entierement. Si nous savons que ces deux lignes forment un doublet irrégulier, nous pouvons fixer leur distance dans la longueur d'onde plus précisément qu'au moyen du diagramme. Même pour le cuivre la valeur $\sqrt{\frac{\nu}{R}}$ doit aproximativement être égal 0·007.

La valeur moyenne de ces lignes mésurée par moi pour la longueur deux d'onde $\lambda = 1530.75$ X. I. correspond très précisément à la moyenne des deux valeurs de Dauvillier. On en résult $\sqrt{\frac{\nu}{R}} = 395{\cdot}308$ et $\sqrt{\frac{\nu}{R}} = 24.399$.

La valeur des lignes $K\,\alpha_3$ et $K\,\alpha_4$ doit en être égal

$$\sqrt{\frac{\nu}{R_{\alpha_3,\,\alpha_4}}} = 24{,}399 \pm 0.004$$

c. à. d. pour α_3 24·395 et pour α_4 24·403. De la résultent les longueurs d'ondes $\lambda_{\alpha_3} = 1531{\cdot}2$ et $\lambda_{\alpha_4} = 1530.3$. Dauvillier donne les valeurs 1531.3 pour α_3 et 1530.1 pour α_4. C. a. d. des valeurs absolument identiques dans les limites des erreurs d'observation. Ces prémisses sont donc tout à fait justifiées. Ce résultat confirme encore les résultats nouveaux donnés plus haut dans notre étude, pour Ni et Cr.

Comme les lignes citées (tant que nous en pouvons juger correctement d'après les résultats obtenus pour seuls trois éléments) les lignes α_5 α_6 forment aussi un doublet analogue. La constante du doublet reste dans le même ordre, que la constante du doublet $\alpha_3 \doteq \alpha_4$

$$\sqrt{\frac{\nu}{R}} = 0{\cdot}012$$

comme on peut le voire à la table 4.

Table 4.

Elément	λ		$\frac{\nu}{R}$		$\sqrt{\frac{\nu}{R}}$		$\Delta\sqrt{\frac{\nu}{R}}$
	α_5	α_6	α_5	α_6	α_5	α_6	
12 Mg	9730·2	9711·8	93·653	93·831	9·677	9·687	0·010
13 Al	8205·8	8189·2	111·063	111·276	10·539	10·549	0·010
14 Si	7014	7003	129·921	130·125	11·398	11·407	0·009

Je continuerai les discutions touchant ces lignes quand j'aurai acquis le matérial pour plusieurs autres éléments.

En terminant je tienne à exprimer ici mes meeilleurs rémerciments à la deuxième section de l'académie des sciences et des arts tchècoslovaque, pour son sécours matériel de la fondation M. et Mme Wiehl, qui me a permis de poursuivre ces recherches.

Supplement pendant la correcture: Mousieur G. Wentzl a réussi d'après le comuniqué, que je obtiens de lui, a parvenir thèoretiquement au même resultat. (Z. f. Phys. 1925.) Il me fait aussi savoir, que d'après son opinion la ligne de M. Duane de tungstème ne correspond pas à la passage d'electron $K \rightarrow L_3$, mais e' est au contraire une ligne d'etincelles trouvée et classifiée chez les éléments plus légers dans ce travaille.

Praha, Institut de Physique II de l'Université Charles.

Sur le développement de l'oeuf de la souris blanche.

Par

ZDENKO FRANKENBERGER,

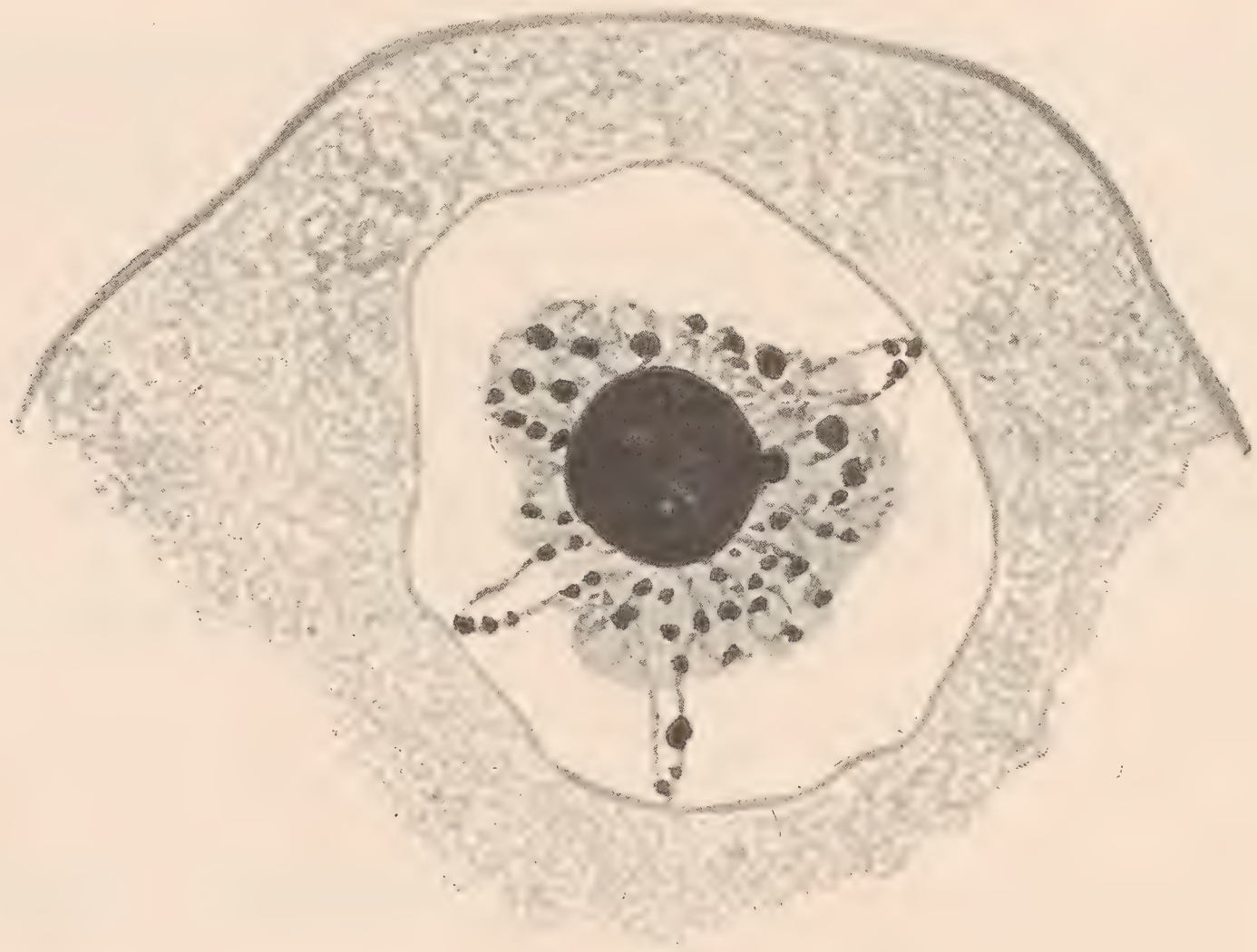
professeur à l'université de Komenský de Bratislava.

Présenté le 24 Octobre 1924.

Dans le présent travail j'ai poursuit l'oogénèse de la souris blanche depuis son commencement jusqu'au développement des divisions de maturation. La prolifération des oogonies se fait dans les ovaires foetaux par des divisions karyocinétiques; le nombre des chromosomes fait 24 (fig. *A*). Le nombre de ces divisions dans une série oogoniale ne pouvait pas être constaté. Après la dernière mitose oogoniale un noyau à repos se développe (noyau deutobrocque) (fig. 1) qui possède un réseau lininien, de la chromatine granuleuse et — du moins dans la plupart des cas — un petit nucléole. La cellule entre dans le stade de l'oocyte.

A

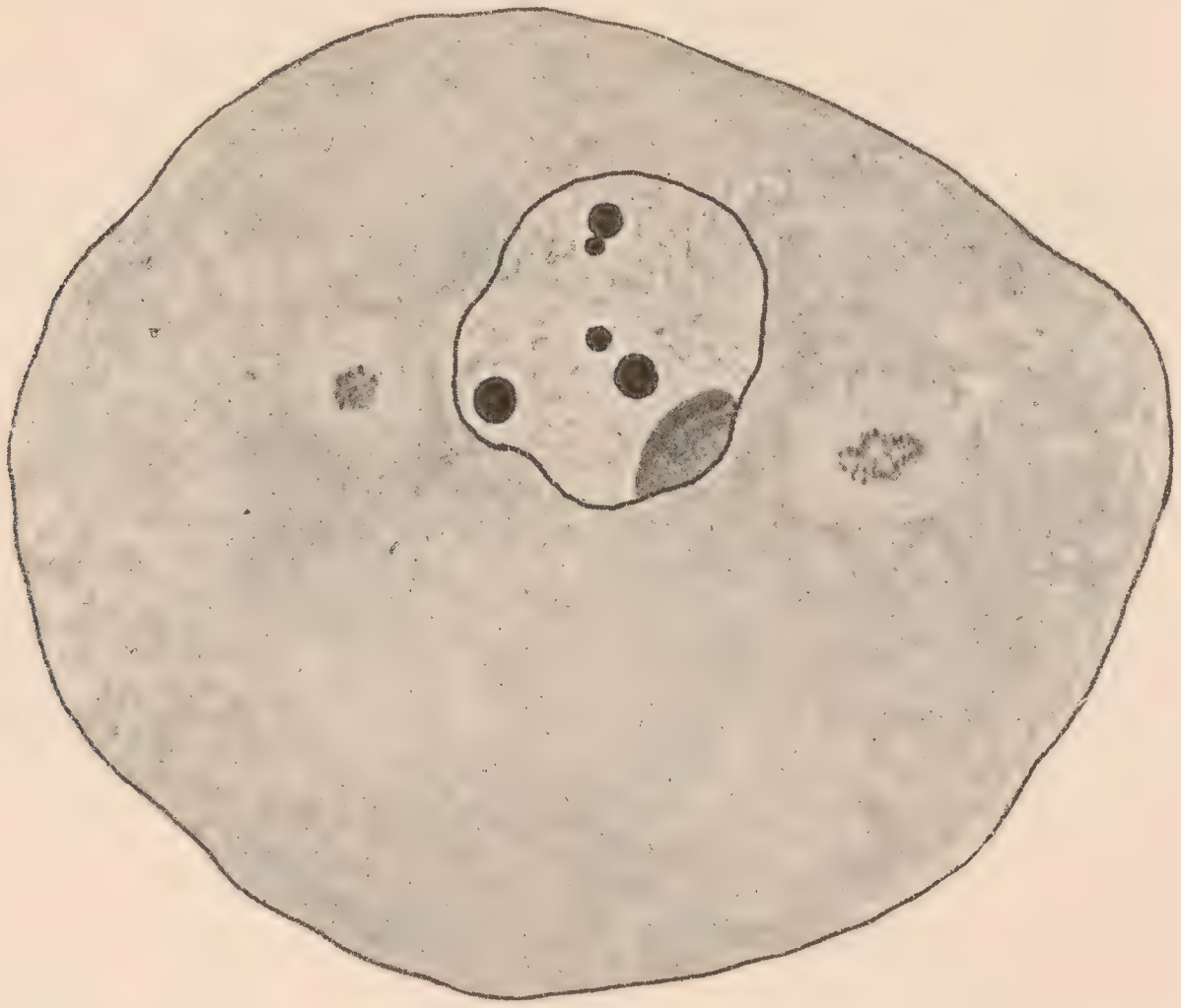
Au commencement de la période d'accroissement se forme un filament long, grêle, décrivant des courbes multiples dans la vacuole nu-



B

cléaire, par une distribution régulière de la chromatine sur le réseau linien (stade leptotène) (fig. 2); au même temps des petits nucléoles chromatiques font leur apparition (fig. 3). Le filament se contracte ensuite vers un pôle du noyau (stade de synapsis); les petits nucléoles se conservent (fig. 4, 5).

Après la synapsis le filament se déroule de nouveau et se segmente en 12 filaments épais, orientés en forme de bouquet (fig. 6, 7). Quelquefois on peut constater une interruption de la continuité des rubans sur leur sommet. C'est le stade pachytène, caractérisé aussi par la pseudoréduction du nombre des chromosomes, vraisemblablement par une métasyndèse des chromosomes simples. Les nucléoles se conservent ou font défaut (ou, plutôt, ne peuvent pas être constatés).



C

Ces rubans épais ne tardent pas à se scinder a deux (stade diplotène); des chromioles nettes apparaissent sur les deux filaments parallèles et se correspondent respectueusement. Ensuite l'orientation en bouquet se perd, la scissure longitudinale des rubans disparaît (fig. 8). Les filaments poussent des prolongements latéraux, ils perdent leur basophilie, et forment enfin un réseau continu des filaments lininiens. Un grand nucléole basophile apparaît (rarement au nombre de deux), concentrant en lui toute la substance basophile du noyau. C'est le stade dictyène, stade de la vésicule germinative (fig. 9, 10, 11, 21). L'oeuf est inclus dans le follicule primaire.

La seconde phase de la période d'accroissement se commence, caractérisée surtout par la formation des substances deutoplasmiques dans l'ooplasma; je n'ai pas étudié ce processus de plus près. Le follicule s'accroît, un antre se forme par la déhiscence et par la dégénération

des cellules folliculaires. Avant la rupture du follicule de de Graaf la substance basophile sort du nucléole en forme de nombreuses granulations petites dans le noyau, et forme des caryosomes ronds, nombreux, situés sur le réseau lininien (fig. 12, 13, 14, 19).

Ces granulations confluent secondairement en 12 nucléoles basophiles (fig. 20, 22). Le nucléole principal se conserve, mais il devient acidophile; de sorte qu'on trouve ensuite dans le noyau ce grand nucléole acidophile, souvent de forme un peu irrégulière, et 12 nucléoles basophiles, plus petits que le premier. Le centrosome se divise en deux, qui se posent sur les deux pôles du noyau (fig. *C*).

D

Enfin le réseau lininien commence a se contracter vers ces 12 nucléoles secondaires, en donnant ainsi l'origine au substratum lininien des chromosomes de maturation; tandisque la chromatine de ces chromosomes dérive de ces 12 nucléoles secondaires, pour chaque chromosome d'un d'eux (fig. 15, 16). Le reste oxyphile du grand nucléole principal disparaît, dans le noyau se forment 12 chromosomes qui ont les formes caractéristiques des tétrades; outre ces dernières il n'y a aucune particule formée dans le noyau (stade de la diacinèse) (fig. 17). La forme de ces tétrades nous autorise aussi a l'opinion qu'elles se sont formées par la métasyndèse des chromosomes originels. Les chromosomes dans le fuseau de maturation ont la forme de bâtonnets tout à fait courts ou de grains ovalaires (fig. 23); on ne peut pas décider, quelle division est reductionnelle, quelle est équationnelle.

Iron meteorite from Teplá in Bohemia.

(With 1 Plate.)

By

Dr. **BOH. JEŽEK**, Příbram.

Presented the 8 June 1923.

This iron meteorite was found in ploughing on Finsterhölzel-Ries near Teplá in Bohemia on 18. of September 1909. The whole discovery consisted of two pieces, one of 14.420 *g* and the other 2629 *g* weight. It is according to the Berwerth natural classification of iron meteorites, an *medium octahedrite with abundant plessite.*

An analysis of the meteorite was made by Mr. Dr. J. Štěrba-Böhm, professor of the Charles university at Prague. The analysis gave the following results:

Ni	7·47
Co	1·95
Fe	88·80
Ca	0·70
Mg	0·52
P	0·25
C	0·35
Si	traces
S	traces
	10·04

Specific gravity of the analysed material was 7·94. The photographied etched section (from the National Museum in Prague, 1360 *g* of weight) is cut parallel to the hexakisoctahedron (88·80·55) which is near to triakisoctahedron (332.)

The lamellae of *kamacite* are from 0·6 to 1·2 *mm* broad and are far enough traceable: there are many of the length of 2 and even 3 *cm*. The *taenite*, 0·07—0·18 *mm* thick, appears very visibly. It forms a very soft cover round the kamacite and penetrates also the plessite in form of nets or ridged shapes. The *plessite* fulfils rooms in some places larger

(up to 8 *mm*) and is different enough in its macroscopic aspect. It is either of porous and sandy nature, or more resistant, of grey colour and dull, or owing to the taenite his glistening stripes.

The *troilite*, that plays a comparatively important part, is to be found either in shape of nodules or very beautiful and unusually long *Reichenbach lamellae*. Round many parts of the troilite there is developed *kelyphokamacite* (*Rinne*). The *schreibersite* appears plentifully enough and also *rhabdite ranges* are present here. The analysis shows also the presence of *cohenite* by a considerable content of carbon (C = 0·35%); however it could not be doubtlessly ascertained.

JEŽEK: Meteorické železo z Teplé.

Iron meteorite from Teplá in Bohemia.

Etched section from the National Museum in Prague. Natural size.

Les nerfs du coeur.

Par

le professeur A. V. STARKOV,
membre de l'Académie des Sciences de l'Ukraine.

(Avec 16 planches.)

Dédié à M. prof. Dr. K. Weigner à l'occasion de sa cinquantine.

Présenté dans la séance du 24 octobre 1924.

Cet article-ci ne représente proprement dit qu'une partie de mon travail sur l'anatomie du système nerveux sympathique chez les vertébrés. J'ai projété de recueillir les faits dispersés dans les manuels et dans les périodiques, de les synthétiser et de les compléter par mes recherches personnelles. J'ai commencé par les recherches sur le plexus solaire et j'ai eu l'occasion d'en faire un petit rapport en 1913 à la Société Médico-Chirurgicale de Moscou. Ensuite je me suis mis à l'étude du système sympathique de la cavité thoracale, d'où résulte le présent petit travail. C'est ici que je dois signaler que le nerf sympathique de la région cervical a été minutieusement étudié par le feu docteur Baraboschkine, sous mes yeux, à l'Institut d'anatomie topographique de l'université de Moscou, sous la direction de mon maître regrétté, le professeur P. I. Diakonov. Cette oeuvre excellente du docteur Baraboschkine est restée inconnue dans l'Europe occidentale ainsi que l'auteur lui-même mort sur le front serbe (1912) en défendant la liberté slave qui lui était si chère.

Le nerf sympathique du bassin chez la femme a trouvé en la personne du professeur ukrainien G. Pissemsky un investigateur éminent. De ma part j'ai fait quelques études sur les nerfs du bassin, qui ont été publiées dans le premier volume de mon travail sur l'anatomie du rectum et du bassin en général (Moscou 1912). En outre c'est mon élève et prosecteur M. le Dr. Spirov qui, sous ma direction, étudiait le plexus hypogastrique à l'Institut d'Anatomie descriptive à Kiev. Ainsi donc j'ai à ma disposition certains matériaux anatomiques et un peu d'expérience nécéssaires pour me mettre à l'exécution de cette tâche vaste et pénible,

après avoir parcouru presque toute la littérature sur le sujet. Mais les circonstances de ma vie personnelle sont telles que je ne pourrai jamais effectuer mon travail comme je l'avais conçu; et c'est pour cette raison que je n'en publie qu'une petite partie.

Or, cette partie même est exécutée dans les conditions incroyablement difficiles de la première et de la seconde année de la révolution russe. Ce n'est que sur le territoire de la République Tchécoslovaque que l'auteur de ce petit ouvrage a retrouvé la tranquillité et la possibilité de travailler. C'est exclusivement grâce à l'accueuil noble et humain du respecté professeur K. Weigner que mon article peut paraître. Je me fais un devoir d'exprimer avant tout ma reconnaissance sincére et respectueuse au peuple et au gouvernement de la République Tchécoslovaque, qui m'ont donné la possibilité de vivre et de travailler, et tout particulièrement à l'Académie des Sciences et au professeur K. Weigner, qui ont accueilli avec une attention touchante ma tentative de donner un précis d'anatomie macroscopique des nerfs du coeur humain.

La technique.

Tandis que les méthodes de la recherche microscopique des organes, des tissus et des cellules se perfectionnent toujours et deviennent de plus en plus fines, on ne voit aucun progrès dans la technique des études macroscopiques, qui est très loin d'être parfaite; tout au contraire elle est très defectueuse, grossière et primitive. Cela regarde surtout l'investigation des formations fines chez les grands animaux. En étudiant ces formations chez les animaux de petites dimensions, l'anatomiste se sert d'une loupe binoculaire ou d'un microscope, tandis qu'en étudiant les mêmes objets chez les grands animaux on se borne à la préparation simple, à l'oeil nu et l'on s'arrête là où l'on cesse de voir clairement. On peut évitecet incovénient très facilement en employant une loupe de grandes dimensions, bi-convexe ou plate-convexe (celle de l'épidiascope par ex.) fixée sur un pied avec un bras flexible en métal, comme c'est d'usage dans les lampes éléctriques. Ce bras flexible permet de remuer la loupe en toutes directions et l'agrandissement considérable rend le travail facile et fructueux. Ce petit appareil, je l'ai fait moi-même en employant des lentilles de l'épidiascope de Zeiss. C'est ainsi que j'ai réussi à préparer sans peine les ramifications nerveuses les plus fines, qui resteraient sans cela inaperçues ou même seraient coupées. J'ai obtenu grâce à cette méthode un tableau très complêt, détaillé et précis. L'autre côté de la technique concerne le traitement préalable d'un objet à étudier, et je suis très content de signaler ici un grand progrès atteint à l'Université Ukrainienne de Kharkov par le Dr. Kondratieff élève du professeur Vorobieff. Durant mon séjour à Kharkov, en hiver 1921, j'ai pu étudier la technique et les

résultats du Dr. Kondratieff et lui aider comme je pouvais. M. le docteur Kondratieff a obtenu par une méthode assez compliquée la coloration élective du système nerveux périphérique-médullaire et sympathique, tandis que les autres tissus restent incolores. A mon avis, la méthode du Dr. Kondratieff aura un grand avenir si les savants de l'Europe la prennent en considération. Il est vrai que la méthode de Kondratieff est beaucoup plus applicable à l'étude des animaux qu' à celle du corps humain, parce qu'elle demande des matériaux tout-à-fait frais qui manquent aux instituts d'anatomie humaine. Or, l'auteur a obtenu des résultats satisfaisants sur les cadavres des enfants récemment morts. Je me restreins ici à une modification de la méthode de Kondratieff parce que cette modification est notamment applicable aux cadavres frais des enfants. Sur les autres modifications, j'ai fait un rapport à la Société des zoologistes russes à Prague (président le professeur Novikoff) qui le publiera sous peu.

La veine fémorale d'un cadavre étant ouverte, on lave par l'aorte ou par l'artère fémorale tout le système vasculaire avec une solution de sousoxyde de fer sulfurique (0·01—1%) dans de l'eau distillée ou ordinaire, en y ajoutant de l'acide chromique (0·1%) ou 1·0% de kali oxichromicum. Puis on enlève la peau du cadavre, on ouvre les grandes cavités (abdominale et thoracale) et l'on met le cadavre dans une solution (1—2%) d'acide formique avec du pyrogallol ou du pyrocatéchine (0·05—0·1%). On change le liquide chaque jour ou même deux fois par jour (si le temps est chaud). Le fer commence à se manifester après le laps de temps d'une heure ou de deux heures jusqu'à une semaine. Le pyrogallol et le pyrocatéchine ne pénètrent dans la profondeur des tissus que bien lentement; c'est pourquoi on doit attendre quelques semaines si l'on veut étudier l'épaisseur même des organes. On ne peut étudier les nerfs sur les préparations qu' à l'aide d'une lentille binoculaire en les éclairant avec une lampe électrique très forte d'après le procédé du professeur Vorobieff. Le traitement des cadavres des animaux qui viennent d'être tués consiste dans la coloration des nerfs avec le bleu de méthyle et de neutralrot avec des sels de fer et a été exposé par moi avec tous les détails dans mon rapport à la Société des zoologistes russes à Prague. Là, où la methode de Kondratieff n'est pas praticable, notamment sur les cadavres des sujets adultes que nous avons à l'institut d'anatomie au bout de 2 ou 3 jours après le décès, j'ai employé une autre technique qui a donné des résultats très encourageants. Ce qui est le plus important c'est qu'on doit rejeter la conservation des cadavres par le formol, si l'on veut étudier les ramifications fines nerveuses. Le formol endurcit le tissu cellulaire et rend la séparation des rameaux fins tout à fait impossible. Pour obtenir une bonne préparation des nerfs je trouve nécessaire d'éloigner du cadavre tout le sang en lavant le système vasculaire avec de l'eau salée (1—2%). Ce lavage doit être entrepris par les deux artères — humérale et fémorale, les veines correspondantes étant déja sectionnées. Je crois le lavage achevé quand l'eau qui

s'écoule des veines sectionnées est parfaitement pure est transparente. C'est une opération assez minutieuse et qui exige beaucoup de temps et de patience, mais elle est nécessaire, parce que autrement le sang, qui sort des veines de petit calibre (pendant la préparation) imbibe le tissu cellulaire lâche et empèche d'y distinguer les fins ramuscules nerveux. Quand le lavage est achevé, on injecte par l'aorte, ou par une autre artère, une quantité considérable de la solution d'un acide dans de l'eau ordinaire (2—5%). J'ai employé pour cette injection dans la plupart des cas l'acide nitrique (selon Frühwald), mais on peut aussi se servir de l'acide chlorhydrique ou acide formique. Sous l'action de ces acides les nerfs deviennent durs, résistants, tandis que le tissu cellulaire subit une transformation gélatineuse en devenant clair, transaparent et laisse sans difficulté séparer les plus fins ramuscules nerveux, qu'on voit parcourir cette gélée comme de petits fils blancs et résistants. J'ai pu constater qu'un certain dégré de l'oedème du cadavre et, par conséquent, du tissu cellulaire lâche est très avantageux. Alors, j'ai commencé de provoquer systématiquement cet oedème artificiel en injectant de grandes quantités de la solution aqueuse d'un acide par un artère. Il est assez difficile de préciser le dégré de l'oedème qui donne les meilleurs résultats. En tout cas l'oedème doit être bien prononcée, mais pas démésurée pour ne pas déplacer les organes ou même déchirer les fins ramuscules nerveux. Je laisse le cadavre ainsi gonflé dans un local frais pour 3—4 jours, afin que l'acide agisse sur les tissus. Comme les couteaux se gatent sous l'action de l'acide, j'emploie les lames tranchantes du rasoir „Gilette" que je fixe à des manches en bois. Le procédé lui même de la préparation des nerfs n'exige pas des instruments tranchants ou plutôt les défend. C'est avec un grand avantage que je me sers du crochet à crocheter dont je coupe le bout recourbé et je l'affile sur une pierre à aiguiser. De cette manière, j'ai à ma disposition une douzaine d'instruments de longueur et d'épaisseur différentes, ce qui me permet de travailler avec une grande précaution et avec une scrupulosité extrème. J'ai commencé mes dissections par le cou et puis j'ai pratiqué une valve du sternum et des côtes que j'ai écarté en bas. Je trouve que tous ces détails sont nécessaires pour avoir une préparation satisfaisante. Afin de préserver le cadavre contre la putréfaction je me sers seulement de l'acéton, qui ne durcit point les tissus et n'empèche nullement la dissection scrupuleuse.

Revue de la littérature.

Je n'ai pas l'intention de présenter au lecteur une revue de toute la littérature du sujet. L'analyse des opinions exprimées dans les différents manuels d'anatomie ne donne pas grand'chose, parce que les auteurs n'indiquent pas le nombre des cas sur lesquels leurs opinions sont fondées ni la méthode appliquée. Or, dans la question qui nous occupe en ce moment,

la quantité des cadavres examinés et la méthode font tout. D'un autre côté, le nombre des études consacrées spécialement à l'anatomie macroscopique des nerfs du coeur est bien restreint. On peut dire que depuis le grand travail de Scarpa (1794), qui a donné des planches admirables des nerfs cardiaques, nous n'avons presque rien de considérable. Cyon a découvert le nervus depressor cordis (1870) dont l'anatomie comparée a été très minutieusement étudiée par un savant italien — Viti (1883). Le docteur Schumacher a publié un travail très important qui examine les nerfs des mammifères depuis les marsupialia et jusqu'à l'homo sapiens. Prof. Tandler, dans son livre classique sur l'anatomie du coeur, traite la question des nerfs cardiaques assez superficiellement et le dessin de ces nerfs laisse beaucoup à désirer. Cela dépend exclusivement de la défectuosité des données de la littérature et du manque de recherches personnelles. Dans ce livre excellent et si documenté sous tous les autres rapports le fait est frappant!

Je vais citer maintenant les avis de quelques auteurs pour donner une idée générale de ce qu'on appelle une opinion généralement adoptée. La description présentée par le professeur Léon Testut dans son manuel est très significative. Testut est d'avis que de chaque côté nous avons 6 nerfs qui vont au coeur, c'est à dire trois nerfs du vagus et trois nerfs du tronc sympathique. „Arrivés à la base du coeur, les six nerfs cardiaques du grand sympathique et les six nerfs cardiaques du pneumogastrique s'entremèlent ensemble pour donner naissance au plexus cardiaque. Ce plexus situé en avant de la bifurcation de la trachée occupe un espace quadrilatère que limitent: en bas – la branche droite de l'artère pulmonaire; en haut — la portion horozintale de la crosse de l'aorte; à droite — la portion ascendante de cette même crosse; à gauche — le cordon fibreux qui résulte de l'oblitération du canal artériel. Au centre du plexus, se trouve sur la plupart des sujets un renflement ganglionaire décrit pour la première fois par Wrisberg et désigné dès lors sous le nom de ganglion de Wrisberg. Il est quelquefois remplacé par deux ou même trois ganglions plus petits. Du plexus cardiaque s'échappent en rayonnant une multitude de rameaux terminaux qui se distribuent: 1. à l'origine de l'aorte et de l'artère pulmonaire; 2. au coeur et au péricarde suivant un mode que nous avons déjà décrit à propos du coeur." Ainsi l'illustre anatomiste français reconnait l'existence de 12 nerfs qui forment un seul plexus cardiaque. Dans la nomenclature anatomique de Bâle (B. N. A.) nous trouvons aussi un plexus cardiaque et encore un plexus coronarius cordis anterior et plexus coronarius cordis posterior. Ganglion de Wrisberg porte le nom ganglion cardiacum (Wrisbergi). Il est intéressant de noter que le nerf de Cyon (n. depressor cordis) n'a pas trouvé la reconnaissance de la part du professeur Testut comme un nerf particulier. B. N. A. reconnait chez le pneumogastrique seulement: rami cardiaci superiores (N. depressor) et rami cardiaci inferiores, par conséquent les rami medii n'existent pas. Chaque ganglion

sympathique du cou donne l'origine à un nerf correspondant, c'est à dire: n. cardiacus superior, n. cardiacus medius, nervus cardiacus inferior. Ainsi donc, d'après la B. N. A. le plexus cardiaque est formé de dix nerfs (6 nerfs et 4 rameaux) au lieu de 12 d'après Testut. D'accord avec Testut B. N. A. accepte un seul ganglion cardiacum qui peut être divisé en deux ou trois ganglions plus petits. La description du professeur Rauber est assez différente de celle du professeur Testut. Rauber est d'avis que dans la formation du plexus cardiaque prennent part les rameaux du pneumogastrique, n. laryngeus superior, n. laryngeus inferior (plexus pulmonaire) ainsi que les trois nerfs des trois ganglions sympathiques du cou (parfois encore le nerf du premier ganglion thoracal). Quant au nerf grand hypoglosse Rauber croit que le nerf cardiaque d'origine de l'anse de l'hypoglosse, que l'on observe très rarement, n'est qu'un rameau aberrant du pneumogastrique ou du sympathique. Donc, l'origine des rameaux apparents du plexus cardiaque, d'après Rauber, est beaucoup plus vaste que celle d'après Testut ou B. N. A. Aucune source de l'innervation possible du coeur n'est oubliée, même ce rameau si rare de l'anse de l'hypoglosse ou du premier ganglion thoracal. Ensuite Rauber met en évidence la grande tendance des nerfs du coeur aux variations—quant au nombre, à l'épaisseur des rameaux nerveux ainsi qu'à l'origine, aux anastomoses, — mais il prend ces variations pour des différences superficielles de peu d'importance (nur oberflächliche Unterschiede). A leur arrivée dans la cavité thoracale, les nerfs du coeur des deux côtés et d'origine différente se rapprochent réciproquement et, en s'anastomosant bien de fois, forment un plexus à larges mailles plexus cardiacus, dans lequel on distingue une couche superficielle et une couche profonde qui sont réunies par des anastomoses. L'auteur donne ensuite la description de ces deux couches. Si ce ne sont que deux couches ce serait plus juste de parler de pars profunda et pars superficialis d'un plexus et pas de plexus superficialis et plexus profundus.

Le plexus cardiacus superficialis, d'après Rauber, est formé, par excellence, par les nerfs cardiaques supérieurs et s'étend plus du côté gauche étant recouvert par le bord concave de la crosse de l'aorte et par la bifurcation de l'artère pulmonaire. C'est ici que se trouve le ganglion cardiacum (Wrisbergi) unique, de dimensions considérables ou deux ganglions plus petits. Ce ganglion (noeud), comme la formation macroscopique, peut manquer, c'est à dire, d'après Rauber et d'autres auteurs, qu'il peut être remplacé par des amas multiples de cellules ganglionnaires dispersées sur le parcours des différents nerfs.

Le plexus cardiacus profundus est situé plus à droite et un peu plus haut que le plexus superficiel, immédiatement derrière la crosse de l'aorte, entre celle-ci et la bifurcation de la trachée, au-dessus de l'artère pulmonaire. Le plexus profond est plus fort et a les mailles plus étroites. Aucune indication sur le ganglion possible dans ce plexus n'est donnée par Rauber. Ensuite Rauber dit, que des deux parties de plexus (Abteilungen), c'est

à dire du plexus superficiel et du plexus profond, vont dans toutes les directions: *a*) des anastomoses et des rameaux périfériques. *a*) Les anastomoses vont au plexus trachealis et au plexus bronchialis. Les rameaux périfériques au tronc de l'aorte et à celui de l'artère pulmonaire (rami pulmonales). *b*) Ces rameaux pulmonaires comme les plexus pulmonales accompagnent les ramifications de l'artère pulmonaire dans le poumon et s'y réunissent avec le plexus pulmonalis nervi vagi; *c*) les rameaux pour les parois des atriums; *d*) plexus coronarius cordis anterior et posterior.

C'est intéressant de remarquer, que le professeur Rauber après avoir divisé le plexus cardiacus en deux couches ou même deux plexus (superficialis et profundus), en décrivant les anastomoses *a*) et les rameaux périfériques (*b, c, d*), les réunit (ces deux couches ou ces deux plexus) dans une entité. C'est pour cette raison que le lecteur reste dans l'incertitude auquel des deux plexus appartiennent ces anastomoses et ces rameaux, ou il doit croire, d'après le texte, que ces formations appartiennent aux deux plexus en même temps. Dans ce dernier cas la division du plexus en deux parties n'a presque aucune valeur. Le plexus coronarius cordis anterior est formé des rameaux qui entourent la racine de l'aorte, parviennent jusqu' à l'artère coronaire droite et l'accompagnent en formant autour d'elle un dense plexus. De là de nombreux rameaux vont en descendant au ventricule droit, de moins nombreux vont à l'atrium droit. Nous pouvons en conclure que l'atrium droit reçoit ses nerfs de deux façons: 1. immédiatement du plexus superficiel et profond et 2. par l'intérmédiaire des rameaux du plexus coronarius cordis anterior.

Le plexus coronarius cordis posterior est plus fort que le plexus anterior, il va, en arrière de l'artère pulmonaire, à la partie initiale de l'artère coronaire gauche et l'accompagne en envoyant des rameaux ascendants à l'atrium gauche et des rameaux descendants au ventricule gauche.

De cette description du professeur Rauber le lecteur fait les conclusions suivantes: 1. Les deux plexus coronaires — anterior et posterior, prennent leurs origines de deux plexus cardiaques — superficiel et profond et 2. ces plexus coronaires portent les rameaux nerveux pour les atriums et pour les ventricules et ce n'est que fortuitement qui ils suivent les trajets des artères. Je veux dire que nous n'avons pas le droit de conclure que les plexus coronaires sont des plexus vasculaires munis de fibres nerveuses vasomotrices par excellence, d'autant plus qu'ils sont des plexus vasomotrices exclusivement. Il faut encore ajouter que, d'après Rauber, le n. cardiacus medius peut avoir dans la cavité thoracale un ganglion ovalaire — ganglion cardiacum medium (Arnoldi).

Professeur Tandler commence sa description des nerfs du coeur par l'avertissement qu' en raison de variations multiples cette description n'est que schématique. Tandis que les nerfs sympathiques allant au coeur sont pourvus d'un certain dégré d'indépendance et pour cette raison portent

le nom — nervi cardiaci, les rameaux cardiaques du pneumogastrique sont au contraire moins indépendants et doivent être nommés — rami cardiaci. Les nerfs cardiaques vont de 2 ou 3 ganglions sympathiques du cou et du premier ganglion thoracal. 1. N. cardiacus superior nait ordinairement du ganglion cervical superieur (ganglion superior B. N. A.), reçoit pendant son trajet des rameaux de renforcement du tronc même du sympathique, donne des anastomoses aux rameaux cardiaques supérieurs du pneumogastrique et au nerf laryngé supérieur et inférieur. Ce nerf croise l'artère thyréoïdienne inférieure, en passant du côté dorsal et ensuite celui du côte droit se place sur l'artère anonyme, celui du côté gauche — sur l'artère carotide primitive. C'est en suivant ces vaisseaux que les nerfs descendent vers le coeur. Caudalement du point du croisement avec l'artère thyréoïdienne inférieure, on voit assez souvent sur le nerf un petit ganglion (ganglium cardiacum superius). Sur le N. cardiacus superior sinister, à son entrée au plexus cardiacus, on observe souvent aussi un ganglion — ganglium cardiacum inferius s. magnum s. ganglion Wrisbergi qui se divise parfois en deux parties. D'après Henle et Andersch, le nerf cardiaque supérieur n'existe que du côté gauche, tandis que Scarpa, Neunauer et Schumacher l'ont décrit aussi du côté droit. Tandler donne une telle explication à cette controverse des auteurs que le nerf est plus constant au côté gauche, tandis que le nerf droit manque assez souvent. Nous avons dejà vu que l'auteur attribue le ganglion Wrisberg au nerf cardiaque supérieur gauche, alors que sur la fig. 104 de son livre on peut l'attribuer plutôt au nerf droit. 2. Nervus cardiacus medius (nommé par l'auteur on ne sait pas pourquoi „seu magnus" (naît du ganglion cervicale medium, s'il existe, ou du tronc sympathique, au point du croisement de celui-ci avec l'artère thyréoïdienne) inférieure. De son origine le nerf se dirige obliquement en bas et médialement, s'anastomose pour la plupart avee le nerf récurrent et arrive sous l'artère souclavière. Plus bas de l'apertura thoracis superior, ce nerf peut être pourvu d'un ganglion — ganglion cardiacum medium. 3. N. cardiacus inferior s. parvus prend son origine du ganglion sympathique inférieur du cou et aussi du premier ganglion thoracal, et se dirige en bas et en dedans; le nerf droit passe en arrière de l'artère anonyme, le nerf gauche passe en arrière de la crosse de l'aorte en se dirigeant au plexus cardiaque. Il donne aussi des anastomoses avec le nerf récurrent et se réunit souvent avec le nervus cardiacus medius en formant aussi avec lui le nervus crassus. Sur la figure 104, il n'y a que le nerf cardiaque inférieur gauche.

L' auteur mentionne que, d'après Meckel, le nerf cardiaque inférieur n'existe que du côté droit. Si les fibres nerveuses qui sortent du premier ganglion thoracal ne se confondent pas avec le nerf cardiaque inférieur, nous avons un quatrième nerf, le nervus cardiacus imus.

Les rameaux cardiaques du pneumogastrique. On divise les rameaux cardiaques du vagus en deux grouppes: rami cardiaci superiores et rami

cardiaci inferiores. Les rameaux cardiaques supérieurs peuvent prendre leur origine sur toute l'étendue du pneumogastrique entre l'origine du nerf laryngé supérieur et celle du nerf laryngé inférieur (recurrent). Parfois le rameau le plus supérieur reçoit encore des fibres du ramus externus nervi laryngei superioris. C'est à dire l'auteur décrit ainsi le nervus depressor typique, tel que l'a trouvé Cyon, prenant son origine par deux racines — une du laryngé supérieur et l'autre du tronc du pneumogastrique. Rami cardiaci inferiores naissent près de l'origine du récurrent tantôt uniquement du pneumogastrique, tantôt du pneumogastrique et du récurrent en même temps. C'est notamment le rameau gauche qui sort du récurrent qui a été décrit par Galien. D'accord avec Finkelstein, l'auteur considère le rameau le plus supérieur du pneumogastrique de l'homme comme homologue au nerf depressor de Cyon chez les lapins, parce qu'il reçoit presque constamment une racine du ramus externus nervi laryngei superioris. Le nervus depressor se dirige tantôt seul, tantôt reuni avec le nerf cardiaque supérieur (sympathique), au plexus cardiaque. La description de Kreidmann, selon laquelle n. depressor descend entouré d'une gaine commune, avec le pneumogastrique, est erronée d'après Tandler. D'un côté, l'auteur croit que n. depressor aboutit au plexus cardiaque, de l'autre côté, il veut montrer que c'est le nerf de l'aorte, notamment le nerf gauche, se ramifie sur la paroi ventrale, le nerf droit sur la paroi dorsale de ce vaisseau. Les rameaux supérieurs du pneumogastrique et le ramus cardiacus rami externi nervi laryngei superioris sont conpensateurs l'un de l'autre (Stehen in einem vikarierenden Stärkeverhältnis), c'est à dire si le premier de ces deux nerf est grèle, l'autre est plus fort et vice versa. C'est pour cette raison qu'on doit reconnaître que les rameaux cardiaques supérieurs du pneumogastrique avec le rameau cardiaque peu constant du laryngé supérieur — correspondent au nerf depressor, d'autant plus que chez les animaux l'origine de ce dernier nerf est soumise a des variations multiples. Chez le lapin et le porc on a trouvé le nerf depressor double d'un côté. Quant aux rameaux cardiaques inférieurs du vagus l'auteur cite seulement l'avis de Schumacher qui a démontré la connexion de ces nerfs avec le rameau homolatérale de la bifurcation de l'artère pulmonaire.

Le plexus cardiaque. Le plexus cardiacus se compose de tous les rameaux du pneumogastrique avec l'addition occasionnelle d'un rameau de l'anse de l'hypoglosse. L'auteur traite ce dernier rameau comme une branche aberrante du vagus ou du sympathique. Tout le plexus cardiaque se divise en deux parties — superficielle et profonde. La partie superficielle plus faible est située entre le bord concave de la crosse de l'aorte et la bifurcation de l'artère pulmonaire; la partie profonde, plus forte, est placée entre l'aorte et la bifurcation de la trachée. Par suite du fait que les nerfs se dirigeant du coeur s'entrémèlent en un plexus dense, on est presque hors d'état de poursuivre chaque rameau particulier jusqu'à sa terminaison. *Plexus cardiacus superficialis seu anterior* est formé principalement par les rameaux

supérieurs du pneumogastrique gauche et par le nerf cardiaque supérieur gauche (sympath.). S'y joignent encore quelques fibres des nerfs cardiaques gauches inférieurs et les branches des nerfs cardiaques inférieurs et des rameaux cardiaques inférieurs *droits* qui descendent le long de l'artère anonyme. Le plexus superficiel s'anastomose avec le plexus bronchialis sinister.

Nous devons ici souligner de notre côté qu'en somme le plexus superficiel, d'après Tandler, est formé principalement par les nerfs *gauches supérieurs* avec un complément des nerfs *droits inférieurs. Le plexus cardiacus profundus* se compose de tous les nerfs cardiaques (du sympathique) à l'exception du nerf supérieur gauche et de tous les rameaux du pneumogastrique sauf les rameaux susmentionnés. Le plexus profundus s'anastomose avec le plexus trachéal et le plexus pulmonaire droit. De ces deux plexus cardiaques — superficiel et profond — naissent deux plexus périphériques qui vont envelopper les artères coronaires du coeur. L'auteur décrit le plexus coronaire *droit* comme naissant de deux plexus cardiaques-superficiel et profond—et fournissant les nerfs pour le ventricule et l'atrium droits. Le plexus coronarius sinister prend son origine principalement du plexus cardiacus profundus, bien qu'il reçoive aussi quelques branches du plexus superficiel. En suivant l'artère coronaire gauche et ses ramifications, le plexus coronaire gauche donne les rameaux qui entourent le ramus descendens de cette artère et qui descendent sur la face antérieure du coeur jusqu'à son apex; une autre partie des rameaux se dirigent vers le margo obtusus cordis. C'est seulement une quantité insignifiante des branches du plexus coronaire gauche qui parviennent à la face postérieure du coeur. C'est notamment le plexus coronaire droit qui se ramifie sur cette face postérieure du coeur.

Nous ne continuerons pas cette étude de la littérature en analysant les conceptions de chaque auteur sur ce sujet, car cela nous amènerait à des répetitions bien ennuyeuses. Nous allons plutôt donner une idée générale, un aperçu sommaire de ce sujet.

Plexus cardiacus. Nous avons déjà vu que certains auteurs éminents ne divisent point ce plexus en deux parties comme le font la plupart des anatomistes. En effet, Rauber, Tandler, Hyrtl, Henle, Weigner, Quain, Morris, Gegenbauer, Schumacher—reconnaissent le plexus cardiaque superficiel et plexus cardiaque profond. C'est Sappey seul qui veut diviser le plexus cardiaque en trois détachements: antérieur, moyen et postérieur. Au surplus, tous les auteurs sont d'accord que cette division est plutôt artificielle, conventionnelle, puisque les deux plexus s'anastomosent entre eux largement. En outre, Schumacher considère le ganglion cardiacum Wrisbergi comme un centre de liaison entre deux plexus cardiaques quoique ce ganglion ne soit pas constant. Si le ganglion manque (ce qui arrive assez souvent), on trouve à sa place des anastomoses entre les deux plexus susmentionnés. Habituellement tous les nerfs, d'après Schumacher convergent

au ganglion Wrisbergi pour se réunir avec lui soit directement ou indirectement. Ainsi Schumacher considère le ganglion de Wrisberg comme un centre anatomique et peut-être géométrique, comme un point central. comme un foyer de tout le système c'est à dire des deux plexus — tant superficiel que profond, de même que les deux ganglia coeliaca (ganglions semilunaires) nous apparaissent comme deux centres du plexus solaire. A cause de la présence d'un tel centre ou tous les nerfs s'entremèlent, on ne peut point discerner les nerfs sortant de ce centre comme les nerfs droits ou les nerfs gauches. Un tel discernement n'est possible qu'à l'égard des branches particulières (séparées) dont la plupart des fibres évitent le ganglion en lui envoyant seulement de fines anastomoses. Ensuite, la majorité des auteurs reconnaissent que le plexus coronaire antérieur ou gauche et plexus postérieur ou droit prennent leur origine de l'un et de l'autre des deux plexus cardiaques. Tous les nerfs du coeur sont-ils uniquement des nerfs de vaisseaux, qui suivent comme des plexus vasculaires les artères coronaires sans fournir au myocarde de rameaux spéciaux? Ou, au contraire, y a-t-il des rameaux particuliers destinés aux parois musculaires du coeur? Les opinions des auteurs sur ce sujet sont divergeantes. Ainsi Behrends (1793) reconnaît tous les nerfs du coeur comme les nerfs des vaisseauxs, tandis que Scarpa est déjà d'un avis contraire; il soutient que hors des nerfs de vaisseaux il y a beaucoup de nerfs indépendants qui pénètrent dans le myocarde. Scarpa le démontre sur ses planches superbes que j'ai eu l'occasion d'étudier à l'Institut d'Anatomie topographique à l'Université de Moscou. Sappey est du même avis en faisant observer que les nerfs destinés au myocarde s'éloignent à une grande distance des vaisseaux. C'est ce que tâchent de démontrer les figures de Lee. Schumacher émet une opinion diamétralement opposée à celle de Behrends, c'est a dire qu'il lui était toujours impossible de démontrer sur le coeur de l'homme la dépendance des nerfs du trajet des artères coronaires. Quoique les troncs des nerfs plus gros suivent en général le trajet des artères coronaires, cela ne regarde point tous les nerfs et encore moins ces trainées de fibres qui émergent des troncs des nerfs importants et sont disposées sous l'épicarde. Ces trainées de fibres nerveuses font leur route tout à fait indépendante des vaisseaux et pénètrent dans le myocarde sans être accompagnées de rameaux artériels concomittants. De même sur les artères coronaires Schumacher n'a pas réussi à montrer un plexus si vaste et si fort comme le représente Lee.

Nous allons maintenant examiner les descriptions de chaque nerf et de chaque rameau cardiaque en particulier. Nous commençons par les rameaux cardiaques du pneumogastrique.

Les rameaux cardiaques qui prennent leur origine sur le tronc du vagus entre l'origine du laryngé supérieur et celle du récurrent doivent être nommés — les rameaux cardiaques supérieurs du pneumogastrique ou bref — les rameaux supérieurs. Les branches nerveuses destinées pour le coeur qui

émergent du récurrent, doivent porter le nom de rameaux cardiaques moyens du pneumogastrique, ou bref — de rameaux moyens ; ceux qui naissent du tronc du vagus au dessous de l'origine du recurrent, sont les rameaux cardiaques inférieurs du pneumogastrique ou bref — les rameaux inférieurs. Le sujet se complique par cette circonstance que les rameaux supérieurs aussi bien que les rameaux inférieurs peuvent prendre leur origine de trois manières: 1. uniquement du tronc du vagus ; 2. uniquement du nerf laryngé supérieur ou resp. du nerf laryngé inférieur (récurrent). Nous avons alors un rameau cardiaque du nerf laryngé supérieur et, d'après notre nomenclature, un rameau cardiaque moyen (c'est à dire une branche cardiaque du récurrent) ; 3. du tronc du vagus — une racine et du laryngé supérieur — une autre racine ; il en résulte le nerf depressor de Cyon typique, tandis qu'en bas nous avons un rameau à deux racines — une racine du tronc du vagus et une racine du récurrent. On doit désigner un pareil rameau comme un rameau cardiaque inférieur à deux racines tandis que le nom de rameau cardiaque moyen appartient uniquement à un rameau qui naît seulement du récurrent. Au premier abord, on pourrait croire que c'est une question de morphologie pure et de la nomenclature pédantesque, mais l'étude plus approfondie de la matière nous amène à être plus prudents. Si l'on admet avec Rauber que les fibres du nerf spinal (accessoire de Willis) (notamment son ramus internus) ou les fibres de „nervi accessorii vagi" après s'être accolés au pneumogastrique en sortent ensuite comme rami pharyngei, rami laryngei superiores et inferiores et rami cardiaci nervi vagi, la question de l'origine de chaque fibre acquiert une importance physiologique considérable. Scarpa a décrit les X et XI paires nerveuses comme un nerf unique à deux racines. La racine sensitive supérieure ou dorsale du nerf de Scarpa sort du sulcus lateralis medullae oblongatae ; la racine ventrale ou la racine motrice sort par deux groupes de filets (du bulbe et de la moelle épinière. (Or nous savons à présent que le nerf pneumogastrique lui-même contient outre les fibres sensitives encore des fibres motrices qui émanent du nucleus ambiguus (noyau ambigu). Il est connu ensuite qu'il y a deux anastomoses entre le pneumogastrique et le spinal. 1. Dans le trou déchiré postérieur (foramen jugulare) le ganglion jugulaire s'anastomose avec le spinal par deux filets courts ; 2. sous le trou déchiré postérieur le nerf spinal se divise en deux branches, dont la branche médiane — ramus internus se jette dans le ganglion plexiforme (ganglion nodosum n. vagi) tandis que la branche externe va aux muscles (m. sterno-cleido-mastoideus et m. cucullaris).

(Les travaux de Van Gehuchten et Molfard basés sur des examens histologiques ont montré qu'il fallait concevoir tout autrement la dixième et la onzième paires craniennes. Toutes les fibres radiculaires naissant du bulbe au dessous du glosso-pharyngien, appartiennent au pneumogastrique, le spinal a une origine purement médullaire. D'autre part, le spinal ne se divise pas en deux branches à la sortie du crâne, mais les dixième

et onzième paires se fusionnent entièrement au moment ou elles vont sortir du crâne, pour se séparer de nouveau dans la suite.)

Hyrtl croit que le nerf spinal monte au crâne pour rendre au pneumogastrique une grande partie de fibres motrices qui seraient insuffisantes chez le pneumogastrique pour l'innervation des organes intérieurs si nombreux. A l'avis du professeur Antonelli, deux branches de bifurcation du spinal correspondent à deux groupes de filets radiculaires; le groupe médullaire donne la branche externe, le groupe d'origine bulbaire forme la branche interne. Autrefois Willis a décrit sous le nom de spinal seulement la branche externe, c'est à dire celle d'origine médullaire, alors qu'il confond la branche interne avec le pneumogastrique. Les expériences physiologiques ont démontré de leur côté que la branche interne du spinal glisse seulement le long du ganglion plexiforme et l'abandonne sous l'aspect des nervi pharyngei, n. laryngei superioris, nervi laryngei inferiores et rami cardiaci (superiores, medii, inferiores). Cl. Bernard dans ses expériences sur le schiens, en arrachant le nerf spinal tout près de son origine, a reçu une aphonie complète, ce qui démontre la dérivation des nerfs laryngés du spinal. On cite aussi des observations cliniques de l'affection isolée du spinal, le pneumogastrique restant intact, où l'on avait une aphonie complète. Vrolik a vu chez le troglodytes niger la branche interne du spinal se diriger directement au larynx et distribuer des branches terminales à ses muscles sans s'anastomoser aucunement avec le pneumogastrique. Tout au contraire, les observations d'Onodi et de Grabower plaident en faveur de la dérivation des nerfs laryngés du pneumogastrique. A savoir, Grabower arrachait les filets radiculaires du spinal dans la cavité crânienne ou sectionnait ce nerf immédiatement à sa sortie du trou déchiré postérieur; la paralysie des cordes vocales n'arrivait point. Mais quand le même expérimentateur procédait à la manière de Cl. Bernard, il obtenait cette paralysie; c'est parce que le nerf spinal est lié très intimement aux filets radiculaires inférieurs du pneumogastrique et qu'en arrachant le spinal près de son origine du bulbe on rompt en même temps les susdits filets du pneumogastrique. C'est pourquoi la question reste indécise (Mancioli Tommaso. La larynge nelle lesioni del ricorrente. Roma 1908).

Rami superiores nervi vagi. Le n. depressor de Cyon a occasionné une grande confusion et a donné beaucoup de peine aux anatomistes. Il a eté décrit d'abord par le professeur Cyon chez le lapin et chez le cheval. En général on peut dire que la majorité des auteurs reconnaissent son existence et décrivent un rameau cardiaque émergeant du laryngé externe (c'est à dire d'après Б. N. A. du ramus externus nervi laryngei superioris). Le mode d'origine du rameau cardiaque supérieur du pneumogastrique étant soumis à bien des variations, il en résulte une grande confusion que nous allons démeler. Le ramus cardiacus nervi laryngei superioris peut avoir un trajet indépendant jusqu'au coeur. C'est ainsi que Henle, par exemple, décrit un rameau du laryngé externe qui se dirige directement au plexus

cardiaque. Il peut arriver maintenant que ce ramus cardiacus laryngei se confond en un tronc commun avec le nerf cardiaque supérieur (sympathique) et alors on le décrit comme un anastomose du nerf laryngé supérieur avec le nerf cardiaque supérieur. Ainsi Scarpa représente sur la planche III un nerf qui va du laryngé externe au nerf cardiaque supérieur. Ce sont précisément les mêmes données que nous rencontrons chez Neunauer, Theile, Masse, Ellis, Zuschka, Hyttl Quain, Sappey, Morris et les autres. Quand on a éclairci la valeur physiologique du nerf depressor les recherches de ce nerf chez l'home ont pris un grand élan et sont devenues plus systématiques. Alors le rameau cardiaque du laryngé s'est montré comme allant parfois dans une gaine commune avec le pneumogastrique après avoir pris son origine du point d'émersion même du laryngé. Il est permis de croire au surplus qu'une certaine partie des préparations n'étaient que des artefacta. Ainsi Kreidemann dit qu'un rameau cardiaque du laryngé, plus ou moins fort, reçoit encore une branche du pneumogastrique qui peut être eventuellement d'un calibre microscopique. Le rameau cardiaque laryngé ainsi constitué après le trajet libre de 2—3 *cm* se confond avec le pneumogastrique. Nous avons dans ce cas l'absence de la seconde racine du nerf depressor (c'est à dire l'absence de la racine du côté du pneumogastrique). Certains auteurs considérent comme un cas très exceptionnel la conformation du nerf depressor chez l'homme tout à fait identique avec celle du lapin (Zanger—Toldt). Finkelstein a trouvé un n. depressor typique à deux racines (racine *L* et racine *V*) chez un des cinq cadavres sectionnés. Il est possible ensuite que le n. depressor naisse uniquement du tronc du pneumogastrique (c'est à dire la racine manque). Ce serait un cas contraire à celui décrit par Kreidmann. C'est ainsi que Viti, dans ses études faits sur 100 cadavres, a signalé l'absence du rameau cardiaque laryngé 7 fois de deux côtés, 18 fois du côté droit, 12 fois du côté gauche; dans 165 cas le nerf était présent quoique avec un trajet différent. C'est au fond le résultat identique à celui auquel est arrivé Alpiger dans son travail. Il nie l'existence d'un rameau cardiaque du laryngé externe comme un nerf indépendant allant au plexus cardiaque, mais les observations de Henle réfutent cette opinion. Par conséquent, une telle modification du trajet du nerf existe, quoique elle soit bien rare. Parfois ce nerf naissant du laryngé supérieur, après un cours trajet, aboutit de nouveau au pneumogastrique. On rencontre parfois la modification qui a été décrite par certains auteurs, Kreidemann entre autres. Dans un de ces cas, Alpiger a observé le nerf depressor typique (comme chez le lapin) avec deux racines (racine *L* et racine *V*) qui se portait au plexus cardiaque. Hors d'un tel nerf typique, l'auteur reconnaît, aussi le n. depressor comme une branche anastomotique entre le laryngé et le nerf cardiaque supérieur. A mon avis, toutes ces variétés et tous ces faits observés par les auteurs et par moi-même peuvent se reduire à très peu de chose. Avant tout il faut distinguer les variations d'origine du nerf et les variations de son trajet. Commençons notre analyse par les

premières (les variations d'origine). Le n. depressor ou comme on l'a nommé, à mon avis, à tort, nervus aorticus, peut prendre son origine de trois façons: 1. origine à trois racines c'est à dire *a*) la première racine — du nerf laryngé externe (branche terminale inférieure) ou de la branche terminale superieure (interne) (Cruveilhier); *b*) la seconde racine — du tronc du nerf laryngé commun; *c*) la troisième racine — du tronc du pneumogastrique.

2. Origine à deux racines: *a*) la première racine du laryngé externe et *b*) la seconde racine du tronc du pneumogastrique; 3. origine à une racine; ici nous avons deux variétés possibles *a*) une racine du nerf laryngé externe et *b*) une racine du tronc du nerf vagus.

Ainsi nous avons déjà 5 variétés possibles d'origine. Si on y ajoute encore une anastomose avec le tronc sympathique, il en résultera 15 variétés. Naturellement on peut considérer cette anastomose avec le nerf cardiaque supérieur ou avec le tronc sympathique comme une racine sympathique du nerf depressor.

Passons aux variations du trajet du nerf depressor. Le nerf, après avoir pris son origine d'une manière quelconque, peut se diriger indépendamment au plexus cardiaque 1. (c'est ce qu'on voit chez les édentés (edentata, Dasypus setosus) et chez le chat); 2. le nerf peut se joindre au tronc du pneumogastrique et ne s'en détacher qu'au dessus ou même au dessous de l'apertura thoracis superior; 3. le nerf peut, après sa réunion avec le pneumogastrique, le quitter pour se réunir avec lui encore une fois et le laisser ensuite définitivement tout en bas; 4. le nerf peut se joindre au nerf cardiaque supérieur; 5. le nerf peut enfin se réunir avec le tronc sympathique. C'est intéressant de noter que chez les animaux dont le nerf vagus et le nerf sympathique ont une gaine commune, la dissection du nerf depressor offre beaucoup de peine. Si le nerf depressor fait une partie de se route réuni avec le pneumogastrique ou le sympathique, il les abandonne en devenant libre le plus souvent au dessus de l'origine du récurrent. Le nerf laryngé supérieur, d'après mes observations, peut envoyer des fibres au plexus cardiaque encore d'une autre manière. Quand au nerf depressor manque sa racine laryngée, nous avons une forte anastomose entre le nerf laryngé supérieur et le récurrent, la soi disant „anse de Galen ou d'Onodi“). J'ai vu cette anse présente sur chaque pièce, quoique d'une valeur inégale.

Beaucoup d'auteurs croient que le nerf depressor descend dans la cavité thoracale et s'y termine sur les parois de la crosse de l'aorte; le nerf du côté gauche sur la paroi ventrale, celui du côté droit sur la paroi dorsale de ce vaisseau. (Cette terminaison du nerf depressor est considéré comme son trait le plus caractéristique.) C'est pour cette raison que l'on a nommé „le nerf aortique“. *De mon côté je trouve cet avis des autours tout à fait erroné.* Il faut encore ajouter que chacune des deux racines du nerf depressor (c'est à dire la racine du laryngé et la racine du nerf pneumogastrique),

peut aller au plexus cardiaque parfaitement isolée et indépendante. Il en résulte alors un nerf depressor double. Une telle disposition se rencontre sur un côté du corps chez certains animaux (le lapin et le porc, d'après Schumacher).

Rami cardiaci inferiores et rami cardiaci medii nervi vagi. On ne peut pas tirer de la littérature une conception quelque peu précise sur les rameaux inférieurs et moyens du vagus. On peut dire que Rauber semble exprimer l'opinion généralement adoptée. Il considère comme les rameaux cardiaques supérieurs deux ou trois rameaux qui naissent du tronc du pneumogastrique entre le laryngé supérieur et le récurrent. Le rameau le plus supérieur c'est lenervus depressor. Les rami cardiaci inferiores, d'après cet auteur, prennent leur origine en partie du nerf récurrent, en partie du tronc du pneumogastrique. Ces rameaux s'unissent les uns aux autres ainsi qu'aux rameaux supérieurs et aux nerfs cardiaques sympathiques et vont au plexus cardiaque profond. Quelques-uns de ces rameaux se dirigent au plexus trachéal et au plexus oesophagien. Schumacher, en se basant sur l'étude très détaillée de la littérature, dit ce qui suit: „Rami cardiaci inferiores n-vi vagi et rr. cardiaci nervi recurrentis sont en connexion très intime entre eux. Certains auteurs parlent en général seulement des rameaux cardiaques inférieurs en mentionnant qu'ils peuvent naître aussi du nerf récurrent. Le nombre des rameaux indiqué est différent. Le point de naissance de ces rameaux notamment du côté droit c'est l'origine du nerf récurrent." Dans un autre passage de son ouvrage l'auteur dit qu'il est très difficile de constater quelque régularité en ce qui concerne ces rameaux dans la classe des mammifères. Dans la majorité des cas, il y a du côté droit des anastomoses entre le tronc sympathique et le point d'origine du récurrent, de sorte que les nerfs soi disant „accélérants" (l'auteur appelle ainsi les nerfs cardiaques sympathiques) vont très souvent en qualité de pareils anastomoses vers le point d'origine du récurrent pour se diriger de là au coeur. Naturellemant, c'est très difficile de discerner les fibres appartenant au tronc même du vagus (resp. au récurrent) de celles qui ne se servent de ces nerfs que comme de voie. Ce n'est pas rarement que l'auteur a vu chez les différents mammifères, ainsi que chez l'homme, les rameaux inférieurs du pneumogastrique aller innerver l'artère pulmonaire, et notamment les rameaux droits la branche droite, les rameaux gauches la branche gauche de cette artère. Par conséquent les rameaux supérieurs du vagus innervent l'aorte (nervi aortici) tandis que les rameaux inférieurs de ce nerf innervent l'artère pulmonaire (nervi pulmonales) (Schumacher).

Les rapports qui existent entre les rameaux du pneumogastrique et le plexus cardiaque même sont décrits par les auteurs très différemment. D'abord nous avons vu le nerf depressor décrit par certains auteurs comme allant directement aux parois de l'aorte. Selon Rauber, Ellis, Weigner, Thomson, Schäfer et Thane, les rameaux cardiaques supérieurs gauches du vagus vont au plexus superficiel, tandis que les rameaux droits vont

au plexus profond. D'après Morris tous les rameaux du vagus vont au plexus profond à l'exception des rameaux inférieurs gauches, ce qui contredit les autres auteurs.

Les nerfs cardiaques du tronc sympathique et nervi accelerantes. (D'après Schumacher.) On décrit habituellement les trois nerfs cardiaques de chaque côté: n. cardiaque supérieur (du ganglion supérieur), nerf cardiaque moyen (du ganglion moyen) et le nerf cardiaque inférieur (du ganglion inférieur). Il y a tout de même quelques auteurs qui reconnaissent encore un nervus cardiacus imus venant du premier ganglion thoracal. Rauber admet son existence en faisant une remarque en parenthèses (letzterer Herznerv bestritten).

Nervus cardiacus superior. Ce nerf apparaît chez les mammifèrs pour la première fois chez les singes (cynocephalus mormon, macacus resus, pithecus satyrus). Il est rare que le nerf manque, et de l'autre côté il peut apparaître parfois double (Schumacher). On l'a vu présent seulement du côté gauche (Andersch, Hehle, Hartmann) et l'on indique en général qu'il manque le plus souvent du côté droit (Alpiger, Schumacher). Le nerf prend son origine ordinairement par une racine qui part du pôle inférieur du ganglion, mais parfois il émerge par deux racines — une racine du ganglion et l'autre du tronc même du sympathique, ou il peut naître du tronc uniquement en bas du ganglion (Luschka, Hyrtl, Schumacher). La plupart des auteurs mentionnent que le nerf cardiaque supérieur *gauche* chemine sur la face antérieure de la crosse de l'aorte jusqu'au plexus cardiaque superficiel, tandis que le nerf cardiaque *droit* passe sur la face postérieure de la crosse pour aboutir au plexus cardiaque profond. Schumacher signale que ce nerf peut aller au tronc du récurrent et le quitter de nouveau, ce qu'on observe plus souvent du côté droit. Le nerf cardiaque supérieur est quelquefois pourvu d'un tout petit ganglion qui peut être placé à des points extrémement variés (Hyrtl, Schumacher), principalement aux points où le nerf émet des branches (Schumacher), au niveau du ganglion sympathique inférieur du cou, en bas de l'artère thyréoïdienne inférieure, au lieu de la réunion avec le nerf cardiaque moyen (Sappey). On a vu parfois deux ganglions (Schumacher). Des différentes anastomoses les plus souvent indiquées sont: l'anastomose du nerf cardiaque supérieur avec le rameau cardiaque laryngé, avec le nerf cardiaque moyen et avec les différentes branches du pneumogastrique. Quand *le ganglion de Wrisberg est présent, le nerf cardiaque supérieur, plus souvent celui du côté gauche* (!), *aboutit à ce ganglion.*

Il serait bien à propos de mentionner les variations du ganglion Wrisbergi Ce ganglion manque assez souvent. Lorsqu'il existe, il est situé dans la concavité de la crosse de l'aorte, tout près de la division de l'artère pulmonaire contre le ligament artériel. Parfois le ganglion est tout à fait caché derrière la crosse de l'aorte; une autrefois il est bien visible étant situé un peu plus bas. Laignel-Lavastine a reconnu trois

types différents du système de Wrisberg, ce que je puis confirmer de ma part. 1. Il existe un ganglion unique 16 fois sur 62 (forme conglomérée) ; 2. la forme macroscopique disséminée (5 fois sur 25) est caractérisée par la présence des petits ganglions d'un millimètre environ, disséminés dans le plexus et jusque sur la face antérieure de l'artère pulmonaire ; 3. la forme microscopique disséminée comporte de petits nids cellulaires le long des filets nerveux, l'examen histologique est nécessaire pour les mettre en évidence.

Schumacher définit *nervus cardiacus medius*, sans raisons suffisantes, à mon avis, comme étant souvent le plus fort. Ce nerf peut manquer. Le plus souvent il naît du ganglion moyen par une racine ou plus rarement par deux racines. Quand le ganglion moyen n'existe pas, le nerf moyen prend son origine du tronc du sympathique près du point où se trouverait le ganglion (Rauber). Parfois on trouve sur le nerf déjà dans la cavité thoracale, un petit ganglion d'une forme ovalaire (Arnold). Ce ganglion peut être situé dans la région cervicale (moi) tout près de l'origine du nerf moyen. Le nerf donne assez souvent des anastomoses avec les rameaux cardiaques du pneumogastrique, ainsi qu'avec le nerf cardiaque supérieur et le nerf cardiaque inférieur (sympathiques). On signale aussi que le nerf moyen se confond souvent avec le nerf cardiaque inférieur et de cette fusion résulte — le nervus crassus. Schumacher a vu un cas où du côté droit tous ces trois nerfs cardiaques etaient fusionnés et allaient se jeter dans le plexus profond. Cette observation est bien d'accord avec mes recherches et avec ma conception des nerfs du coeur (voir plus bas). En général, tous les auteurs reconnaissent que le nerf moyen descend immédiatement derrière l'artère carotide et aboutit au plexus cardiaque profond en avant ou en arrière de l'artère sousclavière. Jaques croit que tous les rameaux cardiaques droits du tronc sympathique vont au plexus profond, tandis que les rameaux gauches vont au plexus superficiel. Cette opinion isolée est la seule que je trouve parfaitement juste.

Nervus cardiacus inferior et nervus cardiacus imus. Nous avons déjà eu l'occasion d'indiquer que certains auteurs reconnaissent l'existence du n. cardiacus imus, alors que les autres la nient. En tout cas, il est le moins constant de tous les nerfs cardiaques sympathiques. Le fait de l'existence de ce dernier nerf est assez intéressant au point de vue de l'anatomie comparée, puisque chez les animaux inférieurs on trouve des nerfs cardiaques prenant leur origine des ganglions thoracaux supérieurs jusqu'au sixième ganglion. C'est ainsi que Schumacher a vu chez les artiodactyla les rameaux naissant du 4 ganglion (auchenia lama), du 5-ième ganglion (capra hircus). Chez l'homme le ganglion le plus inférieur qui émet un rameau cardiaque c'est le premier ganglion thoracal. Si nous avons devant nous le soi — disant ganglion stellatum qui résulte de la fusion du ganglion cervical inférieur et du premier ganglion thoracal, alors le nerf cardiaque inférieur et cardiacus imus naîssent ensemble. Chacun de ces deux nerfs peut prendre

son origine par une ou par deux racines du ganglion correspondant. On voit souvent les anastomoses des nerfs cardiaques inférieur et imus avec le nerf cardiaque moyen. L'un et l'autre peuvent aboutir au nerf récurrent. Le plus souvent tous les quatre nerfs ou les deux (si les nervi imi manquent) vont au plexus profond, mais parfois le nerf cardiaque inférieur gauche, d'après Schumacher, va tout entier au plexus superficiel. L'instabilité du nerf cardiaque inférieur gauche a été déjà indiquée par Sappey, en ce sens que ce nerf va tantôt au plexus superficiel, tantôt au plexus profond.

Schumacher en examinant tous les nerfs cardiaques sympathiques tire la conclusion qu'aucun de ces nerfs n'est constant. Si l'un ou plusieurs d'entre eux font défaut, ceux qui restent sont relativement plus développés du même côté. Or, Schumacher se refuse d'accepter l'opinion de Cruveilhier, d'après laquelle tous les nerfs du coeur (les rameaux du pneumogastrique ainsi que les nerfs sympathique de deux côtés) se conpensent réciproquement.

Le plexus cardiaque superficiel d'après Schumacher est constitué par les nerfs qui passent sur la face antérieure de la crosse de l'aorte, c'est à dire: le nerf cardiaque supérieur gauche, plus rarement le nerf cardiaque moyen gauche, tout entier ou seulement une partie de ses fibres, et parfois le nerf cardiaque inférieur gauche avec le nerf cardiaque imus gauche; par contre c'est un cas exceptionnel que les nerfs cardiaques droits prennent part à la formation de ce plexus.

Le plexus cardiaque profond est formé principalement par tous les nerfs du côté droit et quelquefois le nerf cardiaque moyen gauche et les nerfs inférieurs gauches (plus souvent) y prennent part aussi. Quant à la valeur physiologique de ces nerfs, l'auteur croit que la plus grande partie de leurs fibres est représentée par les „nervi accelerantes". Les données des auteurs en ce que concerne les territoires des ramifications terminales des nerfs cardiaques sympathiques sont extrémement insuffisantes et vagues. C'est seulement Schumacher qui donne des indications quelque peu précises . . Notamment dans un cas il a observé le nerf cardiaque moyen et le nerf cardiaque inférieur gauches qui, après avoir passé sur la face postérieure de la crosse de l'aorte et abouti dans la région du plexus cardiaque profond, cheminaient séparément des rameaux droits; Schumacher a réussi a démontrer que ces nerfs — en arrière du rameau gauche de l'artère pulmonair entre l'auriculum gauche et les veines pulmmonaires — se dirigeaient vers le ventricule gauche ce qui est conforme aux observations sur les nerfs accélérants gauches chez la plupart des animaux. Une partie insignifiante des susdits nerfs allait à la région du sillon longitudinal antérieur. C'est aussi dans ce cas que les nerfs cardiaques droits cheminaient — entre l'origine de l'aorte et celle de l'artère pulmonaire — vers le ventricule droit, tandis que les rameaux du plexus profond se dirigeaient vers le sillon longitudinal antérieur. Dans un autre cas de Schumacher, les rameaux du

nerf sympathique gauche passaient sur l'atrium gauche vers le ventricule droit. En somme, Schumacher est tout à fait disposé à reconnaître l'innervation de l'atrium et du ventricule droits par les rameaux droits et celle de l'atrium et du ventricule gauch par les rameaux gauches. quoiqu'il signale que la présence du plexus fait un grand obstacle à la démonstration de cet avis au moyen de la méthode de préparation.

La description des planches.

Nous devons maintenant examiner les données anatomiques que j'ai obtenues par la dissection des cadavres traités de la manière susindiquée. Ces matériaux concrets nous servent de base sur laquelle nous pouvons appuyer notre conception des choses à étudier. Je donne ici la description détaillée de douze pieces dessinées par moi-même et mon élève M. Kallistov, jadis étudiant, à présent docteur en medecine. Toutes les planches ont été fait d'aprèse nature et en grandeur naturelle.

Cadavre A. Tab. I.

Côté gauche. L'artère carotide primitive est sectionnée et le bout supérieur rejeté en haut. Le nerf pneumogastrique ne donne aucune branche au cou. Le récurrent naît normalement près du bord inférieur de la crosse de l'aorte. C'est au dessous de l'origine du récurrent que le pneumogastrique donne un nombre de rameaux — rami cardiaci inferiores et rami oesophagei: 1. à la branche gauche de l'artère pulmonaire (n'est pas à voir sur la planche) ; 2. à la branche gauche ; 3. rameaux oesophagiens — quatre gros et quelques grèles, qui descendent le long du bord gauche de l'oesophage.

Tronc sympathique. Le ganglion supérieur très long, fusiforme; de sa face antérieure part un rameau qui descend en bas, s'anastomose avec le récurrent par des filets très gros et se place ensuite sur la face antérieure de la crosse de l'aorte entre la carotide primitive gauche et l'artère sousclavière gauche. C'est le nerf cardiaque supérieur. A la moitié de la distance entre le ganglion supérieur et le ganglion moyen du tronc sympathique se détache une branche anastomotique qui va jusqu'au nerf cardiaque supérieur.

Le ganglion moyen, petit, de forme triangulaire, donne naissance au nerf cardiaque moyen qui se dirige en bas vers l'origine de l'artère sousclavière gauche, puis passe sur la face antérieure de la crosse de l'aorte. On voit sur cette planche-ci un vaste plexus bien compliqué qui est constitué par le récurrent, par le tronc sympathique, le nerf cardiaque supérieur et le nerf cardiaque moyen. C'est le plexus cardiaque gauche ou plutôt la partie supérieur de celui-ci d'après notre terminologie. Les rameaux efférant de ce plexus vont se dissiper sur l'artère pulmonaire et sa branche

gauche. Au dessus de l'artère souclavière, on voit un ganglion qui émet une branche à l'artère carotide primitive. Près de l'artère souclavière, le nerf cardiaque moyen forme une anse qui embrasse cette artère en lui donnant de minces ramuscules. C'est aussi le tronc sympathique qui fait une anse tout autour de l'artère souclavière, c'est ce qu'on voit clairement au point où le pneumogastrique croise cette artère. Tant du nerf cardiaque supérieur que du plexus naîssent les rameaux pour la glande thyroïde. Du plexus cardiaque sort un filet grèle qui descend le long de la face antérieure de la trachée au plexus prétrachéal (plexus de la bifurcation d'après ma terminologie). *Le ganglion sympathique supérieur* n'est pas disséqué.

Cadavre A. Tab. II

Côté droit du cadavre. De ce côté l'artère anonyme est sectionnée et rejetée latéralement de façon qu'elle est appliquée sur le muscle scalène antérieure, la veine jugulaire et le pneumogastrique. Le nerf récurrent se sépare du vagus en forme d'anse, d'où résulte un triangle. De l'ange supérieur et médiane de ce triangle part le nerf récurrent qui donne des rameaux à la trachée et à l'oesophage. De l'angle inférieur descend sur la face antérieure de la trachée une grosse branche pourvue d'un ganglion, qui en bas prend part à la formation du plexus cardiacus bifurcationis; sur ces ramifications grèles on voit aussi des ganglions. Cette branche correspond aux rami cardiaci medii des auteurs. Le n. récurrent s'anastomose avec le nerf sympathique, mais en ce cas le „plexus récurro-sympathique" est peu prononcé. L'anse d'Onodi est forte encore de ce côté-ci. Le ganglion sympathique supérieur est fusiforme, beau, plus petit que du côté gauche. En haut du ganglion supérieur une anastomose va au nerf récurrent. Du pôle inférieur du ganglion supérieur naît le nerf cardiaque supérieur qui se dirige au plexus cardiaque. Au dessous du ganglion sympathique supérieur le tronc sympathique prend une forme bien singulière, celle d'une grèle anastomose avec une anse sympathique qui embrasse l'artère souclavière et qui semble être constituée par le nerf cardiaque moyen. Ce dernier se dessine comme cheminant parallélement au nerf cardiaque supérieur, latéralement à celui-ci. C'est du nerf cardiaque moyen que partent deux anses qui embrassent l'artère souclavière: la première anse plus proche du n. cardiaque supérieur, après s'être approchée tout près de lui, s'anastomose avec lui par une branche très courte et puis se prolonge en bas en qualité du tronc du nerf cardiaque moyen. La seconde anse part du nerf cardiaque moyen un peu au dessous de l'origine de la première anse et se dirige presque verticalement vers l'artère souclavière. Là où cette anse embrasse l'artére souclavière elle reçoit cette fine anastomose qui est en réalité le prolongement du tronc sympathique. Le ganglion sympathique moyen n'existe point. Le nerf cardiaque moyen, pourvu d'un

ganglion considérable, se dirige vers la face dorsale de l'aorte. Une branche sortant du ganglion du nerf moyen va à la trachée. Le ganglion inférieur est bien développé; il se confond avec le premier ganglion thoracal, c'est à dire nous avons le soi-disant ganglion stellatum. En somme, la disposition du tronc sympathique dans ce cas est très singulière, jamais vue jusqu'à présent par moi.

Cadavre B. Tab. III.

Côté droit. Ici le nerf phrénique a cette particularité qu'il donne de gros rameaux à la plèvre médiastinale au niveau de la bifurcation de la trachée. Le ganglion sympathique supérieur, de petites dimensions, émet quatre branches. 1. le prolongement du tronc sympathique même, qui s'étend en bas, forme une anse autour de l'artère vertébrale et aboutit au ganglion inférieur (ici nous avons un ganglion stellatum de dimensions 6×3 *mm*). 2. le second rameau du ganglion supérieur c'est le nerf cardiaque supérieur qui émerge par deux racines — une racine du pôle inférieur du ganglion, l'autre racine part de l'anastomose de ce ganglion avec le pneumogastrique. 3. le troisième rameau du ganglion — c'est l'anastomose avec le pneumogastrique que nous venons de mentionner. 4. le quatrième rameau — c'est une mince anastomose avec le nerf récurrent; elle aboutit au récurrent juste au point où ce dernier se cache sous le bord postérieur de la glande thyroïde. Au niveau de l'art. thyréoïdienne inférieure le tronc sympathique émet deux rameaux. 1. un rameau anastomotique qui va à l'anastomose entre le nerf cardiaque supérieur et le nerf récurrent; 2. l'autre rameau sort par deux racines de telle façon qu'à travers l'anse triangulaire formée par le tronc sympathique et ces deux racines passe l'artère thyréoïdienne inférieure. Ce rameau va au nerf cardiaque supérieur et donne une courte anastomose au nerf récurrent. On peut considérer ce rameau comme le nerf cardiaque moyen qui se fusionne avec le nerf cardiaque supérieur, ce qui arrive très souvent du côté droit.

Le nerf pneumogastrique. Nous avons déjà indiqué que ce nerf donne une anastomose considérable au ganglion supérieur et que de cette anastomose part une racine du nerf cardiaque supérieur. Le nerf récurrent prend son origine du pneumogastrique par deux racines: une grosse racine qui va qui vers le bord postérieur de la grande thyroïde, et une autre racine, grêle, part du vagus un peu plus haut (juste au point ou l'on voit sur la planche le pneumogastrique tiré par une ficelle). Vers le bas du nerf récurrent part un rameau d'une épaisseur presque égale à celle du récurrent même-nervus cardiacus medius qui reçoit encore à son origine une mince branche complémentaire du tronc du pneumogastrique et se dirige vers le plexus bifurcationis. Le tronc pneumogastrique en descendant donne des rameaux à la trachée et à l'oesophage au niveau du bord supérieur de la crosse de

l'aorte. Un peu au dessous de ces rameaux, du bord latéral du pneumogastrique part un rameau (*a*) qui chemine en bas et latéralement sur le bord supérieur de la bronche droite et qui pénetre de derrière dans le rameau droit de l'artère pulmonaire. Au dessus de ce dernière, en sortant du bord latéral du pneumogastrique, part aussi une branche considérable descendante qui reçoit du rameau (*a*) une forte anastomose d'où résulte une longue anse triangulaire. Le prolongement du sommet de cette anse c'est la branche qui innerve le rameau droit de l'artère pulmonaire et une veine pulmonaire. Tous les rameaux qui partent du pneumogastrique au dessous de l'origine du récurrent, sont des rameaux cardiaques inférieurs du pneumogastrique. Dans le cas présent nous voyons aussi le „plexus recurro-sympathique", dans la formation duquel prennent part: le nerf récurrent, le tronc sympathique, le nerf cardiaque supérieur et le nerf cardiaque moyen.

Le nerf cardiaque supérieur. Nous avons vu que ce nerf prend son origine par deux racines: 1. du ganglion supérieur et de l'anastomose entre ce ganglion et le pneumogastrique. En descendant, le nerf cardiaque supérieur donne dans la direction médiane une forte anastomose au récurrent. A cette anastomose aboudit une autre anastomose au point du tronc sympathique ou devrait être placé le ganglion sympathique moyen. Encore plus bas, le nerf cardiaque supérieur reçoit du tronc sympathique la branche que nous jugeons être le nerf cardiaque moyen. Ayant reçu le nerf cardiqaue, moyen le tronc nerveux se dirige en bas et médialement, s'anastomose deux fois avec le récurrent et va à la face dorsale de la crosse de l'aorte où il se ramifie. Au niveau du bord supérieur de l'artère pulmonaire, le tronc nerveux donne un rameau à cette artère. Du bord médian du nerf cardiaque supérieur émerge un ramuscule qui se place sur la face antéro-latérale de la trachée et disparaît sous le bord inférieur de la glande thyroïde. La dissection a montré que les ramifications terminales de ce ramuscule pénetrent dans le tissu même de cette glande. Chemin faisant ce ramuscule donne des nerfs à la trachée. La grosse branche qui part en bas du récurrent descend en arrière de l'art. pulmonaire et prend part à la formation du plexus cardiaque de la bifurcation. On peut bien remarquer sur la planche que l'auriculum dextrum cordis reçoit ses nerfs du long rameau du côté gauche qui passe en avant de la racine de l'aorte.

Cadavre B. Tab. IV.

Côté gauche. Le nerf phrénique donne en deux points des rameaux au péricarde. *Le n. pneumogastrique* donne origine au nerf laryngé supérieur, qui sort du tronc du vagus par deux racines. Après avoir formé un tronc unique, le nerf laryngé supérieur se divise aussitôt en deux branches presque du même calibre: 1. la première branche—ramus internus—pénètre dans le larynx; 2. la seconde branche—inférieure—pénètre dans la

glande thyroïde en s'anastomosant largement par un de ses rameaux avec un rameau du récurrent, d'où résulte l'anse d'Onodi (Galien). Cette anse, d'après nos recherches, est une anastomose àpeu près constante. Quelque peu en bas du tronc du pneumogastrique se détache un rameau très grêle et très long qui se dirige en bas et médialement et se place sur la face antérieure de la crosse de l'aorte, entre l'artère anonyme et l'artère carotide primitive gauche, se ramifie ici et puis se cache sous le bord inférieur de la crosse de l'aorte. *Ce rameau-ci ne donne pas de filets nerveux à l'aorte.* Au niveau de la branche gauche de l'art. pulmonaire, une forte branche du pneumogastrique entre dans l'épaisseur des parois de cette artère. C'est le nerf de l'artère pulmonaire typique. Le nerf récurrent prend son origine de règle. *Le tronc sympathique.* Le ganglion sympathique supérieur est grand et long (jusqu'à 8 *mm* de diamètre). Immédiatement au dessous de ce ganglion, se détache du tronc sympathique le nerf cardiaque supérieur qui reçoit encore une anastomose du tronc et forme en ce point-ci un petit ganglion (2 *mm*). On peut supposer que cette anastomose représente le nerf cardiaque moyen. Deux rameaux partent du susdit petit ganglion et se dirigent en bas 1. le premier rameau latéral prolonge le trajet du nerf cardiaque supérieur et disparaît derrière le bord supérieur de la crosse de l'aorte ; 2. le second rameau—médial—chemine vers le nerf récurrent et donne chemin faisant une très mince branche descendante sur la face antérieure de la crosse de l'aorte, entre l'art. sousclavière gauche et art. carotide primitive gauche, et puis se cache sous la crosse de l'aorte. Nous perdons de vue le nerf cardiaque supérieur parce qu'il se cache derrière la crosse de l'aorte juste au point où l'artère sousclavière prend son origine. Le tronc sympathique un peu au dessus du commencement de l'art. vertébrale forme un grand ganglion (ganglion sympathicum inferior), de près de 8 *mm* d'épaisseur, duquel partent les nombreux rameaux suivants: 1. le nerf vertébral, c'est le rameau le plus fort qui chemine avec l'art. vertébrale dans le canal transversal ; 2. d'autres rameaux minces qui se perdent dans le lâche tissu cellulaire ; 3. un rameau supérieur penètre dans le muscle scaléne antérieur à son bord médial. On voit ce dernier rameau sur notre planche latéralement au tronc de l'art. vertébrale. Au-dessus du ganglion inférieur, le tronc sympathique se divise en deux branches qui embrassent l'art. sousclavière gauche, à savoir: 1. un rameau médial qui se cache derrière l'art. sousclavière et apparaît de nouveau sur la face antérieure de la crosse de l'aorte immédiatement à gauche du commencement de l'art. sousclavière ; ensuite ce rameau chemine sur la face antérieure de l'art. pulmonaire, en distribuant des ramuscules au péricarde et aux parois de la branche gauche de l'art. pulmonaire et en s'anastomosant avec le tronc du pneumogastrique. Puis ce rameau se dirige à droite, parvient jusqu'à l'auriculum droit qu'il innerve ; il donne chemin faisant des rameaux au péricarde ; 2. un rameau latéral qui sort du ganglion sympathique inférieur embrasse l'art. sousclavière et revient au même ganglion en

passant immédiatement à droite du tronc de l'art. vertébrale. Sur notre planche on v'oit bien ce rameau pendant tout son trajet du bord supérieur de l'art. sousclavière jusqu'au ganglion. On voit aussi clairement le nerf récurrent dans toute son étendue au-dessus de l'art. sousclavière ; nous avons parlé plus haut de l'anastomose de ce nerf avec un rameau partant du ganglion du nerf cardiaque supérieur ainsi que de l'anse d'Onodi. Le nerf récurrent distribue des rameaux à la trachée et à l'oesophage. En écartant fortement la crosse de l'aorte à gauche et en examinant la face postérieure de celle-ci nous avons observé ce qui suit. Au point où le nerf récurrent vient à tourner autour du bord inférieur de la crosse de l'aorte, il émet une forte branche qui se dirige en bas et médialement vers la bifurcation de la trachée au plexus cardiaque de la bifurcation. C'est le rameau cardiaque moyen des auteurs français (*m*). Tout près de l'origine de ce rameau on voit sur lui un grand ganglion rond duquel partent 4 rameaux. Schème I. Ce ganglion appartient (P. XV.) au plexus cardiaque gauche, mais je l'ai rencontré une seule fois comme un ganglion placé sur un rameau du récurrent. Les quatre rameaux de ce ganglion sont: 1. un rameau qui prolonge le trajet du nerf cardiaque moyen et va à la bifurcation de la trachée ; 2. le second rameau qui se dirige médialement directement dans l'épaisseur de la paroi de la trachée 3. le troisième rameau—latéral — est destiné à la face postérieure de l'aorte ; 4. le quatrième rameau—c'est l'anastomose avec le nerf cardiaque supérieur. Ce dernier passe dorsalement de l'art. sousclavière et distribue un grand nombre de minces rameaux à la branche gauche de l'art. pulmonaire. On sait d'après les recherches de Van-Gehuchten et Molhant que dans l'épaisseur du récurrent existe près de son origine un petit ganglion formé de cellules multipolaires. C'est un petit ganglion sympathique d'après ces auteurs, d'où se détachent en bas deux faisceaux nerveux qui se réunissent bientôt en un tronc unique: un nerf cardiaque. Ce ganglion n'est pas indépendant de la chaîne sympathique cervicale. Pendant son trajet dans la région cervicale on voit en effet fréquemment un petit faisceau de fibres de Remak s'incorporer dans le tronc du vagus. Il est plus que probable que ces fibres sympathiques vont, en partie au moins, au petit ganglion annexé à la convexité de l'anse récurrentielle (Hovelacque).

Cadavre C. Tab. V.

Côté gauche. Au niveau de la clavicule, un mince rameau du nerf sousclavier (n. subclavius) s'approche du nerf phrénique et descend parallélement à lui jusqu'au diaphragme. Ce rameau pénètre dans le diaphragme à 4 *mm* latéralement du point de l'entrée du nerf phrénique. Ainsi nous avons la duplication du nerf phrénique ou plutôt le trajet isolé de la racine du nerf qui provient du nerf souclavier. *Le pneumogastrique* émet le nerf laryngé supérieur, qu'on voit entre les deux bouts du muscle

digastrique sectionné. Tout près de son origine, le nerf laryngé supérieur émet en bas et médialement un long rameau (nerf cardiaque laryngé, le nerf depressor). Ce nerf s'anastomose bientôt avec les rameaux du ganglion sympathique supérieur, notamment de la manière que voici: le rameau le plus supérieur du ganglion va aux muscles sous-hyoïdiens et émet en arrière sous un angle aigu une branche anastomotique au rameau cardiaque laryngé; de l'autre côté du pôle inférieur du ganglion, naît une courte anastomose avec le rameau cardiaque. Un peu dessous de celle-ci, une anastomose du tronc du pneumogastrique aboutit au nerf cardiaque laryngé. En somme, nous avons devant nous le nerf cardiaque supérieur complet, le rameau cardiaque supérieur et un tronc supérieur cardiaque composé—c'est à dire constitué de toutes les trois racines (racine laryngée, racine sympathique, racine pneumogastrique). Un peu au dessus de l'art. thyroïdienne inférieure, le nerf cardiaque supérieur se bifurque en deux rameaux: 1. un rameau médian qui descend, reçoit bientôt une anastomose (*a*—sur la planche) du tronc sympathique et se cache derrière la crosse de l'aorte, 2. un rameau latéral qui reçoit aussi une forte anastomose du tronc du vagus, au-dessous du niveau du ganglion sympathique inférieur. C'est au niveau du bord supérieur de la crosse de l'aorte que ce rameau latéral se ramifie. Les branches de cette ramification passent sur la face antérieure de l'aorte et aboutissent au grand ganglion de Wrisberg (ou, comme nous préférons le nommer, le ganglion cardiacum sinistrum subarcuatum) situé immédiatement sous le bord inférieur de la crosse de l'aorte. Quant au rameau médial ci-dessus décrit, nous devons supposer que c'est un nerf cardiaque moyen et que l'anastomose (*a*) n'est autre chose que l'origine de ce nerf (sa partie initiale) et la partie initiale du rameau médial—c'est sa racine naissant du pneumogastrique. Le nerf cardiaque moyen ainsi formé se dirige dorsalement de la crosse de l'aorte au plexus cardiaque „profond" (c'est à dire „droit" d'après notre conception). *Le pneumogastrique*, outre les deux anastomoses décrites ci-dessus, ne donne point de rameaux et passe comme d'habitude sur la face ventrale de la crosse de l'aorte. *Le tronc sympathique.* Le ganglion sympathique supérieur est très long; son épaisseur maximum est de 5 *mm*. Du milieu de ce ganglion, se détache un rameau qui reçoit une anastomose du nerf laryngé supérieur et une autre anastomose du rameau cardiaque laryngé; ce rameau va aux muscles de l'os hyoïdien. Près du pôle inférieur du ganglion, naît une anastomose avec le rameau cardiaque laryngé. La partie inférieure du ganglion s'amincit très graduellement et c'est ainsi que le ganglion moyen, très petit, se confond par son bout supérieur avec le pôle inférieur de celui-ci. De ce petit ganglion moyen se détache en haut et latéralement un gros rameau proprement musculaire qui pénètre dans le m. longus capitis et colli; un autre va à l'artère ascendante du cou. En direction médiane se détache du ganglion l'anastomose que nous traitons comme la partie initiale du nerf cardiaque moyen. Encore plus bas du tronc sympathique, part une

anastomose avec le rameau latéral du tronc cardiaque supérieur. C'est avec cette anastomose que du tronc sympathique prend naissance un long rameau qui disparaît derrière la crosse de l'aorte. On peut le traiter aussi comme un nerf cardiaque moyen. Le ganglion sympathique inférieur est situé au niveau de truncus thyreocervicalis. Ce ganglion émet deux belles anses qui embrassent l'art. thyroïdienne inférieure. Plus bas, un fort nerf vertébral se détache du ganglion et entre aussitôt avec l'artère du même nom dans le canal transversal. L'artère sousclavière, elle aussi, est embrassée par une anse du nerf sympathique. Du pôle inférieur du ganglion partent deux rameaux qui disparaissent dorsalement de l'aorte; ce sont les nerfs cardiaques inférieurs. Nous étudierons plus tard leur fusion avec le rameau moyen (du récurrent) et leur trajet ultérieur.

Le nerf récurrent. On le voit sur la planche au-dessus de la crosse de l'aorte, tout près de la section de l'art. carotide primitive gauche. Ce nerf monte en haut et médialement et donne un long rameau qui se dirige verticalement au tronc de l'art. thyroïdienne inférieure, et des rameaux à l'oesophage et à la trachée. Ensuite le récurrent se ramifie et disparaît derrière la glande thyroïde. L'anse d'Onodi est peu developpée. Après la section de la crosse de l'aorte, nous avons trouvé que le récurrent au niveau du ganglion sympathique inférieur émet en bas et médialement une très grosse branche—ramus cardiacus medius. Ce nerf en descendant se divise en deux rameaux (Planche VIII.): 1. le rameau droit qui descend devant la trachée et la bronche droite, en se divisant à son tour en deux rameaux secondaires, dont l'un aboutit au ganglion bifurcationis et l'autre, chemine sur la paroi postérieure de la branche droite de l'art. pulmonaire en fournissant à cette paroi des filets nerveux; 2. le rameau gauche—c'est le rameau anastomotique avec lequel se confondent les nerfs cardiaques inférieurs (au nombre de deux, qui sortent du ganglion sympathique inférieur et que nous avons vus disparaître derrière la crosse de l'aorte. De cette fusion de la branche du rameau cardiaque moyen (du récurrent) et de deux nerfs cardiaques inférieurs résulte une longue branche nerveuse qu'on voit sortir de sous le bord inférieur de la crosse de l'aorte.

Les ganglions situés sous la crosse de l'aorte. Près du bord inférieur de la crosse de l'aorte on voit deux ganglions: un gauche I. et un droit II. Les rameaux efférents du ganglion gauche sont: *a*) le tronc cardiaque supérieur bifurqué et *b*) deux rameaux qui sortent de sous l'aorte et qui sont le nerf cardiaque moyen gauche. Les rameaux efférents sont: une grosse branche qui va sur la face antérieure de l'art. pulmonaire et se divise en deux rameaux: 1. un rameau qui reçoit l'anastomose des rameaux efférents du ganglion droit et qui disparaît entre l'art. pulmonaire et l'aorte; 2. un autre rameau qui se jette sur la face antérieure du bulbe de l'aorte, s'anastomose aussi avec un rameau efférent du ganglion droit, après quoi il disparaît dans le myocarde sous une branche de l'art. coronaire droite.

Le ganglion II. ou droit. On ne voit pas de rameaux afférents de ce ganglion. Les rameaux efférents sont au nombre de deux: 1. un premier rameau gros (1·5 *mm*) passe entre le bulbe de l'aorte et la racine de l'art. pulmonaire et disparaît en cet endroit. Du coté gauche de ce gros rameau sortent les deux branches par un tronc unique dont la branche gauche est l'anostomose avec le rameau efférent du ganglion gauche; la branche droite se divise en descendant en deux rameaux: 1. un rameau qui pénetre dans le myocarde avec un semblable ramuscule du gaglion gauche sous *l'art. coronaire droite* et un ramuscule (*b*) qui innerve l'oreillette droite. 2. Le second rameau du ganglion droit forme un plexus avec les rameaux de celui-ci et ceux du ganglion gauche et chemine avec l'art. coronaire droite en lui fournissant des filets nerveux. Puis ce rameau s'enfonce dans le myocarde.

Sur la face antérieure de l'art. pulmonaire, immédiatement à gauche du ganglion I. un rameau nerveux sort de sous l'aorte (*e*) sur la planche et se divise bientôt en deux branches dont la branche gauche contourne le bord gauche de l'art. pulmonaire et se perd de vue. La branche droite flexueuse descend jusqu'à la racine de l'art. pulmonaire et là se divise en deux rameaux: le rameau (*g*) flexueux descend sur la face antérieure du ventricule droit et ses ramifications terminales pénetrent dans le myocarde et le rameau (*f*) qui va à l'art. coronaire droite descend parallélement à celle-ci et se plonge dans le myocarde.

Cadavre C. Tab. VI.

Côté droit. Sur cette préparation la crosse de l'aorte est sectionnée, son bout proximal rejeté en bas, son bout distalà gauche. La branche droite de l'art. pulmonaire est sectionnée et rejetée à droite, tandis que la branche gauche avec la partie initiale de la branche droite sont retirées à gauche. *Le pneumogastrique* donne en haut une grosse anastomose avec le grand hypoglosse. Près de l'origine du nerf laryngé supérieur s'en détache en bas un rameau cardiaque laryngé (radix laryngea rami cardiaci superioris s. depressoris). Le ramus cardiacus laryngeus reçoit deux anastomoses du ganglion sympathique supérieur (radix sympathica rami cardiaci super. s. depressoris). En descendant au des sous du niveau de l'art. thyroïdienne inférieure, le nerf depressor reçoit sa troisième racine, c'est à dire celle du pneumogastrique. Ensuite le nerf se dirige en bas et médialement et se confond avec les deux autres nerfs. De cette confusion résulte un gros tronc le soi-disant nervus crassus, dont la constitution sera élucidée plus tard. Plus en bas jusqu'à l'origine du récurernt, le pneumogastrique n'émet point de rameaux. Le nerf récurrent émerge double. Cette anomalie a été déjà décrite par Krause, et Meckel indique qu'elle ne se rencontre pas du côté droit, c'est ce que confirme mon cas. Le récurrent supérieur se

dirige vers le point d'entrée dans la thyroïde des branches de l'art. thyroïdienne inférieure, là il se bifurque. Le récurrent inférieur chemine vers le pôle inférieur de la glande en donnant trois fortes branches à la trachée. Au dessous de l'origine du récurrent inférieur, le pneumogastrique donne encore une grosse branche à la trachée et disparaît derrière la bronche droite.

Le tronc sympathique. Le ganglion sympathique supérieur, subtil et long, donne deux anastomoses au rameau cardiaque laryngé susmentionné C'est un peu au-dessus du niveau de l'art. thyroïdienne inférieure que le tronc sympathique porte un ganglion sympathique moyen, grand, d'une forme ovalaire. Ce rameau émet les deux rameaux suivants. Du pôle supérieur ainsi que du pôle inférieur émergent deux nerfs dont le supérieur est beaucoup plus mince que l'inférieur. On doit considérer ces deux nerfs comme des nerfs cardiaques moyens. Les deux nerfs se confondent avec le depressor en un point où l'on voit un petit ganglion. Du pôle supérieur du ganglion moyen part en arrière et en haut une branche considérable destinée aux muscles et qui disparaît près du bord médial mm. longi capitis et colli. Le ganglion sympathique inferieur (ou plutôt ganglion stellatum) est à moitié caché sur notre planche par l'art. sousclavière. Une anse du tronc sympathique embrasse l'artère sousclavière; et le ganglion sympathique inférieur prend part à la formation de cette anse en formant la partie médiane de celle-ci. On voit le nerf vertébral aller parallélement à l'art. vertébrale: ce nerf prend son origine de la face latérale du ganglion stellatum, et cette origine même est cachée par la partie initiale de l'art. thyroïdienne inférieure. Au dessus de l'art. thyroïdienne inférieure, le tronc sympathique émet encore un rameau qui passe médialement de cette artère et aboutit au ganglion stellatum de telle façon que l'art. thyroïdienne passe dans une anse du tronc sympathique. Le n. crassus se dirige en bas et médialement et s'épaissit en forme d'un long ganglion fusiforme (confirmé histologiquement). Ensuite le nervus crassus se rétrécit de nouveau et se jette d'en haut dans le ganglion que nous avons déjà décrit pendant notre étude du côté gauche du cadavre et auquel nous avons donné le nom de — ganglion droit (II.) ou ganglion cardiacum subarcuatum dextrum. Les rameaux efférents du ganglion allaient ensemble avec l'artère coronaire gauche comme nous l'amontré l'étude détaillée (voir le schéma). *Ganglion bifurcationis.* Tout près de la bifurcation de la trachée, on voit un ganglion rond dans lequel se jettent d'en haut deux forts rameaux qui ont contourné la face latérale gauche de la trachée. Ces rameaux sans doute viennent des nerfs gauches. L'un de ces rameaux – droit – émerge du rameau cardiaque moyen (branche du n. récurrent gauche); l'autre rameau – gauche – n'est qu'une branche du nerf cardiaque moyen qui s'anastomose largement avec le rameau cardiaque moyen (nervi recurrentis). Ainsi donc, ces deux rameaux afférents du ganglion sont constitués pour la plupart, ou peut être totalement, par des fibres du récurrent gauche. Les rameaux

éfférents du ganglion ont été étudiés le plus scrupuleusement possible. Les rameaux supérieurs innervent la branche droite de l'art. pulmonaire, les rameaux inférieurs innervent: 1. l'atrium droit, septum atriorum, un peu la paroi supérieure de l'atrium gauche, mais—chose principale—ils donnent des filets nerveux pour la veine cave supérieure *et des filets qui vont au noeud de Keith-Flack*; c'est ce qu'a montré l'étude de l'objet à l'aide d'une lentille binoculaire et l'examen histologique. C'est ainsi que le noeud de Keit-Flack est soumis à l'action directe des rameaux cardiaques moyens (du nerf récurrent gauche). D'où l'on peut comprendre cette observation clinique—l'arrêt de l'activité du coeur sous l'influence des impulsions mécaniques sur le larynx et, par conséquent, sur le récurrent avec ses branches. D'après Flack, ce nodulus sino-auricularis contient, outre les fibres musculaires particulières, des cellules ganglionnaires qui sont en connexion avec les fibres du vagus et du sympathique, des fibres nerveuses multiples qui viennent de subepicardium et auxquelles sont annexées aussi les cellules ganglionnaires. Thoul a trouvé que le nodulus sino—auricularis était réuni avec nodulus atrio—ventricularis par des fibres musculaires particulières. L'extirpation du noeud de Keith-Flack provoque ou l'affaiblissement considérable de l'action du vagus sur l'activité du coeur ou même cette action devient nulle. On croit jusqu'à présent que le vagus droit ainsi que le vagus gáuche ont une grande influence chronotropique sur le noeud sino-auriculaire. C'est le tissu de ce noeud qui apparaît comme un point d'origine de l'excitation et le point de la régularité de la fréquence des battements du coeur. On a trouvé le nodulus sino-auricularis chez tous les mammifères et chez quelques oiseaux. C'est précisement de ce noeud qu'on peut agir le plus facilement sur la fréquence des battements du coeur et ce noeud apparaît dans les expériences comme ultimum moriens. Se basant sur les expériences, Tigerstedt exprime l'opinion que le noeud sino-auriculaire est le point du plus grand automatisme du coeur. L'atrium gauche ne se contracte jamais automatiquement (Erlanger, Blackmann, Hering).

Cadavre C. Tab. VII.

Cette planche représente quelques détails concernant les nerfs profonds et les deux ganglions (droit et gauche I., II.). Nous commençons notre description par le ganglion gauche. On voit du côté gauche le rameau cardiaque gauche bifurqué, et, réuni avec le nerf cardiaque supérieur, aboutir au ganglion gauche; le nerf cardiaque moyen avec les branches du rameau moyen (n. recurrentis) qui sort a lui annexé et se jette d'en haut dans notre ganglion. On voit clairement l'anastomose entre les rameaux moyens (nervi recurrentis) et le nerf cardiaque moyen. C'est ainsi que le ganglion Wrisbergi (notre ganglion gauche) reçoit les quatre rameaux. Ses rameaux éfférents sont: les rameaux qui entrent dans

la branche gauche de l'art. pulmonaire au nombre de trois. 1. Un rameau qui se place sur la face antérieure de l'artère et s'y ramifie; 2. un rameau qui pénètre dans la paroi supérieure de l'artère; 3. un rameau qui pénètre dans la paroi postérieure. Ce rameau long qui se détache du ganglion et se dirige à droite et en bas s'anastomose avec les rameaux du ganglion droit et donne un ramuscule à la paroi postérieure de l'artère pulmonaire. Le ganglion est tiré par une ficelle de telle manière qu'il se place sur la veine cave supérieure. On voit que le nervus crassus aboutit d'en haut à ce ganglion. Ce nerf est un collecteur des nerfs supérieurs et des nerfs moyens du côté pour droit. Deux rameaux (droits) du ganglion vont à l'art. coronaire droite l'accompagner; les deux autres rameaux (gauches) se dirigent vers l'art. coronaire gauche et suivent son trajet (c'était impossible de représenter ce fait sur notre planche). Le rameau gauche de ces derniers rameaux donne des filets nerveux à la face postérieure de la crosse de l'aorte. Le second rameau du ganglion (en comptant de droite à gauche) reçoit une anastomose considérable du ganglion gauche (Wrisbergi). Suivons maintenant le récurrent avec ses branches. A partir du bord inférieur de la crosse de l'aorte jusqu'à la face antérieure de la trachée (comme on le voit sur la planche), il ne donne aucune branche. Ce n'est qu'en ce point qu'on voit une branche se détacher de lui; l'épaisseur de cette branche est presque égale a celle du récurrent lui même. C'est le rameau cardiaque moyen En haut le récurrent donne une branche à la trachée et deux branches à l'oesophage et une branche encore à l'artère thyroïdienne inférieure. Suivons le rameau cardiaque moyen (du récurrent). Le premier rameau qui s'en détache et descend sur la face antérieure de la trachée vers la bifurcation de celle-ci c'est le rameau destiné au ganglion bifurcationis (nervi recurrentis)! En suivant le rameau cardiaque moyen à gauche du point de courbure (où il est fortement tiré à droite par une ficelle) nous le voyons s'anastomoser avec le nerf cardiaque moyen par deux courtes anastomoses. De ce point de l'anastomose deux nerfs partent en bas: 1. le nerf droit — c'est le second rameau du ganglion de la bifurcation, 2. le nerf gauche — nous le considérons comme le prolongement du nerf cardiaque moyen. En suivant le rameau cardiaque moyen encore plus loin à gauche, on voit les nerfs cardiaques inférieures aboutir à lui sous forme de trois filets échelonnés. Au-dessous du point où le rameau cardiaque moyen est tiré à gauche par la ficelle, il descend d'abord sur la face antérieure de la branche gauche de l'art. pulmonaire, ensuite sur celle du tronc de la même artère; il donne beaucoup de rameaux à la face antérieure du ventricule droit et il se confond enfin avec le plexus de l'artère coronaire droite.

Le ganglion sympathique inférieur. Parmi les nombreux rameaux de ce ganglion il faut noter les anses embrassant les artères: deux anses autour de l'art. thyréoïdienne inférieure et deux anses autour de l'art. vertébrale, une anse autour de l'art. sousclavière. Le gros nerf vertébral chemine avec l'artère du même nom.

Cadavre C. Tab. VIII.

Le schème basé sur l'étude du cadavre C et des autres cadavres semblables. Sur notre schème, le pneumogastrique et ses rameaux sont en couleur verte, le nerf sympathique et ses rameaux en couleur rose. Quand le rameaux du pneumogastrique et ceux du sympathique se confondent, ces nerfs mixtes sont colorés en couleur de cannelle. Nous commençons notre description par le côté gauche en ne présentant que la synthése des données ci-dessus décrites. Le ganglion de Wrisberg, ou ganglion cardiacum subarcuatum sinistrum, reçoit les quatre rameaux, à savoir: le tronc cardiaque supérieur bifurqué, constitué, comme nous l'avons vu, par le rameau cardiaque supérieur (du vagus) et le nerf cardiaque supérieur (du sympathique). Ces rameaux pénètrent dans le ganglion par sa face antérieure, tandis que par sa face postérieure entrent: le nerf cardiaque moyen (du gangl. symp. moyen) et une partie des fibres du rameau cardiaque moyen (nervi recurrentis). Ainsi donc le ganglion cardiaque gauche concentre en lui les nerfs supérieurs et les nerfs moyens du côté gauche (n. cardiacus superior et ramus cardiacus superior asinsi que n. cardiacus medius et ramus cardiacus medius) Et qu'est ce qu'il innerve, le ganglion gauche? Il innerve l'art. pulmonaire et émet un rameau long et fort qui forme un plexus autour de l'artère coronaire droite. Les nerfs sont disposés ici de telle façon qu'on ne peut pas cependant parler d'un „plexus" dans le sens strict de ce mot. Dans d'autres cas, la disposition des nerfs donne beaucoup plus de raisons de la considérer comme un vrai plexus, notamment quand le ganglion manque ou quand il est substitué par de petites granules multiples. La dénomination de „plexus supérieur" qui ne caractérise que sa position est mal choisie. C'est plutôt le plexus cardiaque *gauche*, un vrai foyer des nerfs gauches, le centre de l'innervation du coeur *droit*.

Le ganglion cardiaque droit ou ganglion cardiacum subarcuatum dextrum. Ce ganglion nous apparaît comme un foyer central qui concentre: le nerf cardiaque supérieur, le rameau cardiaque supérieur ainsi que le nerf cardiaque moyen et le rameau cardiaque moyen (ce dernier part dans ce cas du tronc du vagus au dessus du récurrent). Par conséquent le ganglion droit concentre les mêmes nerfs que le ganglion gauche, à savoir—les nerfs supérieurs et les nerfs moyens. Le ganglion droit émet deux rameaux minces qui accompagnent l'artère coronaire gauche et deux rameaux gros qui accompagnent l'artère coronaire droite. C'est intéressant à préciser que les rameaux du ganglion droit innervent l'aorte, tandis que ceux du ganglion gauche innervent l'artère pulmonaire. Les nerfs inférieurs gauches avec une anostomose du rameau cardiaque moyen (nervi recurrentis) forment un long rameau qui innerve la face antérieure du ventricule droit et donne un rameau à l'artère coronaire droite.

Ganglion cardiaque de la bifurcation. Ce ganglion placé un peu à droite de la ligne médiane est en totalité le ganglion des nerfs gauches. Il reçoit

ses rameaux du cardiaque moyen gauche (nervi recurrentis), du nerf cardiaque. moyen gauche et, probablement, des nerfs cardiaques inférieurs gauches. Cette formation est un ganglion du sinus veneux, c'est à dire de la partie caudale du coeur. D'après la situation de ses ramifications terminales, on pourrait désigner ce ganglion, ou éventuellement ce plexus, comme „ganglion seu plexus sinus venosi et atriorum". Nous devons encore ajouter que la disposition ci-dessus décrite est partfaitement conforme aux données de l'embryologie. Les nerfs inférieurs donnent leurs filets aux parties les plus caudales du coeur, c'est ainsi qu'ils innervent le sinus veneux, le noeud de Keith-Flack, les veines caves et en partie les atriums, tandis que les nerfs supérieurs animent le soi—disant conus arteriosus, c'est à dire l'artère aorte avec ses branches (artères coronaires) et l'artère pulmonaire. Ainsi nos recherches concordent tout à fait avec les études embryologiques de His junior.

Cadavre D. Tab. IX.

Côté gauche. Le nerf phrénique n'a rien de particulier.

Le pneumogastrique. Le nerf laryngé supérieur se divise en deux rameaux: le rameau interne et le rameau externe. Ce dernier s'anastomose largement avec une forte branche du récurrent, c'est à dire que l'anse d'Onodi est bien prononcée. Le nerf cardiaque supérieur manque absolument. Au point où le pneumogastrique croise l'artère sousclavière il émet un rameau assez considérable qui se jette dans le plexus (*w*). Ce plexus est constitué, outre le susdit rameau du pneumogastrique, par un rameau bien fort du sympathique qui émerge du ganglion sympathique moyen et forme une anse autour de l'artère sousclavière. C'est le nerf cardiaque moyen qui s'anastomose avec le récurrent. Ainsi donc nous avons dans ce cas l'absence du nerf cardiaque supérieur, le dévéloppement conpensateur du nerf cardiaque moyen, l'origine très basse du rameau cardiaque supérieur. Le ganglion cardiacum sinistrum ou de Wrisberg n'existe pas ; il est substitué par un beau plexus (*w*-sur notre planche). On voit sur notre planche que du ganglion moyen émergent deux gros rameaux qui constituent — l'un et l'autre — le nerf cardiaque moyen double. De ce plexus émergent des rameaux qui cheminent à peu près horizontalement sur la face antérieure et sur la face postérieure de l'artère pulmonaire en formant autour de son tronc un vrai plexus. Par conséquent, l'art. pulmonaire est innervée principalement par les nerfs gauches supérieurs et moyens (loi de l'innervation croisée). Le rameau inférieur du plexus *w* va directement à l'artère coronaire droite. C'est ce que nous avons observé aussi sur le cadavre C, où un fort rameau allait du ganglion Wrisbergi à la même artère (l'innervation croisée). Et qu'est ce que représente le plexus *w* constitué par un rameau du pneumogastrique et un rameau du ganglion moyen? Il est bien évident qu'il substitue le ganglion Wrisbergi en étant son homologue. En effet, ce plexus

concentre les nerfs supérieurs et les nerfs moyens quand ceux-ci existent. Nous savons bien que chez les animaux et chez l'homme aussi les fibres du rameau cardiaque supérieur peuvent descendre réunis avec le tronc du pneumogastrique dans une gaine et de ne s'en détacher qu'en bas; jusqu'à l'origine du récurrent le rameau qui émerge du pneumogastrique et se dirige au plexus cardiaque, est le rameau supérieur cardiaque. De plus, l'examen histologique du plexus *w* nous a montré des granules ganglionnaires parsemées entre les fibres nerveuses. D'autre côté, l' homologie du plexus *w* et du ganglion Wrisbergi est mise en évidence encore par ses rameaux efférents. Notamment, le plexus *w* innerve par ses rameaux efférents l'art. pulmonaire et l'art. coronaire doite, c'est à dire qu' il joue précisement le même rôle que les rameaux efférents du ganglion Wrisbergi chez le cadavre C. Donc, si le plexus a les rameaux efférents et les rameaux afférents identiques et contient par surcroit les nids de cellules ganglionnaires l'homologie de ces deux formations est démontrée.

Il est intéressant de noter que le pneumogastrique au point de l'origine du récurrent fait une anse qui embrasse la branche gauche de l'artère pulmonaire. *Le nerf récurrent,* tout en contournant le bord inférieur de la crosse de l'aorte, donne un rameau anastomotique au ganglion droit. Plus haut deux rameaux se détachent du récurrent et vont au ganglion (plexus) de la bifurcation—ce sont les rameaux cardiaques gauches prenant part à la constitution du ganglion ou du plexus de la bifurcation; par conséquent c'est le même chose que nous avons vu chez le cadavre C.

Le sympathique. Le ganglion sympathique supérieur, long et fusiforme, se rétrécit graduellement en bas. Immédiatement au dessus de l'art. thyroïdienne inférieure, un rameau se détache du tronc, passe latéralement de l'artère et aboutit au nerf cardiaque moyen, d'où résulte une anse pour l'artère thyroïdienne inférieure. Le ganglion sympathique moyen est d'une forme triangulaire. De son bord antérieur se détache le gros nerf cardiaque moyen qui reçoit une anastomose du ganglion droit et plus bas encore une branche anastomotique du plexus W. Puis le nerf moyen se dirige à l'artère coronaire droite qu'il accompagne tout le long de son trajet en l'enveloppant d'un plexus. Nous avons déjà indiqué que dans le cas où le nerf cardiaque supérieur manque, nous avons le doublement du nerf cardiaque omyen et son hypertrophie compensatrice.

Cadavre D. Tab. X.

Côté droit. Le pneumogastrique émet son premier rameau un peu au dessus de l'origine du récurrent. Ce rameau, que nous avons le droit de considérer comme le rameau cardiaque supérieur, aboutit au volumineux ganglion droit. C'est ainsi que dans ce cas tout le nervus crassus est représenté par ce rameau cardiaque supérieur et c'est pour cette raison que le

ganglion droit reçoit des rameaux différents des nerfs gauches. C'est un cas tout-à-fait exceptionnel que j'ai rencontré une seule fois. Je sents que des cas semblables ont contribué à l'interprétation erronée des faits. Un peu plus au dessous du rameau cardiaque supérieur, le nerf récurrent prend son origine du tronc du pneumogastrique. Du récurrent se détache et se dirige en bas une forte branche qui va au ganglion (ou plexus) de la bifurcation. Un peu au dessus du point où le pneumogastrique disparaît derrière la bronche droite, une branche considérable s'en détache et va au plexus de la bifurcation. On doit nommer cette branche le rameau cardiaque supérieur.

Le tronc sympathique. On voit deux ganglions—supérieur et inférieur. Le tronc sympathique forme en bas une anse autour de l'artère sousclavière et le ganglion supérieur embrasse d'une anse l'artère thyroïdienne inférieure. On voit aussi le nerf vertébrale qui disparaît bientôt avec l'artère du même nom. Le nerf cardiaque inférieur se détache du pôle inférieur, donne deux anastomoses au tronc du pneumogastrique et aboutit au plexus de la bifurcation.

Ganglion cardiacum dextrum. Nous avons déjà vu que le ganglion droit reçoit le rameau cardiaque supérieur. C'est parce qu'il ne reçoit point de fibres sympathiques des nerfs droits, qu'une forte anastomose du nerf cardiaque moyen gauche aboutit à lui (lettre *b* sur la planche). A gauche de la lettre α on voit le nerf cardiaque moyen gauche sectionné; il se dirige vers l'artère coronaire droite. Le rameau suivant qui se jette dans le ganglion droit (*d* sur la planche) c'est le rameau du pneumogastrique gauche. Nous avons signalé plus haut que le pneumogastrique gauche tout près du bord supérieur de la branche gauche de l'art. pulmonaire émet un rameau qui embrasse cette branche, et maintenant nous pouvons voir que ce rameau contourne la branche gauche (comme le récurrent contourne l'aorte) et va au ganglion droit. Du même rameau émerge un ramuscule à la branche gauche. Le ganglion droit émet deux forts rameaux efférent qui vont à l'art. coronaire gauche et à la paroi postérieure de l'aorte. Ainsi, malgré sa constitution anormale, qui dépend de la pauvreté et de l'insuffisance des nerfs droits, le ganglion droit tend à accomplir l'innervation croisée. En somme, nous avons dans ce cas anormal une transgression de la loi de l'innervation croisée, et nous comprenons bien la cause de ce phénomène — c'est l'insuffisance des nerfs droits.

Plexus de la bifurcation. Nous avons ici la même disposition que celle observée sur le ganglion gauche (Wrisbergi), c'est à dire la substitution du ganglion par un plexus pourvu de petits nids de cellules ganglionnaires. A la consittion de ce plexus prennent part les nerfs suivants: deux gros rameaux du récurrent gauche, dont l'un sort précisement près du bord supérieur de la crosse de l'aorte (par deux racines) (*c* sur la planche), tandis que l'autre sort beacoup plus huat (*a* sur la planche). Par conséquent, ces deux rameaux sont les rameaux cardiaques moyens gauches. C'est

identique avec les données du cadavre C. Mais le pneumogastrique droit, comme nous l'avons signalé, avant de se cacher derrière la bronche droite émet une branche considérable au plexus de la bifurcation. Il est intéressant de noter que ce plexus réalise en outre une anastomose, une connexité entre le récurrent gauche et le pneumogastrique droit, du moins le rameau γ présente l'aspect d'une pareille anse de connexité. Les rameaux efférents du plexus de la bifurcation sont: à la veine cave supérieure, à l'auriculum droit, au noeud de Keith-Flack (démontré histologiquement), au ventricule gauche et à une veine pulmonaire gauche.

Cadavre E. Tab. XI.

Nous devons à présent examiner les données chez un autre cadavre, parce qu'il représente le caractère opposé à celuidu cadavre D en ce qui concerne le dévéloppement de ses ganglions. En effet, tandis que chez le cadavre D nous avons tous les trois ganglions présents, ceux-ci manquent absolument en tant que formations macroscopiques chez le cadavre E, étant substitués par les plexus correspondants pourvus de granules des cellules ganglionnaires. On rencontre entre ces deux types extrêmes—type D et type E—des formes de transition.

Côte gauche. Le n. phrenicus est sans particularités; au niveau du deuxième espace intercostal il envoie un rameau au péricarde. *Le pneumogastrique.* Tout en haut on voit une double anastomose avec le grand hypoglosse. Le nerf laryngé supérieur prend son origine ordinaire. Le rameau cardiaque laryngé manque. Jusqu'à l'origine même du récurrent, le pneumogastrique ne donne ni rameau ni anastomose. Le nerf récurrent se détache en règle. Tout de suite après avoir contourné le bord inférieur de la crosse de l'aorte, il émet deux rameaux qui se cachent derrière la bifurcation de l'artère pulmonaire. Ces deux rameaux vont au plexus de la bifurcation comme nous verrons plus tard et méritent le nom des rameaux cardiaques moyens gauches. Le troisième rameau du récurrent s'anastomose avec le plexus formé par tous les nerfs sympathiques gauches et se réunit au preimer nerf droit, que l'on voit sur la planche (D). Ce troisième rameau prend part à la formation du plexus de la bifurcation et donne des plexus nerveux à la veine cave supérieure et au noeud de Keith-Flack. *Le tronc sympathique.* Le ganglion sympathique volumineux, d'une forme ovoide, émet en bas et médialement deux rameaux qui se réunissent; c'est le nerf cardiaque supérieur. Du rameau médian une branche se dirige vers la glande thyroïde. Sur son trajet entre le ganglion sympathique supérieur et le ganglion moyen, le tronc sympathique ne donne point de rameaux. Le ganglion sympathique moyen est grand et perforé à sa partie supérieure par l'artère thyroïdienne inférieure. Le ganglion moyen envoie en arrière un rameau qui disparaît sous le bord médian de

m. longi capitis et colli. Au dessous du niveau de l'art. thyroïdienne inférieure, une branche se détache du ganglion moyen qui va à l'art. vertébrale. Entre le ganglion moyen et le ganglion inférieur, le tronc sympathique forme une anse à travers laquelle passe l'art. vertébrale. Du bord antérieur du ganglion moyen prennent naissance deux rameaux: le rameau supérieur qui doit être défini comme le nerf cardiaque moyen ; le rameau inférieur qui s'anastomose avec le nerf cardiaque inférieur, chemine en bas et disparaît derrière le bord supérieur de la bifureation de l'artère pulmonaire. Chemin faisant, ce dernier rameau s'anastomose aussi avec le récurrent et avec le nerf cardiaque inférieur (notamment avec sa racine supérieure qui sur notre objet est tirée par une ficelle. *Le ganglion sympathique inférieur,* beau et volumineux, est un ganglion stellatum. De son bord postérieur partent le n. vertebralis et les trois rameaux communicants. De son pôle antéro-inférieur émerge le nerf cardiaque inférieur par deux racines qui se réunissent plus en bas en un tronc. La racine supérieure s'anastomose deux fois avec un rameau du ganglion moyen qui disparaït derrière l'artère pulmonaire. La racine inférieure n'a pas d'anastomoses. Le tronc commun du nerf cardiaque inférieur se dirige vers la bifurcation de l'artère pulmonaire, principalement vers la branche gauche. C'est ici que le nerf cardiaque inférieur s'anastomose avec une large anse arciforme, branche du nerf cardiaque supérieur gauche qui va aux nerfs droits. Cette anse à son tour donne un ramuscule à la branche gauche de l'art. pulmonaire. *Le nerf cardiaque supérieur.* Comme nous avons déjà vu, ce nerf prend son origine au ganglion supérieur par deux racines qui se réunissent. Ensuite au niveau de l'art. thyroïdienne inférieure, le nerf cardiaque supérieur se divise en trois branches. 1. La branche la plus latérale forme une anse très longue qui passe sur la face antérieure de la crosse de l'aorte, donne l'anastomose au nerf cardiaque inférieur gauche et un ramuscule à la branche gauche de l'art. pulmonaire, et puis chemine sur la face antérieure de l'art. anonyme pour se diriger enfin en haut et aboutir au plexus cardiaque droit (plexus profond des auteurs). Sur la planche XII. on voit le bout sectionné de cette anse. 2. Les deux autres branches du nerf cardiaque supérieur forment un plexus compliqué dans la constitution duquel prennent part, outre ces deux branches, le nerf cardiaque moyen (au point de son entrée au plexus il existe un petit ganglion sur la planche) et le nerf récurrent, lui aussi. De ce plexus, ou plus exactement de ce petit ganglion *m,* émerge un nerf mince et long qui va sur la face antérieure de l'art. pulmonaire et tout près de la bifurcation de l'art. pulmonaire envoie beaucoup de rameaux à celle-ci. En déviant peu à peu à droite, ce nerf va à l'artère coronaire droite (selon la loi de l'innervation croisée). Le plexus que nous venons de mentionner correspond strictement avec ses rameaux efférents et afférents au ganglion gauche (Wrisbergi). En effet, ce plexus est constitué par les nerfs supérieurs et moyens gauches ; à savoir, dans ce cas—le nerf cardiaque supérieur et le nerf cardiaque moyen.

Les rameaux supérieurs du pneumogastrique qui manquent sont remplacés par les anastomoses du récurrent. Le ganglion gauche (Wrisbergi) doit donner l'innervation aux formations droites—c'est ce que font les rameaux efférents de notre plexus parce qu'ils innervent l'art. pulmonaire et l'art. coronaire droite. (Ici nous devons ajouter que l'artère coronaire droite et l'artère coronaire gauche étant toutes les deux les rameaux de l'aorte (formation gauche), on pourrait les traiter aussi comme des formations gauches, mais chacune de ces deux artères va à la moitié droite ou à la moitié gauche du coeur, et le nerf qui embrasse l'artère correspondante donne ses rameaux aux parois de l'artère ainsi qu'au parois du coeur même. Ce fait nous permet de considérer l'art. coronaire droite comme la formation droite et l'art. coronaire gauche comme la formation gauche). On voit aussi sur la planche XI. les nerfs droits, dont l'origine est invisible sur cette planche. C'est pour en donner l'idée plus nette que nous voulons les nommer. Le rameau le plus médian c'est celui qui s'anastomose avec le rameau du récurrent qui se cache derrière l'art. pulmonaire. Plus à droite on voit le nervus crassus qui se divise en deux branches: au niveau du bord supérieur de la branche droite de l'art. pulmonaire, une branche ventrale très grosse et une grêle branche dorsale. La branche ventrale se dirige en bas et à gauche et forme le plexus de l'art. coronaire gauche. A droit du nervus crassus, on voit un nerf fin qui est formé en haut par deux rameaux; il disparaît derrière l'aorte et l'art. pulmonaire (branche droite). Immédiatement à droite de l'art. anonyme émerge un gros rameaux qui reçoit une courte anastomose de l'anse arciforme (*a* sur la planche) du nerf cardiaque supérieur gauche et se divise en plusieurs gros rameaux qui disparaîssent sur notre planche derrière l'aorte, c'est à dire vont à la face dorsale de la crosse de l'aorte en pénétrant ici dans l'épaisseur de la paroi et l'innervant abondamment.

Cadavre E. Tab. XII.

Côté droit. La disposition qu'on trouve ici est tout à fait claire, malgré sa complexité apparente. Notamment, le ganglion cardiaque droit n'existe pas et c'est pour cette raison que nous avons un plexus qui le substitue. *Le pneumogastrique.* Tout en haut, le pneumogastrique reçoit une courte anastomose du bord postérieur du ganglion sympathique supérieur. Le premier rameau qui se détache du vagus à quelques *cm* au dessus de l'origine du récurrent doit être reconnu pour le rameau cardiaque supérieur qui abandonne assez bas le tronc du pneumogastrique. De son point d'origine le rameau cardiaque supérieur se dirige en haut et médialement et entre dans le plexus qui substitue le ganglion cardiaque droit. Le récurrent prend son origine par trois racines—une racine supé-

rieure, très grosse, et deux racines inférieures, minces. C'est près du sommet de la courbure du récurrent qu'une racine venant du tronc du pneumogastrique aboutit à lui. Le récurrent ainsi constitué se dirige en bas et médialement, émet une anastomose au plexus et envoie en bas *deux* branches qui partent presque d'un même point: *a*) une branche *postéro-latérale* descend directement en bas au niveau du bord supérieur de la branche droite, reçoit une anastomose du tronc du vagus et près du bord inférieur de cette branche se réunit avec une branche homologue du récurrent gauche. Ces deux branches réunies en un tronc unique (et c'est la branche gauche qui prédomine considérablement par son épaisseur) innervent la veine cave supérieure, l'auriculum dextrum, le noeud de Keith-Flack (étudié histologiquement), *b*) une branche antéro-médiale qui descend pour prendre part à la formation du plexus cardiaque droit. Au dessous du récurrent, le pneumogastrique envoie au même niveau trois nerfs: deux branches médiales et une branche latérale (sur notre planche): 1. La branche médiale supérieure va en arrière de la trachée à l'oesophage, 2. la branche médiale inférieure—c'est une anastomose avec le rameau du récurrent qui innerve la veine cave supérieure, l'auriculum dextrum et le noeud de Keith-Flack, 3. la branche latérale très grosse, émet tout près de son origine un nerf qui reçoit une anastomose du tronc du vagus et descend à la veine pulmonaire droite qu'il innerve avec un autre nerf du plexus droit. La branche latérale reçoit alors, à son tour, une anastomose du tronc du vagus et se dirige en bas; elle donne un rameau à la branche droite de l'art. pulmonaire et deux autres rameaux à la veine pulmonaire droite.

Le tronc sympathique. Le ganglion supérieur volumineux, d'une forme ovoïde; de son pôle inférieur sort le nerf cardiaque supérieur. Ce dernier nerf en descendant donne en arrière une anastomose au nerf cardiaque moyen, forme ensuite un petit ganglion et entre dans le plexus cardiaque droit. Le ganglion moyen n'existe pas, mais, à sa place, du tronc sympathique se détache le nerf cardiaque moyen qui s'anastomose avec le nerf cardiaque supérieur et descend pour prendre part à la formation du plexus cardiaque droit. Au-dessus du nerf cardiaque moyen, le tronc sympathique descend jusqu'au ganglion inférieur en embrassant dans une anse l'art. vertébrale. Du point qui se trouve tout de suite audessus de l'art. vertébrale, se détachent trois rameaux du tronc sympathique: 1. un nerf vertébral qui chemine en arrière et deux nerfs qui vont en avant; 2. le nerf supérieur—c'est l'anastomose au nerf cardiaque moyen et 3. le nerf inférieur—c'est l'anastomose au nerf cardiaque inférieur; on peut traiter cette dernière anastomose comme une racine supérieure du nerf cardiaque inférieur. *Le ganglion sympathique inférieur,* volumineux, est de forme triangulaire. A son angle supéro-médiale aboutissent les deux branches de l'anse de l'art. vertébrale et se détache le nerf cardiaque inférieur. A son angle supéro-latéral aboutissent deux rameaux communicants. L'angle inférieur se prolonge dans le tronc sympathique.

Le plexus cardiaque droit. Ce plexus extrèmement compliqué est formé par des larges anses multiples, pour la plupart d'une forme triangulaire. Les rameaux afférents sont déjà connus; ce sont, en allant du haut en bas: le nerf cardiaque supérieur, le nerf cardiaque moyen et le nerf cardiaque inférieur, deux rameaux du récurrent dont le rameau inférieur est réuni encore par une anastomose directe avec le petit ganglion du nerf cardiaque supérieur, et enfin le rameau cardiaque supérieur (du tronc du pneumogastrique). *Les rameaux efférents.* En bas au niveau de la bifurcation de la trachée se dessinent trois nerfs considérables dont: 1. le plus droit et le plus gros émet une branche importante pour l'innervation des veines pulmonaires; ensuite il descend, innerve l'oreillette gauche et chemine avec l'art. coronaire gauche en l'accompagnant tout le long de son trajet; le nerf suivant, 2. dans le quel se jette le bout de l'anse arciforme sectionnée, se dirige tout entier sur la face dorsale de la crosse de l'aorte et se ramifie ici en donnant à l'aorte beaucoup de filets nerveux. 3. Le troisième rameau efférent se reunit sur la face dorsale de l'aorte avec le premier rameau efférent, d'où il résulte une longue anse. C'est notamment cette anse qui embrasse la branche droite de l'art. pulmonaire comme nous l'avons vu en étudiant le côté gauche du cadavre *E* (planche XI). Du sommet de cette anse, placée sur la face dorsale de l'aorte, se détache une branche qui innerve la paroi dorsale de l'aorte. *Le plexus de la bifurcation.* On peut dire que ce plexus, en général peu développé, manque ici ou à peu près; il est remplacé par quelques rameaux des deux nerfs récurrents; à savoir, le récurrent gauche émet un rameau qui descend verticalement aux parois supérieures des oreillettes, c'est à dire de même que chez le cadavre *C* où un rameau va du ganglion de la bifurcation aux deux oreillettes. Plus en haut, se détache du récurrent une branche assez considérable qui s'anastomose avec le fin rameau du récurrent droit. Après avoir formé un seul tronc, ces deux rameaux innervent la veine cave inférieure, l'auriculum droit et le noeud de Keith-Flack. Donc, les données cardinales que nous avons obtenues de l'étude du cadavre *E* sont identiques aux données précédentes. Malgré l'absence de ganglions macroscopiques, substitués par les plexus, les rameaux afférents ainsi que les rameaux efférents sont identiques à ceux des ganglions. La loi de l'innervation croisée est bien marquée. Les nerfs du côté droit qui constituent le nervus crassus (sur le cadavre *C*) et le plexus droit—innervent les formations gauches: l'aorte et l'art. coronaire gauche. Les nerfs du côté gauche—du plexus cardiaque gauche, innervent les formations droites—l'artère pulmonaire et l'artère coronaire droite. La régularité du plexus (du ganglion) de la bifurcation est vraiment surprenante, notamment les nerfs cardiaques moyens gauches avec un petit supplément du nerf cardiaque moyen droit innervent la veine cave supérieure, l'auriculum droit, le noeud de Keith-Flack.

Les veines pulmonaires, en qualité des formations gauches, sont innervées par le plexus cardiaque droit. C'était impossible de dessiner sur notre planche tous les nerfs qui animent les veines pulmonaires sans trop encombrer les figures. Sur la pièce on pouvait bien démontrer cela avec tous les détails.

Cadavre F. Tab. XIII.

Avant de finir notre étude des pièces examinons encore un cadavre pour nous persuader de la concordance de ces dispositions.

Côte gauche. Le pneumogastrique nous apparaît épaissi à la partie supérieure du cou, c'est comme le prolongement du ganglion nodosum. Le premier rameau ne se détache du vagus qu'un peu au-dessus du bord supérieur de la crosse de l'aorte (sectionnée sur notre pièce). Ce rameau sans donner aucune anastomose se jette directement dans le ganglion gauche placé immédiatement au-dessus de la bifurcation de l'art. pulmonaire sur notre planche. Sur la préparation, ce ganglion était placé plus bas, sur la face antérieure de l'art. pulmonaire et était un peu visible près du bord inférieur de la crosse de l'aorte. Le tronc du pneumogastrique sur la face ventrale de la crosse de l'aorte émet en haut et à gauche un rameau qui entortille l'art. souclavière et aboutit à un des rameaux du ganglion sympathique inférieur. Dans la même région, le pneumogastrique émet deux rameaux qui se dirigent en haut et entourent en forme d'anse la branche gauche de l'artère pulmonaire; le rameau gauche se bifurque et donne un ramuscule à la racine du poumon gauche. Le récurrent est en règle et aussitôt après son origine émet un rameau (ramus cardiacus medius) au plexus de la bifurcation; ce cameau disparaît derrière le bord supérieur de la branche gauche de l'art. pulmonaire. Le récurrent tout en montant donne quatre branches, l'une après l'autre, à l'oesophage et quelques branches à la trachée. *Le tronc sympathique.* Le ganglion sympathique supérieur est très long; de son pôle inférieur se détache le nerf cardiaque supérieur, qui descend et se réunit avec le nerf cardiaque moyen. Le ganglion cardiaque moyen est de forme triangulaire; de son angle inféro-médial se sépare le nerf cardiaque moyen qui reçoit le nerf cardiaque supérieur et se confond aussi avec le nerf cardiaque inférieur extrêmement gros. C'est de la réunion de ces trois nerfs cardiaques que resultent les deux anses triangulaires allongées. Du pôle inféro-latéral du ganglion cervical sympathique moyen, le tronc sympathique descend au bord supérieur du ganglion intérieur et donne, chemin faisant, une branche considérable dans la direction latérale qui se recurbe en forme d'anse autour de l'art. sousclavière et aboutit au pôle inférieur du ganglion inférieur. *Le ganglion sympathique cervical inférieur.* Ce ganglion a une forme arrondie et ressemble à une grande araignée. Comme nous l'avons vu, le tronc sympathique lui-même se jette dans le bord supérieur du ganglion et

le nerf vértébral part de ce bord; au bord latéral du ganglion entrent les quatre rameaux communicants. Au point de la transition du bord *supérieur au bord inférieur* se détache du ganglion le nerf cardiaque inférieur, très gros, qui immédiatement après son origine forme une anse pour l'art. vertébrale et puis descend en bas et médialement et reçoit le nerf cardiaque moyen. Le tronc commun de tous les trois nerfs cardiaques sur la face latérale de la trachée donne une anastomose à un rameau du ganglion inférieur (décrit plus bas) et émet une branche qui disparaît derrière le bord supérieur de la bifurcation de l'art. pulmonaire. Ensuite le tronc commun des nerfs cardiaques se bifurque en forme d'un delta et aboutit au ganglion cardiaque gauche (Wrisbergi) (innerve la paroi dorsale de la bifurcation). Au-dessus du nerf cardiaque inférieur se détache du ganglion inférieur encore un rameau qui forme un cercle autour de l'artère sousclavière, et par son bout inférieur se jette dans le tronc sympathique au dessus du ganglion inférieur. Du sommet de cette anse, part une branche qui se dirige en bas et à droite et innerve la branche droite de l'artère pulmonaire. Au dessous de cette anse du ganglion inférieur se détache par deux racines une branche assez considérable qui disparaît en bas derrière le bord supérieur de la bifurcation de l'art. pulmonaire; cette branche innerve aussi la partie dorsale de la bifurcation et donne un rameau qui chemine en forme d'*anneau* sur la face ventrale de la branche gauche de l'art. pulmonaire. Ainsi on peut noter que le ganglion inférieur gauche prend une grande part à l'innervation de l'artère pulmonaire.

Le ganglion cardiaque gauche (W r i s b e r g i). Les *rameaux afférents* du ganglion sont tous les nerfs cardiaques qui se sont réunis en un tronc commun, ce qu' on voit si fréquemment sur le côté droit, c'est le nervus crassus. Du côté du pneumogastrique, nous avons le rameau cardiaque supérieur qui se jette aussi dans le même ganglion. Ainsi les rameaux afférents sont au nombre de quatre: trois sympathiques et un rameau du vagus. Les rameaux cardiaques moyens (du récurrent) ne prennent point part, comme d'habitude, à la formation du ganglion (plexus) gauche (W), mais entrent dans la constitution d'un autre plexus, notamment du plexus de la bifurcation. *Les rameaux efférents* sont très typiques. Ce sont quatre rameaux courts donnant l'innervation à l'art. pulmonaire et un rameau long, qui descend obliquement sur la face ventrale de l'art. pulmonaire, donne une branche à la racine de cette artère et à la paroi du ventricule droit et chemine avec l'artère coronaire droite en accompagnant cette artère et ses ramifications sur tout leur trajet.

C a d a v r e F. T a b. XIV.

Côté droit. Ce qui est le plus caractéristique ici c'est l'absence du ganglion cardiaque droit et du ganglion de la bifurcation qui sont substitués tous les deux par des plexus correspondants. *Le pneumoga-*

strique, de même que du côté gauche, est épaissi sensiblement dans la région supérieure du cou. Le nerf laryngé supérieur se détache du tronc du vagus, va en bas et en avant est se divise en ramus internus et ramus externus. De ce rameau externe se sépare le rameau cardiaque laryngé (c'est à dire la racine laryngée du rameau cardiaque supérieur) qui s'anastomose avec le nerf cardiaque supérieur et aboutit au tronc commun des nerfs cardiaques moyen et inférieur. C'est ainsi que nous avons dans ce cas le trajet indépendant de deux racines du rameau cardiaque supérieur. Le rameau cardiaque supérieur proprement dit (c'est à dire la racine du tronc du vagus) chemine indépendant, tandis que l'autre racine (c'est à dire la racine du laryngé) se confond avec le tronc commun des nerfs cardiaques—moyen et inférieur. Il est clair que l'essence des choses reste la même. C'est à deux *cm* audessus de l'origine du récurrent que du tronc du pneumogastrique se sépare le rameau cardiaque supérieur. Ce dernier rameau reçoit une seule anastomose du tronc commun des nerfs cardiaques—moyen et inférieur et se dirige directement à la face dorsale de l'aorte, là il se ramifie et innerve la paroi de l'aorte. Le rameau cardiaque supérieur, à l'aide d'un de ses rameaux (le plus gauche), se réunit en arc sur la face dorsale de l'aorte avec le tronc commun des nerfs cardiaques (moyen et inférieur). Du tronc du pneumogastrique prend son origine par deux racines le récurrent qui sera décrit en détail plus bas. Immédiatement au dessous de l'origine du récurrent, du tronc du pneumogastrique se détachent et vont à droite (latéralement) deux minces rameaux auxquels aboutit plus en bas encore un troisième rameau. Le tronc commun qui résulte de la confusion de ces trois rameau aborde la branche droite de l'art pulmonaire, se divise de nouveau en trois filets et innerve cette branche de l'artère (une transgression de la loi de l'innervation croisée). Médialement du tronc du pneumogastrique se sépare un rameau, qu'on doit nommer le rameau cardiaque inférieur droit parce qu'il sort au dessous du récurrent. Ce rameau cardiaque inférieur se met en bas et se réunit avec le rameau cardiaque moyen gauche en formant ainsi un petit plexus de la bifurcation décrit plus bas. *Le tronc sympathique.* Le ganglion supérieur est très long; en bas il émet le nerf cardiaque supérieur qui, après s'être anastomosé avec le rameau cardiaque laryngé, aboutit au nerf récurrent. Par conséquent, le nerf cardiaque supérieur prend part à la formation du plexus seulement par cette anastomose. *Le ganglion moyen,* et grand, d'une forme ovalaire. De son pôle inférieur sortent: en arrière —le tronc sympathique même et en bas — le nerf cardiaque moyen, très gros. Le nerf cardiaque moyen reçoit à son bord postérieur les deux nerf cardiaques inférieurs. *Le ganglion inférieur* est rond et volumineux. A son bord antérieur aboutit le tronc sympathique et en sortent: les deux nerf cardiaque inférieurs, et plus bas, une forte anastomose à l'origine du récurrent, s'anastomosant avec le plus inférieur des deux nerfs cardiaques supérieurs. Au bord postérieur du ganglion inférieur entrent les rameaux communiquants et sort le nerf vertébral. *Le plexus*

cardiaque droit. Les rameaux afférents sont principalement le gros nerf cardiaque moyen, les deux nerfs cardiaques inférieurs et le rameau cardiaque laryngé par une seule anastomose. Le rameau cardiaque supérieur (racine du vagus) prend part à la formation du plexus. Le rameau efférent est le seul rameau—c'est le tronc nerveux assez fort qui descend jusqu'à à la paroi dorsale de la crosse de l'aorte ; là il émet une branche considérable pour l'artère coronaire gauche et se réunit en forme d'anse avec le rameau cardiaque supérieur (racine du vagus). *Le plexus de la bifurcation.* Les rameaux afférents sont deux, à savoir: le rameau cardiaque inférieur (du vagus droit) et le rameau cardiaque moyen (du récurrent gauche). Le plexus est représenté par trois anses triangulaires, dont les deux droites sont dirigées par leurs sommets en bas et une anse gauche avec le sommet en haut. Les rameaux efférents sont parfaitement typiques, notamment les rameaux destinés aux veines pulmonaires, à l'auriculum droit, à la veine cave supérieure, au noeud de Keith-Flack (constaté aussi histologiquement).

Conclusions. Tab. XVI.

Il me semble que l'étude sommaire des données de la littérature, que j'ai présentée dans cet ouvrage, aussi bien qu' une étude beaucoup plus vaste, persuaderait également le lecteur que la conception des nerfs du coeur reste dans un état de chaos. Les douze nerfs cardiaques ou même les quatorze nerfs (si l'on compte nervi cardiaci imi), s'approchent de la base du coeur et s'entremêlent pour donner naissance à un plexus cardiaque. Si l'on divise ou si l'on ne divise pas ce plexus de 12 ou 14 nerfs en deux parties – plexus superficiel et plexus profond – l'essence de l'objet ne change pas, c'est à dire on n'a pas de clarté sur les rélations réciproques entre les nerfs ; ou, peut-être même, la question en devient plus compliquée et inextricable. C'est pourquoi la réponse à la question: àquel plexus appartient tel ou tel nerf, reste toujours obscure et incertaine ; de cette incertitude on tire la conclusion de l'extrême variabilité de ces nerfs. Par surcroît, le ganglion de Wrisberg se trouve au centre du plexus (Testut), ou bien tous les nerfs du coeur convergent à ce ganglion (Schumacher) et en même temps le ganglion de Wrisberg est un chaînon de réunion avec le plexus superficiel et le plexus profond. Je ne puis ne pas mentionner encore une fois l'opinion du prof. Tandler sur la constitution des plexus: „Le plexus cardiaque superficiel seu anterior est formé principalement par les rameaux supérieurs du pneumogastrique gauche et le nerf cardiaque supérieur du sympathique gauche. S'y joignent encore *les fibres séparées* des nerfs cardiaques inférieurs gauches et les rameaux des nerfs cardiaques droits et les rameaux cardiaques inférieurs. Le *plexus cardiacus profundus* est formé par tous les nerfs cardiaques sympathiques, à l'exception du nerf cardiaque supérieur gauche, et par tous les rameaux du vagus à l'exception des susdits nerfs. „C'est ce qu'on

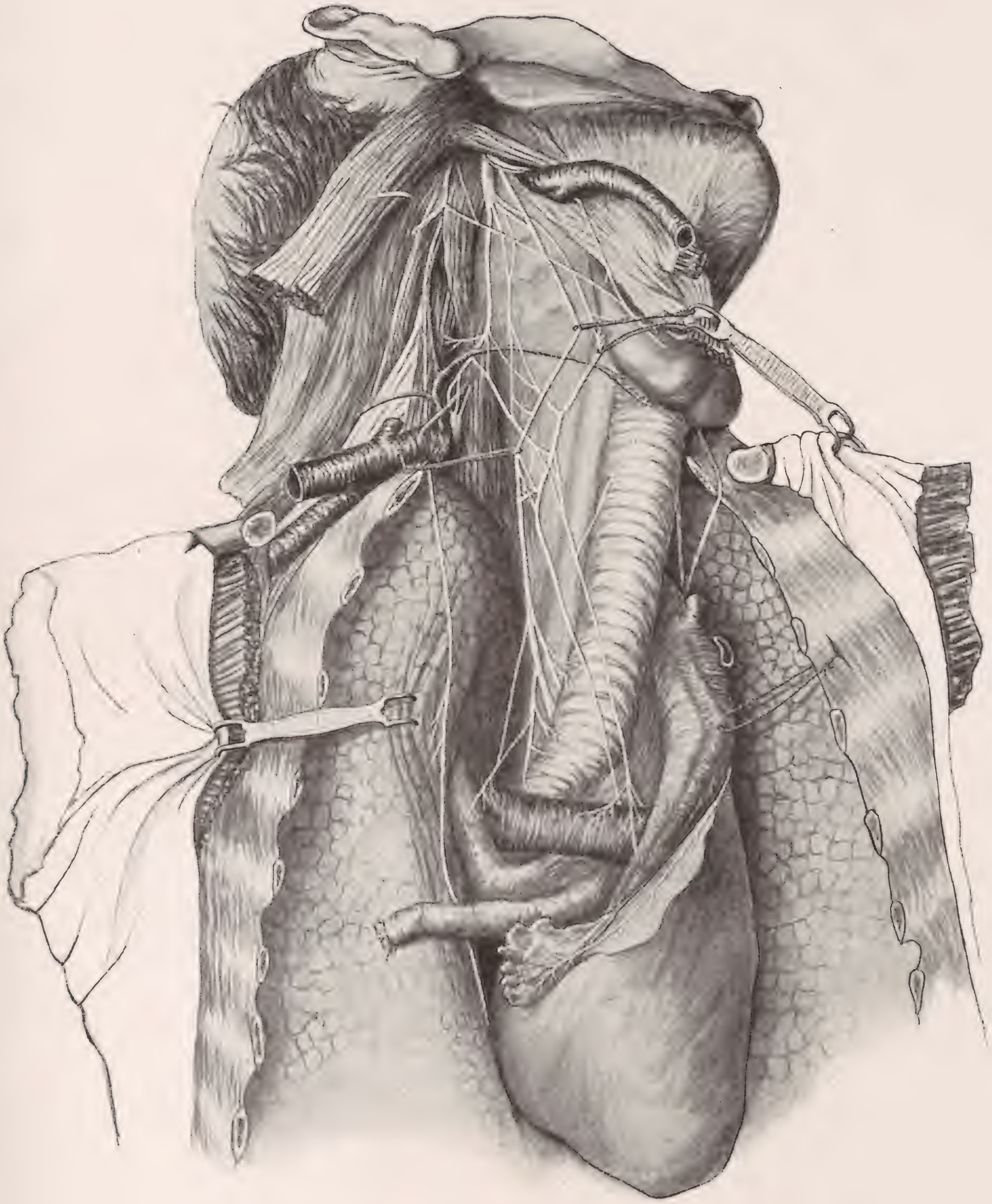
Prof. A. V. STARKOV: O nervech srdečních u člověka. Tab. I.
Les nerfs du coeur de l'homme.

Cadaver A.
(lat. sinistr.)

Prof. A. V. STARKOV: O nervech srdečních u člověka. Tab. II.
Les nerfs du coeur de l'homme.

Cadaver A.
(lat. dextr.)

Prof. A. V. STARKOV: O nervech srdečních u člověka. Tab. III.
Les nerfs du coeur de l'homme.



Cadaver B.
(lat. dextr.)

Prof. A. V. STARKOV: O nervech srdečních u člověka. Tab. IV.
Les nerfs du coeur de l'homme.

Cadaver B.
(lat. sinistr.)

Prof. A. V. STARKOV: O nervech srdečních u člověka. Tab. V.

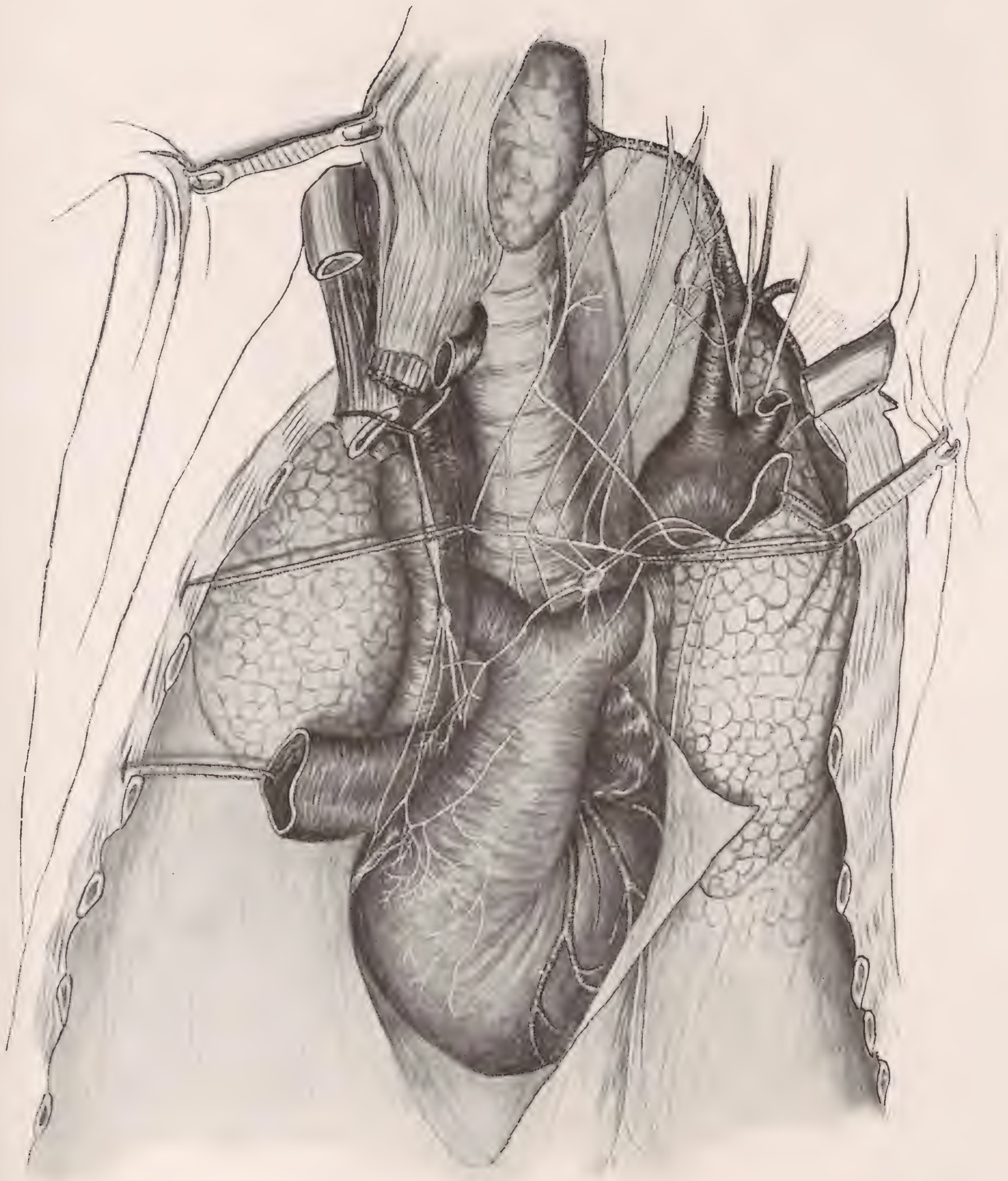
Les nerfs du coeur de l'homme.

Cadaver C.
(lat. sinistr.)

Prof. A. V. STARKOV: O nervech srdečních u člověka. Tab. VI.
Les nerfs du coeur de l'homme.

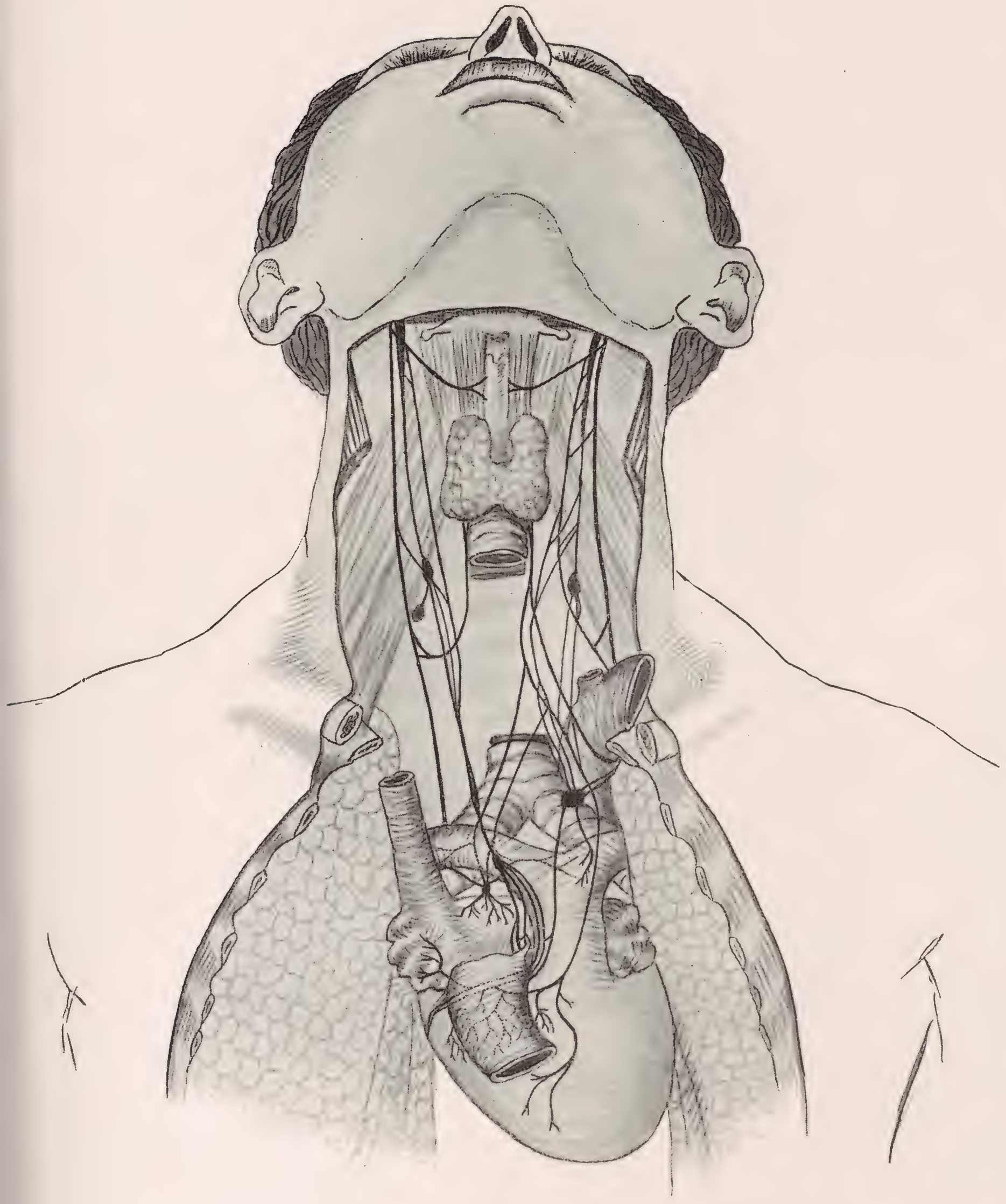
Cadaver C.
(lat. dextr.)

Prof. A. V. STARKOV: O nervech srdečních u člověka. Tab. VII.
Les nerfs du coeur de l'homme.



Cadaver C.
(lat. sinistr.)

Prof. A. V. STARKOV: O nervech srdečních u člověka. Tab. VIII.
Les nerfs du coeur de l'homme.



Cadaver C.
(schema).

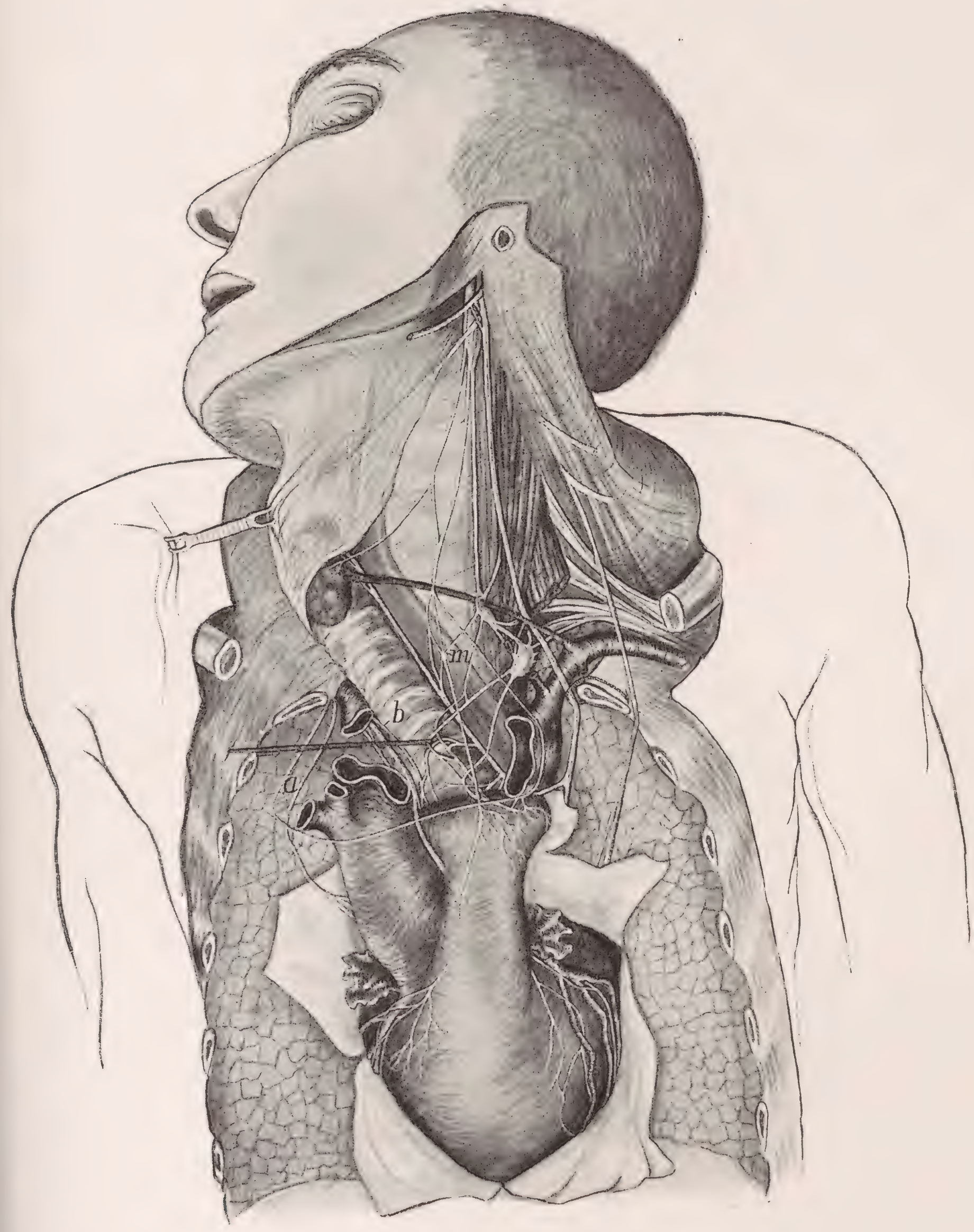
Prof. A. V. STARKOV: O nervech srdečních u člověka. Tab. IX.
Les nerfs du coeur de l'homme.

Cadaver D.
(lat. sinistr.)

Prof. A. V. STARKOV: O nervech srdečních u člověka. Tab. X.

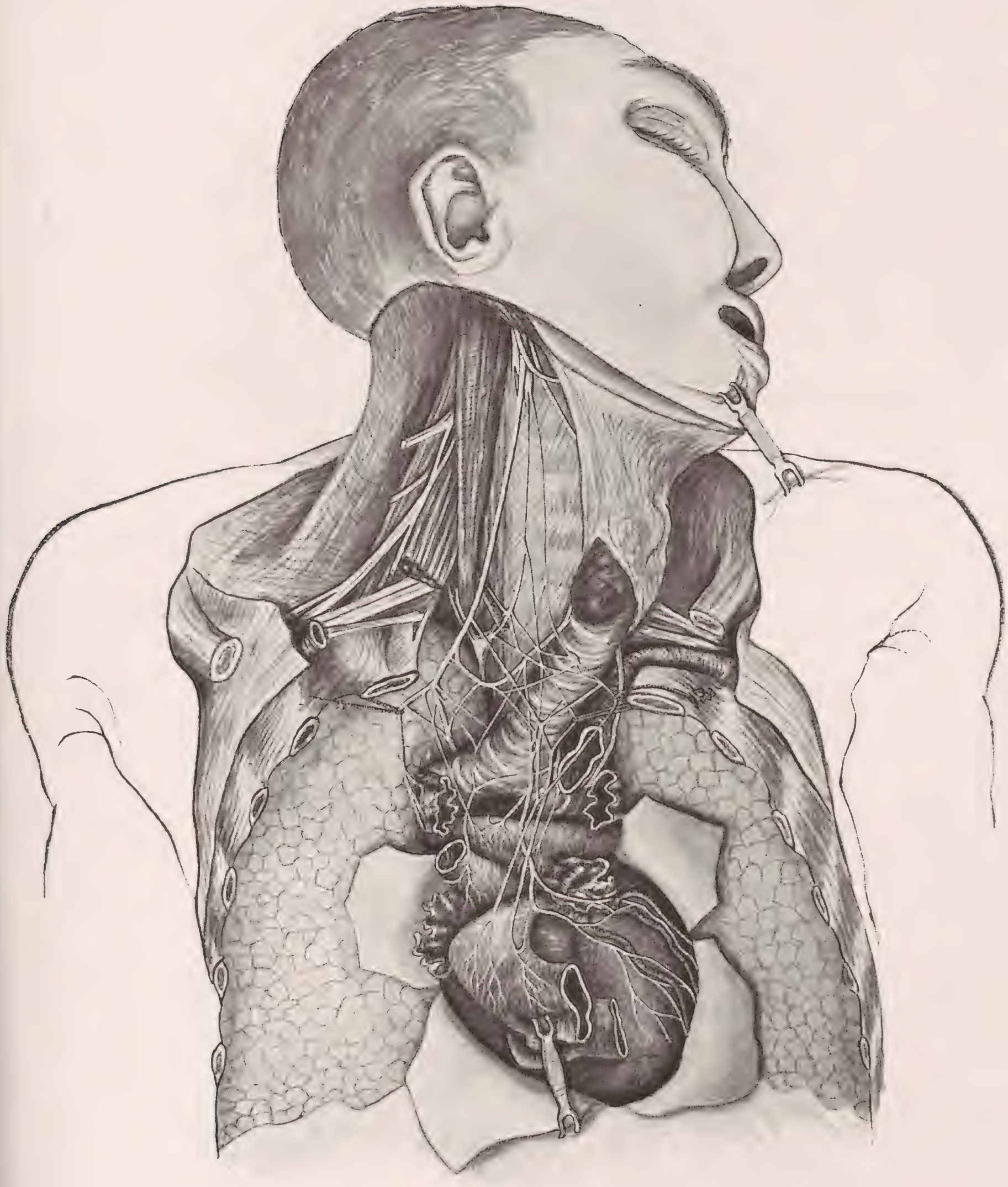
Les nerfs du coeur de l'homme.

Cadaver D.
(lat. dextr.)



Cadaver E.
(lat. sinist.)

Prof. A. V. STARKOV: O nervech srdečních u člověka. Tab. XII.
Les nerfs du coeur de l'homme.



Cadaver E.
(lat. dextr.)

Prof. A. V. STARKOV: O nervech srdečních u člověka. Tab. XIII.
Les nerfs du coeur de l'homme.

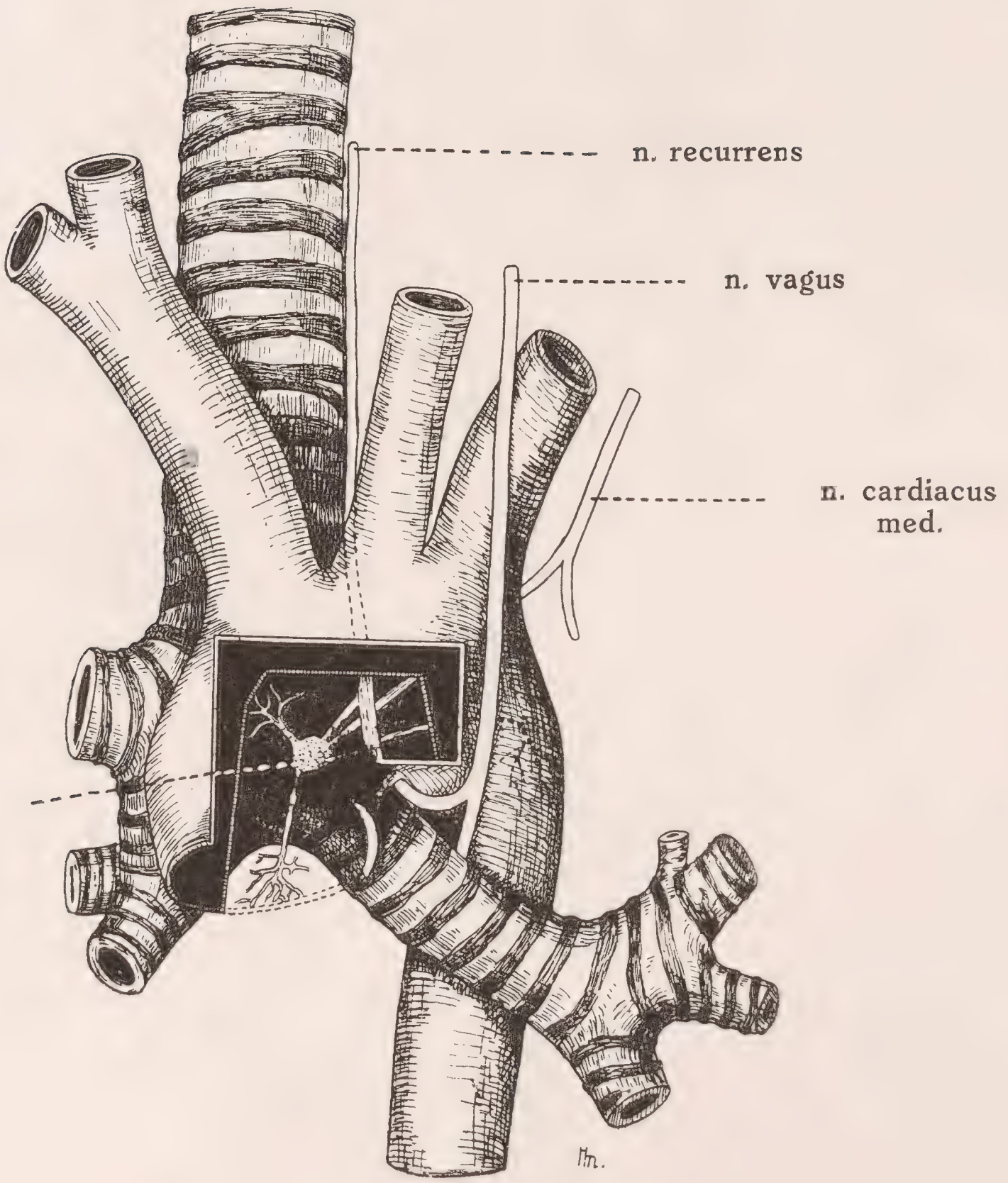
Cadaver C.
(lat. sinistr.)

Prof. A. V. STARKOV: O nervech srdečních u člověka. Tab. XIV.
Les nerfs du coeur de l'homme.

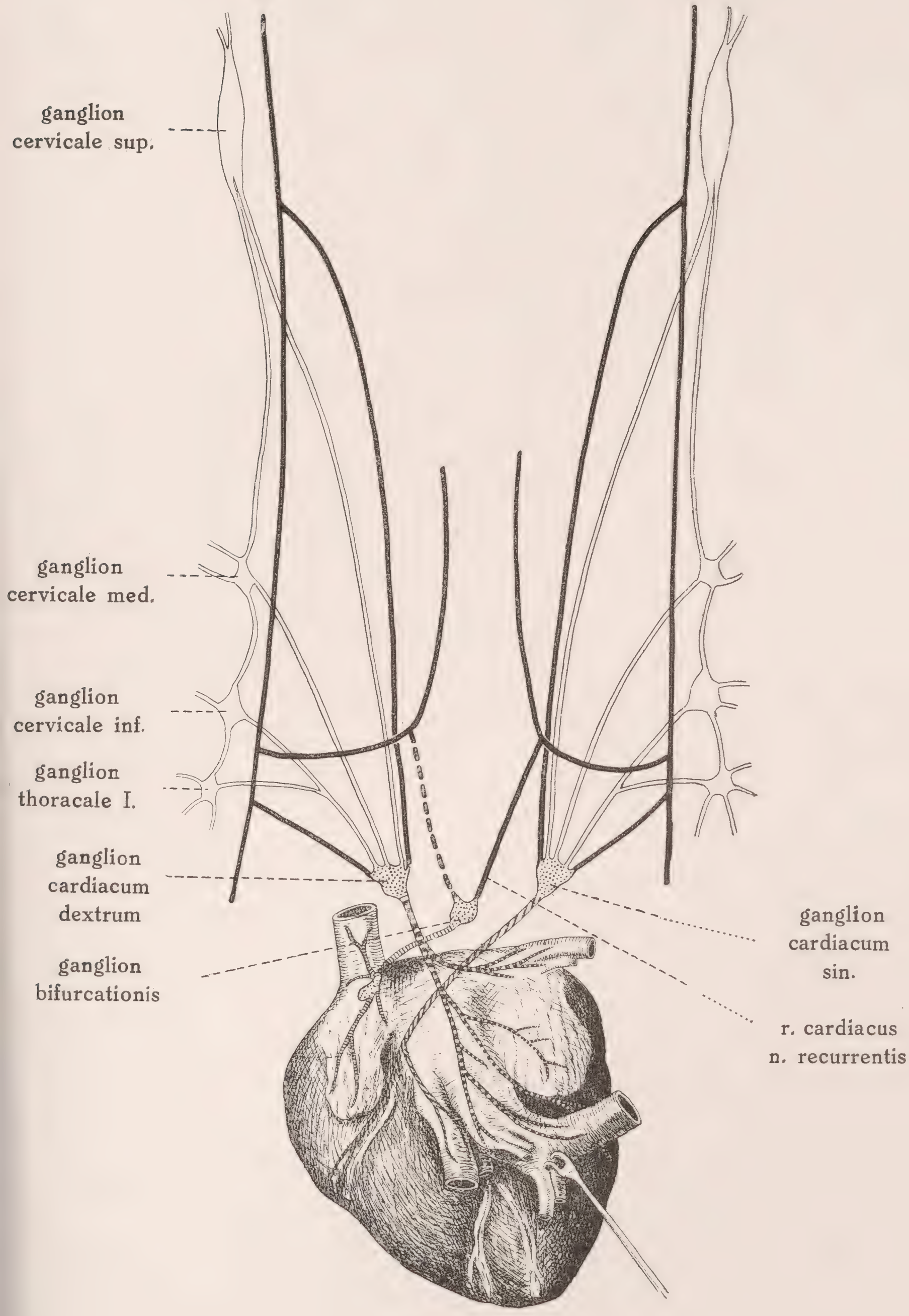
Cadaver F.
(lat. dextr.)

Prof. A. V. STARKOV: O nervech srdečních u člověka. Tab. XV.

Les nerfs du coeur de l'homme.



Prof. A. V. STARKOV: O nervech srdečních u člověka. Tab. XVI.
Les nerfs du coeur de l'homme.



Schematický přehled.

trouve à propos des rameaux afférents des deux plexus. Quant aux rameaux afférents c'est encore pire. Si le ganglion de Wrisberg est en effet au centre, où convergent tous les nerfs cardiaques, et quand les nerfs éfférents sortent de ce ganglion central, on ne peut plus rien démêler „C'est à cause de l'existence de ce foyer central où tous les nerfs s'entremêlent ensemble qu'on ne peut point discerner les nerfs du côté droit de ceux du côté gauche" (Schumacher), après la sortie des branches du ganglion Ou d'après Testut: „Du plexus s'échappent en rayons une multitude de rameaux terminaux qui se distribuent: 1. à l'origine de l'aorte et de l'artère pulmonaire, 2. au coeur et au péricarde." Non seulement on ne peut pas préciser l'origine du chaque nerf mais aussi l'origine. de chacun des deux plexus périphériques reste indéterminée et vague. „Le plexus coronaire droit est formé par deux plexus: plexus profond et plexus superficiel; il fournit des filets nerveux principalement au ventricule et à l'atrium droits. Le plexus coronaire gauche prend son origine principalement du plexus cardiaque profond bien qu'il reçoive aussi des rameaux du plexus superficiel" (Tandler). Donc, si l'on réussissait à constater exactement la constitution du plexus profond et du plexus superficiel, on serait hors d'état de préciser l'origine du plexus coronaire droit et du plexus coronaire gauche, parce qu'ils prennent leur origine de l'un et de l'autre des deux plexus cardiaques".

C'est dans un tel état chaotique qu'on peut présenter tout à fait impartialement la morphologie des nerfs du coeur et de leurs plexus. Certainement, si l'on reconnaît les données cardinales des auteurs sur l'anatomie des nerfs du coeur comme exactes, on doir reconnaître les conclusions basées sur ces données inévitables et justes. En nous basant sur l'étude détaillée de vingt cadavres, où nous avons examiné les nerfs depuis les limites supérieures du cou et jusqu'au sommet du coeur (apex cordis), nous nous sommes persuadés que les données cardinales de la morphologie des nerfs du coeur sont radicalement erronées. Il nous semble que cette fausseté résulte de plusieurs causes, à savoir 1. on a appliqué une technique défectueuse en employant des liquides qui endurcissent les préparations des nerfs, si fins et si délicats (Schumacher); 2. la région qu'on a étudié avait des limites trop étroites et ne pouvait donner que des constatations fragmentaires et incomplètes; 3. on avait un nombre insuffisant de pièces à étudier.

Nos conclusions cardinales sont les suivantes: 1. Il n'existe ni plexus superficiel ni plexus profond, il n'y a qun plexus cardiaque droit et un plexus cardiaque gauche qui ne s'anastomosent point entre eux ou s'anastomosent très peu. 2. Le plexus cardiaque droit est constitué par tous les nerfs cardiaques droits et par tous les rameaux droits, tandis que le plexus gauche est constitué par tous les nerfs gauches et tous les rameaux gauches. Les nerfs cardiaques inférieurs et event. nervi cardiaci imi ont fréquemment un trajet indépendant. 3. chacun des deux plexus a son propre ganglion,

auquel convergent tous les nerfs du côté correspondant; c'est à dire il y a le ganglion cardiaque droit et le ganglion cardiaque gauche (ou de Wrisberg). 4. Chacun de ces deux ganglions peut manquer, et dans ce cas on trouve comme un prolongement du plexus cardiaque du cou un plexus qui se substitue à la place du ganglion et qui contient une quantité considérable des ganglions microscopiques ou des ganglions macroscopiques en forme de petites granules. 5. On rencontre une pareille raréfication ou dispersion du ganglion plus fréquemment du côté droit que du côté gauche, ce qui a donné la base à la conception erronée de traiter le ganglion gauche (de Wrisberg) comme un foyer central du plexus entier (droit et gauche); 6. Au côté droit le ganglion cardiaque peut se présenter sous une forme particulière: tous les nerfs de ce côté se confondent en formant le nervus crassus, dans l'épaisseur duquel on trouve des ganglions multiples. 7. Outre le plexus cardiaque droit et le plexus cardiaque gauche il existe encore un petit plexus médian constitué principalement par le rameau ou par les rameaux moyens gauches (c'est à dire les rameaux du récurrent gauche) avec l'addition d'un rameau cardiaque moins considérable droit. C'est ce plexus que je nomme „le plexus cardiaque de la bifurcation" d'après sa position topographique; il peut avoir, lui aussi, un ganglion parfois assez volumineux qui, à son tour, peut être remplacé par un petit plexus avec des ganglions petits ou microscopiques. 8. Le coeur avec ses vaisseaux a une innervation croisée, c'est à dire, le coeur droit est innervé par les nerfs gauches et le coeur gauche est innervé par les nerfs droits. Cette loi de l'innervation n'est pas une loi absolue, mathématique. C'est une loi d'anatomie qui nous rappelle la decussatio pyramidorum ou le chiasma nervorum opticorum (Mentionnons à ce propos que la chimie et la physique modernes ne considèrent pas leurs lois comme quelque chose d'absolu, mais comme une chose relative (Nernst, Chwolson). 9. Chacun de ces trois petits plexus susmentionnés a son territoire bien défini d'innervation, ou, autrement dit, chaque plexus émet ses rameaux efférents bien déterminés et précisés. 10. Le plexus cardiaque droit innerve: l'aorte, l'artère coronaire gauche avec ses rameaux, le myocarde gauche et les veines pulmonaires. 11. Le plexus coronaire gauche innerve: l'art. pulmonaire, l'artère coronaire droite avec ses ramifications, le myocarde droit. 12. Le plexus cardiaque de la bifurcation innerve l'auriculum droit, la veine cave supérieure et la veine cave inférieure, le nodulus de Keith-Flack. Ce dernier plexus étant formé principalement par les rameaux moyens gauches, la loi de l'innervation croisée n'est pas transgressée d'une manière trop choquante.

Après avoir énoncé nos idées cardinales sous une forme apodictique nous allons traiter notre sujet d'une manière plus détaillée.

Chacun des deux plexus cardiaques, droit et gauche, commence tout en haut au cou, notamment au niveau du ganglion sympathique supérieur où l'on peut déjà voir les anastomoses entre le nerf cardiaque supérieur et le pneumogastrique ou le rameau cardiaque supérieur. En se dirigeant

en bas notre plexus cardiaque s'élargit car les nerfs de plus en plus nombreux entrent dans sa composition. Nous avons observé parfois un plexus très fort entre le récurrent et le plexus proprement dit; on peut dans ce cas parler d'un „plexus recurro-sympathique". Si le ganglion existe ou, comme cela arrive du côté droit, si le nerf crassus est composé (avec ou sans un ganglion au dessous de lui) tous les nerfs se dirigent naturellement à ce centre du côté respectif comme les rayons convergent au foyer d'un système. Mes modestes recherches purement anatomiques ne permettent pas de soulever la question de la valeur physiologique des nerfs du coeur, ou d'autant plus celle de la théorie „myogène ou neurogène", mais on a tout de même une impression générale du trajet et des ramifications des nerfs en ce sens que ce sont par excellence, si non exclusivement, les nerfs des vaisseaux et ceux du noeud de Keith-Flack (noduli sinoatrialis). La physiologie moderne nous enseigne que les impulsions des contractions du coeur prennent leur origine précisément à ce noeud, étudié au point de vue de l'anatomie comparée par Keith-Flack. D'autre part les observations cliniques démontrent que les actions mécaniques sur le larynx et la trachée produisent un grand effet sur l'activité du coeur. Le professeur A. Ivanoff, éminent laryngologiste russe, a attiré mon attention sur l'arrêt de l'action du coeur sous l'influence de la traction exercée sur la trachée après la laryngotomie, quand on suture la section de la trachée à la peau. Un tel arrêt devient parfois menaçant. L'action enrayante, déprimante du pneumogastrique sur l'activité du coeur étant reconnue par tous, on peut, à mon avis, admettre comme démontrée la connexion du noeud sino-atrial avec les rameaux moyens (du récurrent gauche par excellence) De ce point de vue l'arrêt de l'activité du coeur dans les conditions susindiquées est tout à fait compréhensible. Le croisement des nerfs, que nous avons été en état de constater avec toute la précision possible sur chacun de nos 20 cadavres, nous permet de faire encore quelques hypothèses. Le professeur Nicolai, partisan de la théorie neurogène, a énoncé sur les nerfs du coeur l'hypothèse suivante. Il est vrai que personne n'a réussi à obtenir un simple effet moteur à l'aide de l'irritation des nerfs cardiaques. Est ce que cela prouve que les nerfs cardiaques ne sont que des régulateurs et rien de plus? Or, le manque de l'effet moteur peut être expliqué d'une manière suffisante par une disposition fondamentale, notamment qu'entre le point d'irritation d'un nerf cardiaque et la fibre musculaire correspondante toujours une cellule du ganglion cardiaque est intercalée. Par conséquent, au nerf moteur ordinaire correspondent dans le coeur les fibres nerveuses qui partent d'un pareil ganglion moteur cardiaque, et qui ne sont accessibles ni pour la préparation ni pour l'irritation directe. C'est en élargissant cette analogie que le prof. Nicolai et le professeur ukrainien Verigo (Odessa) ont enoncé la supposition que les ganglions intracardiaques correspondent aux cellules des cornes antérieurs et des cornes postérieurs de la moelle épinière ou, comme s'exprime le prof. Nicolai: les ganglions

intracardiaques sont des parties dispersées de la moelle épinière (versprengte Gehirnteile), d'autant plus qu'ils se dévéloppent d'après His junior comme les émigrants de la moelle épinière. Il en résulte logiquement qu' on peut établir une analogie entre les nerfs cardiaques et les voies motrices et sensitives placées plus haut, c'est à dire entre les dits nerfs et le faisseau pyramidal et le ruban de Reil (lemniscus). De ce point de vue, le croisement des nerfs que nous avons constaté acquiert une signification et une valeur spéciale, parce qu'on peut concevoir l'appareil nerveux du coeur tout entier comme s'étant détaché de la moelle épinière et ayant conservé son aspect morphologique et sa valeur physiologique. Malgré toute l'harmonie de cette hypothèse séduisante je dois tout à fait impartailement ajouter que les nerfs du coeur par leur trajet et par leurs ramifications donnent l'impression d'être beaucoup plus des nerfs vasomoteurs (nerfs des vaisseaux) que des nerfs du myocarde. La masse principale des fibres nerveuses se dirige aux vaisseaux et pénètre dans l'épaisseur même des parois de vaisseaux. Le plexus coronaire droit et le plexus coronaire gauche sont la source principale de toute la masse de fibres nerveuses, et ce sont notamment eux qui enlacent très intimement les troncs des artères avec toutes leurs ramifications en ne donnant que de faibles, minces rameaux au myocarde, même au myocarde si robuste du ventricule gauche. Il est bien connu de la littérature et d'après mes recherches personnelles avec la coloration des fibres nerveuses et des ganglions du coeur, qu'on voit, sur la préparation bien colorée par le bleu de méthyle, sous l'épicarde beaucoup de fibres nerveuses très fines qui croisent obliquement les faisceaux musculaires. Même sur les préparations macroscopiques, comme celles du travail classique de Scarpa, on voit une grande quantité de fibres nerveuses sous l'épicarde. Or, on voit aussi très clairement que ces fibres vont de la profondeur à la surface, mais point le contraire; cela prouve que ce sont des nerfs qui sortent des ganglions intracardiaques. Cette direction de la profondeur vers la surface est leur trait morphologique le plus caractéristique, d'après lequel on les reconnaît tout de suite et cela prouve que ce sont des rameaux afférents des ganglions intracardiaques.

Prague. Le 20 mai 1924.

Bibliographie.

1. Alamartine: Anatomie chirurgicale et chirurgie opérative des nerfs du corps thyroïde. Revue de Chirurgie t. LVIII. 1920.
2. Alpiger: Anatomische Studie über das gegenseitige Verhalten der Vagus- und Sympathicusäste im Gebiete des Kehlkopfes (Beitrag zur Erklärung des Schok nach Kehlkopfextirpationen). Langenbeck's Archiv B. XL. 1890.
3. Andersch: Fragmentum descriptionis nervorum cardiacorum. Ludwig Script. neurol. min. I. II.
4. Antonelli: Enumerazione e classificazione dei nervi encefalici. Gaz. Intern. di med. Napoli. vol. VIII. 1905.
5. Argaud R.: Sur l'innervation de la zone auriculaire droite qui répond à l'origine de la systole cardiaque. C. R. Soc. Biol. Paris. 1911.
   a) Sur l'appareil nerveux et la structure de la valvule de Thebes chez l'homme. Ibidem.
6. Argaud et Cochet: Rapports différents des deux pneumogastriques dans la région cervicale. Bibliographie anat. t. XIX. 1909.
7. Arnoldi Frederici: Icones nervorum capitis. Heidelberg. 1860.
8. Arnstein: Die Methylenblaufärbung als histologische Methode. Anat. Anz. 1887. No 5.
9. Aschoff: Die Nervengeflechte des Reizleitungssystems. Deutsche Medic. Wochenschrift. 1909. Naturph. ges. Freiburg. 1909.
10. Athanasiu: La structure et l'origine du nerf dépresseur. Journal de l'Anatomie et de la Physiologie. 1901. No 3.
11. Aubert H.: Die Innervation der Kreislaufsorgane. Hermann's Handbuch d. Physiologie. 1880.
12. Aubert H. und Roever G. Ueber die vasomotorischen Wirkungen der Nervus vagus, laryngeus und sympathicus. Archiv f. ges. Physiol. Bd. I. 1868.
13. Azoulay: Les nerfs du coeur de l'homme. Comp. rend. hebd. de la Soc. de biol. de Paris. 1894, avril, Sér. 10.
14. Baraboschkine: Le nerf sympathique du cou. Thèse. Moscou (en russe).
15. Barrat: On the anatomical structure of the 9th, 10th, 11th and 12th cranial nerves. British med. Journal. 1899. No 2022.
16. Baur. Tractatus de nervis anterioris superficiei trunci humani, thoracis praesertim abdominisque. Tubingae. 1818.
17. Behrends: Dissertatio, qua demonstratur cor nervis carere. Moguntiae. 1792.
18. Bendz H. Tractatus de connexu inter nervum vagum et accessorium Willisii. Hauniae. 1836.
19. Berkley: The intrinsic new suppley of the cardiac ventricules in certain vertebrates. The John Hopkins Hospital Reports. vol. 6. 1894.
   a) On complex nerve terminations and ganglion cells in the muscular tissue of the heart ventricle. Anat. Anz. 1893, 1894. No 1, 2.

20. Bernhardt E. Anatomische und physiologische Untersuchungen über den N. depressor bei der Katze. Dissertation. Dorpat. 1868.
21. Bever C. und von Bezold A. Von den Bahnen, auf welchen die Beschleunigungnerven zum Herzen treten. Untersuch. aus d. physiol. Laborat. in Würzburg. 1867.
22. Bever K.: Ueber die anatomische Verhältnisse des Ganglion stellatum beim Kaninchen. Unters. aus d. physiol. Labor. in Würzburg. 1867.
23. Bezold A.: Ueber ein neues motorisches Herznervensystem. Vorl. Mitth. Allg. med. Central-Zeitung. Berlin. 1862.
a) Ein excitierendes Herznervensystem im Rückenmarke und Gehirn der Säugethiere. Untersuchungen über die Innervation des Herzens. II Abth. Leipzig. 1863.
24. Bidder: Ueber die funktionell verschiedene und räumlich getrennte Nervencentra in Froschherzen. Müller's Archiv. 1852.
a) Die Endigungsweise der Herzzweige des N. vagus beim Frosch. Archiv f. Anatomie. 1868.
25. Bischoff: Mikroskopische Analyse der Anastomosen der Kopfnerven. München. 1865.
a) Nervi accessorii Willisii Anatomia et Physiologia. Dissertation inaugur. Heidelbergae. 1832.
26. Boehm R.: Untersuchungen über den Nervus accelerator cordis der Katze. Archiv für exper. Pathol. und Pharmakol. Bd. IV. 1875.
27. Born: Beiträge zur Entwicklungsgeschichte des Säugethierherzens. Archiv f. mik. Anat. Bd. 33.
28. Brenner: Ueber das Verhältniss des nervus laryngeus inferior vagi zu einigen Aortenvarietäten des Menschen. Archiv f. Anat. und Entw. 1883.
29. Broeckaert: Etude sur le nerf récurrent laryngé· Son anatomie et sa physiologie normales et pathologiques. Bruxelles. 1903.
30. Brücke: Beiträge zur vergleichenden Anatomie und Physiol. des Gefäßsystems. Denkschr. d. Wiener Akad. d. Wissensch. 1852.
31. Camus René: L'origine indépendante du système nerveux sympathique. Archives de Morphologie générale et expérimentale. 1921. fasc. 2.
32. Carlson: The nervous origin of the heart beat in limulus. American Jour. of Physiologie. XII.
33. Casali: Contributo allo studio dei rapporti del nervo vago con l'arteria carotide commune e con l'arteria succlavia. Anat. Anz. Bd. XXXIX. 1911. No 11/12.
34. Cruveilhier J.: Traité d'anatomie descriptive. Paris 1871 p. 682.
35. Cloetta A.: Hypertrophie der Herznerven bei Hypertrophie der Herzsubstanz. Virchow Archiv. 1853.
36. Cunéo: Les nerfs craniens. Voyez Poirier-Charpy: Traité d'anatomie humaine 2-me ed. 1904.
37. Cyon M. und E.: Ueber die Innervation des Herzens vom Rückenmarke aus. Müller's Archiv 1867.
a) Sur l'innervation du coeur. C. r. des séances de l'Acamiedé des Sc. Paris. 1867.
38. Cyon E.: Ueber den Nervus depressor beim Pferde. Bull. de l'Acad. imper. des Sc. de St. Pétersbourg. 1870. t. VII.
a) Beiträge zur Physiologie der Schilddrüse und des Herzens. Archiv für d. ges. Physiol. 1898. Bd. 70.
b) Les nerfs du coeur. Anatomie et physiologie. Paris. 1905.
c) Die Nerven des Herzens. Berlin. 1907.

39. Cyon E. und Ludwig C.: Die Reflexe eines der sensiblen Nerven des Herzens auf die motorischen der Blutgefäße. Ber. d. math. phys. Cl. d. Sächs. Ges. d. Wissensch. 1866.
40. Dogiel J.: Die Ganglienzellen des Herzens bei verschiedenen Thieren und bei Menschen. Archiv f. mikr. Anat. Bd. XIV. 1877.
a) Die Nervenzellen nud Nerven des Herzventrikels beim Frosche. Archiv für mikr. Anatomie. Bd. XXI. 1882.
b) Die sensiblen Nervenendigungen im Herzen und in den Blutgefäßen der Säugethiere. Archiv f. mikr. Anatomie. Bd. 52.
c) L'anatomie comparée, la physiologie et la pharmacologie du coeur (en russe). Kazan. 1895.
41. Dogiel und Archangelsky: Die gefäßverengernden Nerven der Kranzarterien des Herzens. Archiv für die gesam. Physiol. Bd. 116. 1906. CXII.
42. Dogiel A. S.: Zur Frage über den feineren Bau der Herzganglien des Menschen und der Säugethiere. Archiv für Anat. u. Entw. Bd. 53. 1899.
43. Dogiel und Tumanzew: Zur Lehre über das Nervensystem des Herzens. Archiv f. mikr. Anat. Bd. 36.
44. Dorello: Osservazioni anatomiche ed embriologiche sopra la porzione intratoracica ed abdominale del nervo vago. Ricerche Lab. Anat. Roma e altri lab. biol. Vol. XIII. fas. 1/2.
45. Drobnik: Topographisch-anatomische Studien über den Halssympaticus. Archiv für Anat. und Entwickl. 1887.
46. Dumont: Recurrensläsionen bei Strumaperationen. Deut. Zeitsch. f. Chir. Bd. 104. 1910.
47. Ebner: Koelliker's Handbuch der Gewebelehre etc. I. III. 1902. Leipzig.
48. Eiguére: La topographie des ganglions intracardiaques chez le cobaye, la souris et l'homme. Thèse. Varsovie (en russe).
49. Eisenlohr: Ueber die Nerven und Ganglienzellen des menschlichen Herzens, nebst Bemerkungen zur pathologischen Anatomie desselben. Dissertation. München. 1886. Miteil. aus d. pathol. anat. Inst. in München, 1886.
50. Elze: Ueber den sogenannten Nervus laryngeus inferior des Lamas (Auchenia Lama). Anat. Anz. Bd. 42. 1912. No 16.
51. Engelmann Th. W.: Ueber die Leitung der Erregung in Herzmuskel. Pflüger's Archiv. 1875. XILVI. 1894.
a) Ueber die Wirkungen der Nerven auf das Herz. Archiv d. Physiol. 1900.
b) Bericht d. Berlin. Akad. d. Wissensch. 1901.
c) Beobachtungen am suspendiert. Herzen. Pflügei's Archiv. 1894.
d) Der Bulbus Aortae des Froschherzens. Pflüger's Archiv. XXIX. 1882.
e) Ueber myogene Selbstregulierung der Herztätigkeit. Akad. van Wettenschapp. Amsterdam. 1896.
f) Ueber den Ursprung der Herzbewegung und die physiologischen Eigenschaften der Herzwellen des Frosches. Pflüger's Archiv. LXL. 1896.
g) Myogene Theorie u. Innervation des Herzens. Die deutsche Klinik am Eing. d. XX. Jh. Bd. IX. 1907.
52. Exner: Die Innervation des Kehlkopfes. Sitzungsberichte der K. Akad. der Wissensch. in Wien. Bd. LXXXIX. 1884.
53. Finkelstein A.: Der Nervus depressor beim Menschen, Kaninchen, Hunde, bei der Katze und dem Pferde. Archiv f. Anat. u. Physiol. 1880.
54. François-Franck Ch.: Anatomie du nerf vertébral chéz l'homme et les mammiféres. Journal de Phys. et de Pathol. génér. t. I. 1899.

55. Franz: Zur Topographie des Nervus recurrens vagi. Brun's Beiträge zur klinischen Chirurgie. Bd. CXXII. 1921.
56. Fraser: The relations of the pneumogastric and other Nerve Fibres to the persistent arterial Arches. Trans. R. accad. of Med. in Irreland. vol. XXIV. 1906.
57. Friedländer: Ueber die nervösen Centralorg. des Froschherzens. Untersuch. aus dem physiol. Laborat. in Würzburg. 1867.
58. Gaskell: On the innervation of the heart. Journal of physiol. Vol. 4.
58a. Gaup: Anatomie des Frosches von Ecker u. Wiedersheim. 1896.
59. Gegenbaur G.: Zur vergleichenden Anatomie des Herzens. Jenaische Zeitschrift f. Med. Bd. 1866.
60. Van Gehuchten: Le système nerveux de l'homme. Lierre. 1893.
61. Van Gehuchten et Bochenek: Le nerf de Willis dans ses connexions avec le nerf pneumogastrique. Le Névraxe. Vol. II. fasc. 3. 1901.
62. Van Gehuchten et Molhant: Contribution à l'étude du nerf pneumogastrique chez l'homme.
63. Gerlach L.: Ueber die Nervenendigungen in der Musculatur des Froschherzens. Virchow Archiv. 1876.
a) Handbuch der allgemeinen und speziellen Gewebelehre. Mainz. 1848.
64. Gray H.: Anatomy descriptive and surgical. London. 1875.
65. Greil A.: Beiträge zur vergleichenden Anatomie und Entwicklungsgeschichte des Herzens und des Truncus arteriosus der Wirbelthiere. Leipzig. 1903.
66. Grossmann: Zur Anatomie und Physiologie des Nervus vagus-accessorius. Wiener med. Wochenschr. 1916. No 26.
67. Haas G.: Ueber die Gefässversorgung des Reizleitungssystems des Herzens. Anat. Hefte. Bd. 43. Heft 131. und Inaugur. Dissertation. Freiburg i. B. Juli 1911.
68. Haeberlin: Der anatomische Bau des nervus recurrens beim Kaninchen. Archiv f. Laryngologie und Rhinologie. Bd. XVIII. 1906.
69. Hart: A case of irregular origin and course of the right subclavian artery and right inferior laryngeal nerve. Edinb. med. and surgical Journal. t. XXV. 1826.
70. Henle: Handbuch der Nervenlehre des Menschen. 1879. Braunschweig.
71. Heymans: Ueber Innervation des Froschherzens. Archiv für Anatomie und Physiologie. Phys. Abth. 1893.
72. Hepburn: Large cardiac branch from the left superior laryngeal nerve reaching the superficial cardiac plexus independently. Journ. of Anat. and Phys. t. XXX. N. S. t. X. 1896.
73. Herbert: Le sympathique cervical. Étude anatomique et chirurgicale. Thèse de Paris. 1900.
74. Hilton: On the distribution and probable function of the superior and recurrent laryngeal nerves. Guys Hospital Reports. vol. II. 1837.
75. Hirschfeld: Traité et iconographie du système nerveux et des organes des sens de l'homme. 2-me ed. Paris. 1866.
76. His: Die morphol. Betrachtung der Kopfnerven. Archiv für Anatomie und Phys. Anat. Abth. 1887.
77. His junior: Abhandl. der Mathem. phys. Klasse der kgl. sächs. Ges. d. Wiss. Bd. XVIII. 1891.
a) Die Tätigkeit des embryonalen Herzens und deren Bedeutung für die Lehre von der Herzbewegung beim Erwachsenen. Arb. aus d. med. Klinik zu Leipzig. 1893.

78. His and Romberg: Beiträge zur Herzinnervation. Arb. aus d. med. Klinik zu Leipzig. 1893. Fortschritte für Medicin No 10/11. 1890.
79. Heidenhain M.: Plasma und Zelle. Jena. 1907.
80. Hefftter: Handbuch der experimentellen Pharmakologie. II. bd. I. Heft. Berlin. 1920.
81. Hoffmann F. B.: Handbuch der Physiol. des Menschen. Nagel I. 1903.
82. Holl: Ueber den Nervus accessorius Willisi. Archiv für Anat. und Physiol. 1878.
83. Hollzmann und Dogiel: Ueber die Lage und den Bau des Ganglion nodosum nervi vagi bei einigen Säugethieren. Archiv f. Anat. und Physiol. Anat. Abth. 1910. H. 12.
84. Hooper F. H.: Anatomie et physiologie des nerfs récurrents. Annales des maladies de l'oreille et du larynx. 1887 (Bibliographie).
85. Hovelacque: Les nerfs craniens. Anatomie macroscopique. Paris. 1923.
86. Jacques P.: Recherches sur les nerfs du coeur chez la grenouille et les mammifères. Journal de l'Anat. et de la physiologie. 30. 1894.
a) Contribution á l'étude des nerfs du coeur. C. R. Soc. biol. ser. 10. t. I.
b) L'état actuel de nos connaissances sur l'innervation du coeur. Archiv de la Phys. et de l'Anat. Sér. 5. t. 8. 1896.
87. Jaboulay M.: L'électrisation du sympathique cervical chez l'homme. Lyon médical. T. XCI. 1899.
88. Jouk N. N.: Contribution à l'étude des nerfs du coeur. Questions de la médecine nervopsychique. Vol. III. Kiew (en russe).
89. Kajawa: Die Kehlkopfnerve und die Arterienbogenderivate beim Lama. Zugleich ein Beitrag zur Morphologie der Halsäste des N. vagus. Anat. Anz. Bd. XL. 1911. No 10.
a) Der untere Kehlkopfnerv und der N. recurrens in zwei menschlichen Varietäten. Ofversigt af Finska Vetenskaps Societeten. Forhandlingar. Bd. LVII. 1914—1915.
90. Kazem-Beck: Zur Kenntniss der Herznerven. Archiv f. mikrosk. Anat. Bd. XXII. 1885.
a) Ueber das Vorkommen von Ganglien und einzelnen Nervenzellen auf Herzventrikel d. Menschen, der Säugethiere u. d. Vögel. Centralbl. f. d. Medic. Wiss. 1887. No 42.
b) Zur Abwehr. (Herzinnervation der Säugethiere.) Anat. Anz. Bd. 21. No 10/11.
91. Keith: Peculiar neuromusculare node at the junction of superior vena cava and right auricle. Proc. Anat. Soc. Great. Brit. and Ireland. Journal of Anat. Vol. 41.
92. Keith and Mackenzie: Recent researches of the anatomy of the heart. The Lancet. 1910.
93. Klug: Ueber die Herzinnervation des Frosches. Archiv f. Anatomie u. Phys. 1881.
94. Koch W.: Zur Anatomie und Physiologie der intracardialen motorischen Zentren des Herzens. Med. Klinik. 1912.
95. Koelliker: Handbuch der Gewebelehre. 1867.
a) Der feinere Bau und die Funktionen des sympathischen Nervensystems. Sitzungbericht der Physik. med. Gesellschaft zu Würzburg 1894.
b) Grundriss der Entwicklungsgesch. u. s. w. Leipzig. 1884.
96. Kohn: Ueber die Entwicklung des sympatischen Nervensystems der Säugethiere. Archiv für mikr. Anat. und Entwicklungsgesch. Bd. LXX. 1907.
97. Koplewsky: Sur le changement de l'automatie des ganglions du coeur sous l'influence de quelques procès pathol. dans le myocarde. Thèse. St. Petersbourg. 188 (en russe).

98. Kosaka K. und Yagita K.: Ueber den Ursprung des Herzvagus. Okajawa-Ygakkwai Zassi. 1907. No 211.
99. Koulesch: Contribution à l'anatomie pathologique des ganglions intracardiaques. Gaz. des hôpitaux de Botkine 1901. No 15—17 (en russe).
100. Köster: Ueber den Ursprung des N. depressor. Vorl. Mit. Neurol. Central. Bd. XX. 1901.
101. Krause: Anatomie des Kaninchen. 1868.
102. Kowalewsky u. Adamük: Einige Bemerkungen über den N. depressor. Centralbl. f. d. med. Wissensch. 1868.
103. Krehl und Romberg: Ueber die Bedeutung des Herzmuskels und der Herzganglien. Archiv für experim. Ther. und Pharm. T. 30. 1892.
Arbeiten a d. med. Klinik zu Leipzig. 1893.
104. Kreidmann A.: Anat. Unters. über den Nervus depressor beim Menschen und beim Hunde. Archiv f. Anatomie und Physiol. Anat. Abt. 1878.
105. Külbs und Lange W.: Anatomische und experimentelle Untersuchungen über das Reizleitungssystem im Eidechsenherzen. Zeitschr. f. experim. Pathol. u. Ther. Bd. 8.
106. Kuntz: The developpement of the sympathetic nervous system in Mammals, in Birds. Journ. of comp. Neurology and Psychology V. XX. 1910.
a) The evolution of the sympathetic nervous system in vertebrates. Journ. of comp. Neurology and Psychology. V. XXI. 1911.
107. Lahousse: Die Struktur der Nervenplexus in der Vorhofsscheidewand des Froschherzens. Archiv f. Anat. und Physiol. Abt. 1886.
108. Laignel-Lavastine: Note morphologique sur le ganglion de Wrisberg. C. R. de la Société de biologie. t. LXXXI. 1918.
109. Langer-Toldt: Lehrbuch der systematischen und topographischen Anatomie. 6 Aufl. Wien und Leipzig. 1897.
110. Langerdorff O.: Ueber die Innervation der Coronargefäße. Zentralbl. Phys. 1907.
111. Langerhans: Zur Histologie des Herzens. Virchow's Archiv. 1873.
112. Lee R.: On the ganglion and nerves of the heart. Philosophic. Trans. Vol. CXXXIX. London. 1848—1849.
113. Lesbre et Maignon: Sur les propriétés respectives du pneumogastrique et de la branche interne du spinal chez le porc. C. R. de l'Association des anatomistes. 9-e session Lille. 1907.
114. Lim Boon Keng: On the nervous suppley of the dog's heart. The Journ. of Physiol. Vol. XIV. 1893.
115. Lissauer M.: Ueber die Lage der Ganglionzellen des menschlichen Herzens. Archiv f. mikr. Anat. 1909.
116. Loewitt: Beiträge zur Kenntniss der Innervations des Herzens. Pflüger's Archiv. Bd. 23, 24, 25, 28, 29, 31.
117. Lomakina N.: Ueber die nervösen Verbindungen auf dem Herzen der Hunde und Pferde. Verh. der Berlinen physiol. Ges. Archiv f. Anat. u. Physiol. 1898.
a) Ueber Verlauf und Bedeutung der Herznerven. Zeitschr. f. Biologie. Bd. XXXIX. 1899. 1900. H. I.
118. Luciani: Handbuch der Physiologie.
119. Ludwig: Ueber die Herznerven des Frosches Müller's Archiv 1848.
a) Ueber den Bau und die Bewegungen der Herzventrikel. Zeitschr. f. rat. Medizin. Bd. 7. 1849.
120. Luschka H.: Der Nervus phrenicus des Menschen. Tübingen. 1853.
a) Die sensitiven Zweige des Zungenfleischnerven. Müller's Archiv. 1856.

121. Maas P.: Ueber die Gefäßnerven der Herzwand. Pflüger's Archiv. Bd. 71.
a) Experimentelle Untersuchungen über die Innervation der Kranzgefässe des Säugethierherzens. Pflüger's Archiv. Bd. 74.

122. Magnien: Étude des rapports entre les nerfs craniens et le sympathique céphalique chez les oiseaux. C. R. hebdomadaire de l'Acad. des Sciences. t. CIV. No 1.

123. Mannu: Osservazioni sul nervus depressor degli equini. Monitore Zoolog. italiano, anno 25. 1914. No 1.

123a Manouélion Y.: Recherches sur le plexus cardiaque. Ann. de l'Inst. Pasteur. Année 28. No 6.

124. Martin H. Newell: Vaso-motor nerves of the heart. Trans. of the med. and chirur. Faculty of the State of Maryland. 1891.

125. Meckel F.: Versuch einer Entwicklungsgeschichte der Centralteile des Nervensystems in den Säugethieren. Deutsches Archiv f. d. Physiol. Bd. I. 1815.

126. Michailoff S.: Contribution à l'étude de la structure du système intracardiaque des mammiféres. Travaux de la Soc. des Médecins Russes á St. Pétersbourg. Mars—Mai. 1907 (en russe).
a) Die Nerven des Endocardiums. Anat. Anz. Bd. 32. 1908.
b) Das intracardiale Nervensystem des Frosches und die Methode von Ramon y Cayal. Internat. Monatsschr. f. Anat. u. Physiol. Bd. 25. 1908.
c) Zur Frage über den feineren Bau des intracardialen Nervensystems der Säugethiere. Internat. Monatschr. f. Anat. u. Physiol. Bd. 25. 1908.
d) Die Nerven des Myocards bei vagotomierten Thieren. Folia neurobiologica. Bd. V. 1911.

127. Mollard J.: Les nerfs du coeur. Paris.
a) Les nerfs du coeur. Rev. génér. d'histologie. 1908. fasc. 9.

128. Mollgaard: Eine morphologische Studie über den Nervenkomplex vago-glosso, pharyngo, accessorius. Skandinavisches Archiv für Physiologie. Leipzig. 1911. Bd. XXV.

129. Morison: On the innervation of the sino-auriculare node (Keith-Flack) and the auriculo-ventricular bundle (Kent-His). Journal of Anat. and Physiol. Vol. 46.

130. Morris H.: A treatise on human Anatomy. London. 1893.

131. Moura-Bourouillou: Anastomose des nerfs laryngés. Revue de laryngologie. 1885.

132. Müller F.: Lehrbuch der Anatomie der Haus-Säugethiere mit besonderer Berücksichtigung des Pferdes und mit physiologischen Bemerkungen. Wien. 1885.

133. Müller: Das vegetative Nervensystem. Berlin. 1920.

134. Neubauer: Descriptio anatomica nervorum cardiacorum. Sectio I. De nervo intercostali cervicali. 1772.

135. Nicolai G. F.: Myogen oder Neurogen. Ergebnisse der wissensch. Medicin. Leipzig.
a) Die tatsächlichen Grundlagen einer myogenen Theorie des Herzschlages. Leipzig. Veit u. C. 1909 (Bibliographie).

136. Nicolajew: Zur Frage über die Innervation des Froschherzens. Kazan. 1893 (en russe).

137. Noc F.: Étude anatomique des ganglions nerveux du coeur etc. Bordeaux. 1899.

138. Onodi: Die Innervation des Kehlkopfes. Wien. 1895.
a) Die Anatomie und Physiologie der Kehlkopfnerven. Berlin. 1902.

139. Oppenchowsky: Beitrag zur Kenntnis der Nervenendigung im Herzen. Archiv f. mikr. Anatomie. Bd. 22. 1883.
140. Ott: Zur Kenntnis der Ganglionzellen des menschlichen Herzens. Prager medic. Wochenschr. 1886. No 20.
141. Owen R.: Notes on the Anatomy of the Nubian Giraffe. Transact. of the zoolog. Soc. of London. Vol. II. 1841.
a) On the Anatomy of Vertebrates. Vol. III. London. 1868.
142. Purkyně: Mikroskopische neurologische Beobachtungen. Müller's Archiv. 1845.
143. Ramon y Cajal: Sobre les terminaciones nerviosos del corazon de las batrachios y reptiles. Gaceta sanitaria de Barcelona. Aout. 1890.
a) Terminaciones nerviosos en el corazon de las mamiferos. Ibidem 1891. avril.
144. Ranvier: Traité technique d'histologie. Paris. 1888.
145. Rauber A.: Lehrbuch der Anatomie des Menschen. Leipzig. 1893.
146. Regnier: Les nerfs du coeur. Paris. 1880.
147. Remak: Neurologische Erläuterung. Müller's Archiv. 1884.
a) Ueber den Bau des Herzens. Archiv f. Anatomie, Physiologie u. wiss. Medizin. 1850.
148. Retzius: Biologische Untersuchungen. 1892. III. N. F. Heft 3.
149. Romberg: Beiträge zur Herzinnervation. Verhand. d. Kongress. f. innere Medizin. 1890.
150. Romberg u. His: Beiträge zur Herzinnervation. Fortschritte f. Medizin. No 10 u. 11. 1890.
151. Rüdinger N.: Anatomie der menschlichen Gehirnnerven. München. 1868.
152. Sappey Ph.: Traité d'anatomie descriptive. Paris. 1871.
153. Scarpa: Tabulae neurologicae ad illustrandam historiam anatomicam cardiacorum nervorum, noni nervorum cerebri, glossopharyngei et pharyngei ex octavo cerebri. Ticini 1794. Apud Balthassarem Comini.
154. Schäfer: Les vaisseaux coronaires ont-ils des nerfs vasomoteurs? Archives des Soc. biol. p. p. l'Inst. Imper. de Méd. expérim. a St. Petersbourg. t. II. 1904. Suppl.
155. Schaternikoff und Friedenthal: Ueber den Ursprung und den Verlauf der herzhemmenden Fasern. Archiv f. Anat. u. Physiol. Phys. Abth. 1902.
156. Schiff: Ueber die Funktion der mittleren und unteren Cervicalganglien des Hundes. Moleschoff's Unters. Bd. XI. 1874.
157. Schmidt: Contribution à l'étude de l'innervation du coeur. Archives de la Pathologie de Podwyssotzky. 1897 (en russe).
158. Schneider P.: Topographische Anatomie des Vorderhalses beim Kaninchen und des Kehlkopfes desselben. Inaug. Diss. Berlin. 1867.
159. Schiefferdecker u. Kassel: Gewebelehre. 1891.
160. Schklarewsky: Ueber die Anordnung der Herzganglien bei Vögeln und Säugethieren. Göttinger Nachrichten. 1872. No 20.
161. Schumacher S.: Zur Frage der Herzinnervation bei den Säugethieren. Vorl. Mitth. Anat. Anz. Bd. XXI. 1902.
a) Zur Frage der Herzinnervation bei den Säugethieren. Anat. Anz. 1902. No 1. (Les nerfs du coeur du lion).
b) Die Herznerven der Säugethiere und des Menschen. Sitzungsberichte der K. Akad. der Wiss. Math. Nat. Classe. CXI. Band. VII—X. Heft. Wien. 1902.
c) Ueber die Kehlkopfnerven beim Lama (Auchenia Lama) und Vicunna (Auchenia Vicunna). Anat. Anz. Bd. XXVIII.

162. Schwalbe: Lehrbuch der Neurologie. Hoffmann's Lehrbuch der Anatomie des Menschen. Erlangen. 1881.
163. Schwartz: Ueber Ganglienzellen am Herzen der Säugethiere. Deutsche Medic. Woch. 1898. No 30.
a) Ueber die Lage der Ganglienzellen im Herzen der Säugethiere. Archiv f. Anatomie und Entwickl. t. 53. 1899. Archiv f. mikr. Anat. 53.
164. Schweiger-Seidel: Stricker's Handbuch der Gewebelehre. 1868—1871.
165. Selenka E.: Vögel. Bronn's Classen und Ordnungen des Thierreichs. Bd. VI. Leipzig. 1891.
166. Smirnoff: Ueber die sensiblen Nervenendigungen im Herzen etc. Anat. Anz. 1895. No 25.
a) Zur Frage von der Endigung der motorischen Nerven in den Herzmuskeln der Wirbelthiere. Anat. Anz. Bd. 18. 1900.
b) Einige Bemerkungen über die Existenz von Ganglienzellen in den Herzventrikeln des Menschen und einiger Säugethiere. Anat. Hefte. Bd. 27. Heft 81.
167. Solinville A.: Anatomica desquisitio et descriptio Nervi pneumogastrici in corpore humano. Dissert. inaug. Turici. 1838.
168. Stoerk K.: Zur Erklärung des Schock nach Larynxextirpation. Wiener medic. Wochenschr. 1888.
169. Stricker S. u. Wagner I.: Untersuchungen über die Ursprünge und die Funktion der beschleunigenden Herznerven. Wiener Akademie. Ber. Abth. III. Bd. LXXVII. 1878.
170. Tandler: Anatomie des Herzens in Handbuch der Anatomie des Menschen herausgegeben von Bardeleben.
171. Tawara: Das Reizleistungssystem des Säugethierherzens. Jena. Fischer. 1906.
172. Thebault M. V.: Étude des rapports qui existent entre les systèmes pneumogastrique et sympathique chez les oiseaux. Annal. des sciences natur. Zoologie et paléontol. t. IV. 1898.
173. Theile F.: De musculis nervisque laryngeis. Dissert. inaug. Jenae. 1825.
174. Thomson, Schäfer and Thane: Quain's elements of Anatomy. London 1882.
175. Toldt: Lehrbuch der Gewebelehre. Stuttgart. 1888.
176. Tschirvinsky S.: Untersuchungen über den Nervus depressor in anatomischer, physiologischer und pharmakologischer Hinsicht. Centralbl. f. Physiol. Bd. IX. 1896.
177. Tumianzeff: Contribution à l'étude de l'activité rythmique du coeur. XII. Congrès des naturalistes et des médecins russes (en russe).
178. Veraglia S. et Conti A.: Sur la présence des cellules nerveuses le long des nerfs cardiaques et dans quelques autres nerfs de l'homme. Archiv italien de Biologie. t. IX. 1888.
179. Vieussens R.: Neurographia universalis. Lugdunni. 1664.
180. Vignal W.: Recherches sur l'appareil ganglionnaire du coeur des vertébrés. Archiv de Physiol. II. Série VIII. 1881.
181. Vignal: Système nerveux du coeur du lapin. Gaz. méd. de Paris. 1880. No 49.
a) Système nerveux du coeur de la tortue mauresque. Gaz. méd. de Paris. 1830. No 45.
b) Recherches sur l'appareil ganglionnaire du coeur des vertébrés. Archives de Physiologie. 1881. t. 8. série 2.
182. Viti: Ricerche di morfologia comparata sopra il nervo depressore nell'uomo e negli altri mammiferi. Societá toscana de Sc. naturali. 1883.
a) Sur le nerf dépresseur chez l'homme et chez les autres mammiféres. Arch. ital. de Biologie. t. V. 1884.

183. Vogt u. Yung: Praktische vergleichende Anatomie. Braunschweig. 1889—1894.
184. Waledinsky: Zur Frage über die Nervenknoten im Herzventrikel einiger Säugethiere. Anat. Hefte. Bd. 27. H. 81.
a) Contribution à l'étude du système intracardiaque des mammiféres. Travaux de la Soc. des médecins russes á St. Petersbourg. Mars—mai. 1907 (en russe).
185. Weigner: Topografická anatomie hrudníku. 1918.
186. Weinrich: Ueber Nerven und Ganglienzellen in Säugethierherzen. Inaug. Dissert. 1888 (d'après Waledinsky).
187. Wertheimer et Gaudier: De l'influence du cordon cervical du sympathique sur la fréquence des mouvements du coeur chez l'homme. C. R. des séances de la Soc. de Biol. 1901.
188. Werigo: La physiologie de l'homme et des animaux supérieurs. Vol. I. St. Petersbourg. 1905 (en russe).
189. Wertheimer E.: Sur les anastomoses réciproques des deux pneumogastriques dans le thorax de l'homme. Bull. de la Soc. de Biol. 1901. t. III. No 28.
190. Willis: Cerebri anatome, cui accessit nervorum descriptio et usus. 1664.
191. Wilson: Is the atrio-ventricular bundle to be regarded as a neuromuscular spindle. Anat. Record. vol. 3. No 4.
a) Nerves of the atrio-ventricular bundle. Proc. of the R. Soc. Londdon. Ser. Biol. Ser. Vol. 81. No 546.
b) The nerves of the atrio-ventricular bundle. Anat. Record. vol. 3. No 4.
192. Wooldridge L.: Ueber die Funktion der Kammernerven des Säugethierherzens. Archiv f. Anat. u. Physiol. 1883.
193. Zuckerkandl: Beobachtungen über Herznerven und den Auricularis vagi. Sitzungsber. d. Wier. Akad. d. Wiss. Bd. 62. 1870.
194. Zibulsky et Wartonow: Les relations entre les dépresseurs et le pneumogastrique. Gaz. des hôpitaux de Botkine 1883 (en russe).
195. Tigerstedt: Die Physiologie des Kreislaufes. Zweiter Band. Berlin u. Leipzig. 1921.

Les semiinvariants du troisième degré.

Par

J. JARUŠEK.

(Présenté le 28 Novembre 1924.)

Les semiinvariants irréductibles du troisième degré par rapport aux coéfficients d'une forme binaire du $n^{ième}$ degré

$$a_0 x_1^n + n a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + a_n x_2^n$$

sont de deux sortes. Les uns contiennent dans le terme le plus bas deux fois l'indice zéro et peuvent donc avoir les membres les plus bas

$$a_0^2 a_3,\ a_0^2 a_5,\ a_0^2 a_7,\ \ldots,$$

les semiinvariants avec les membres les plus bas $a_0^2 a_2,\ a_0^2 a_4,\ \ldots$ étant réductibles. Nous pouvons facilement déterminer les semiinvariants avec les termes les plus bas déjà cités et ils sont au nombre $E\left(\frac{n-1}{2}\right)$. Les autres semiinvariants irréductibles du troisième degré ont seulement un indice zéro dans leur terme le plus bas et peuvent être exprimés à l'aide des déterminants du troisième ordre dans la forme

$$\Sigma\, \alpha_{ijk} \begin{vmatrix} a_i & a_{j+1} & a_{k+2} \\ a_{i+1} & a_{j+2} & a_{k+3} \\ a_{i+2} & a_{j+3} & a_{k+4} \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

où $i,\ j,\ k$ sont des nombres entiers $\geqq 0$ satisfaisant à la condition

$$i + j + k = w - 6,$$

si w est la valeur du semiinvariant donné. Le nombre des semiinvariants de cette forme, qui sont linéairement indépendants et du poids w, est égal au nombre des déterminantes de (1), où $i + j + k = w - 6$, diminué du nombre des déterminants, où $i + j + k = w - 7$. Puisqu'à chaque déterminant de (1) correspond un produit $a_i\, a_j\, a_k$, on en déduit le théorème suivant:

Le nombre des semiinvariants linéairement indépendants du troisième degrè et de poids w avec l'indice zéro dans le terme le plus bas appartenant

à la forme du n-ième degré, que nous désignerons par $[w, n]_3$, *est égal au nombre de tous les semiinvariants linéairement indépendants du troisième degré et de poids* $w - 6$ *appartenant à la forme du degré* $n - 4$.

De là suivent les équations récurrentes

$$[w, n]_3 = [w - 6,\ n - 4]_3,\ w > n + 2$$
$$[w, n]_3 = [w - 6,\ n - 4]_3 + 1 \text{ pour } w \leqq n + 2,\ w > 7.$$

Nous obtenons par la résolution

$$[w, n]_3 = E\left(\frac{w}{6}\right) - E\left(\frac{w - n + 1}{2}\right) - 1,$$

si w est de la forme $6r + 1$ et dans les autres cas:

$$[w, n]_3 = E\left(\frac{w}{6}\right) - E\left(\frac{w - n + 1}{2}\right).$$

En faisant la sommation de $[w, n]_3$ pour toutes les valeurs possibles de w, du théorème précédent nous tirerons le suivant:

Le nombre des semiinvariants linéairement indépendants du troisième degré avec l'indice unique zéro dans le terme le plus bas appartenant à la forme du n-ième degré, que nous désignerons par $P_3^{(n)}$, *est égal au nombre de tous les semiinvariants linéairement indépendants du troisième degré appartenant à la forme de l'ordre* $n - 4$.

Ce théorème est exprimé par la formule

$$P_3^{(n)} = P_3^{(n-4)} + n - 4.$$

De là

$$P_3^{(n)} = E\,\frac{(n-2)^2 + 4}{8}.$$

Par l'adjonction des semiinvariants avec deux indices zéro dans le terme le plus bas, au nombre $E\left(\frac{n-1}{2}\right)$ nous obtiendrons le nombre de tous les semiinvariants irréductibles du troisième degré

$$P^{(n)} = E\,\frac{n^2}{8}.\text{*)}$$

II.

Dans la suite, les semiinvariants du troisième degré sont exprimés à l'aide du déterminant. Ayant $\Delta A_k = k A_{k-1}$ pour les expressions

$$A_k = \frac{1}{k+1}\,|\,0,\ k+1\,|,\ |\,0,\ k+1\,| = \begin{vmatrix} a_0 & a_{k+1} \\ a_1 & a_{k+2} \end{vmatrix},$$

l'expression

$$k\,[a_0 A_{k-1} - (k-1)\,a_1 A_{k-2} + \ldots + (-1)^{k-1} a_{k-1} A_0]$$

*) M. Petr a déduit ce résultat d'une manière différente dans les Mémoires de l'Académie de Prague VI. n. 38.

ou arrangée

$$a_0 \,|\, 0, k \,| - \binom{k}{1} a_1 \,|\, 0, k-1 \,| + \binom{k}{2} a_2 \,|\, 0, k-2 \,| - \ldots +$$
$$+ (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} a_{k-1} \,|\, 0, 1 \,|$$

est un semiinvariant. Nous obtenons pour les différents k pairs les semiinvariants irréductibles avec le terme le plus bas $a_0^2 \, a_{k+1}$.

Nous obtiendrons de même les semiinvariants avec l'indice unique zéro dans le terme le plus bas. L'expression

$$A_{ij} = |\, 0, i+r, j \,| - \binom{r}{1} |\, 1, i+r-1, j \,| + \binom{r}{2} |\, 2, i+r-2, j \,| -$$
$$- \ldots + (-1)^r \,|\, r, i, j \,|,$$

où sont écrits seulement les indices de la première ligne de chaque déterminant, satisfait à l'équation

$$\Delta A_{ij} = i \, A_{i-1,j} + j \, A_{i,j-1} .$$

Par conséquent l'expression

$$I = A_{0k} - k \, A_{1,k-1} + \binom{k}{2} A_{2,k-2} - \ldots + (-1)^k A_{k0}$$

est un semiinvariant. Pour que cette expression ne contienne pas les déterminants avec deux indices égaux ou avec un indice plus grand devant un autre plus petit, son arrangement peut être facilement fait. Nous obtiendrons tous les sémiinvariants irréductibles possibles pour les différents r et pour les différents k impairs. Les semiinvariants du poids w obtenus de cette manière ont tous pour les r différents les termes les plus bas $a_0 \, a_2 \, a_{w-2}$. Par l'addition des semiinvariants convenables au r le plus bas, nous obtiendrons tous les semiinvariants avec les différents termes les plus bas de la forme

$$a_0 \, a_{2k} \, a_{4k+l}, \; k > 0, \; l = 0, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Sur les semiinvariants.

Par

J. JARUŠEK.

(Présenté le 28 Novembre 1924.)

Soit donné le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} A_0, & A_1, & \ldots, & A_n \\ A_1, & A_2, & \ldots. & A_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_n, & A_{n+1}, & \ldots, & A_{2n} \end{vmatrix},$$

dans lequel $\Delta_{21} A_k = k A_{k-1}$; Δ_{21}, Δ_{12} sont les opérations connues. Nous voulons effectuer Δ_{21} sur le subdéterminant quelconque de D, par exemple sur le déterminant du troisième degré dont nous écrirons seulement les éléments dans la première ligne et colonne,

$$U = \begin{vmatrix} A_\alpha, & A_\beta, & A_\gamma \\ A_\delta & & \\ A_\varepsilon & & \end{vmatrix}.$$

Pouvant effectuer les opérations Δ sur les produits symboliques, nous écrirons symboliquement

$$A_\lambda \, . \, A_\mu = A_{\lambda+\mu}.$$

Nous allons encore distinguer les différentes colonnes par des indices au-dessus, de sorte que nous aurons

$$U = \begin{vmatrix} A_\alpha^{(1)} & A_\beta^{(2)} & A_\gamma^{(3)} \\ A_\delta^{(1)} & & \\ A_\varepsilon^{(1)} & & \end{vmatrix} = A_\alpha^{(1)} A_\beta^{(2)} A_\gamma^{(3)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A_{\delta-\alpha}^{(1)} & & \\ A_{\varepsilon-\alpha}^{(1)} & & \end{vmatrix}.$$

Si nous effectuons maintenant Δ_{21} et si nous passons à l'écriture non symbolique, nous obtenons la formule suivante:

$$\Delta_{21} \begin{vmatrix} \alpha\ \beta\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \alpha-1\ \beta\ \gamma \\ \delta-1 \\ \varepsilon-1 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} \alpha\ \beta-1\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} \alpha\ \beta\ \gamma-1 \\ \delta \\ \varepsilon \end{vmatrix} +$$

$$+ (\delta-\alpha) \begin{vmatrix} \alpha & \beta\ \gamma \\ \delta-1 & \\ \varepsilon & \end{vmatrix} + (\varepsilon-\alpha) \begin{vmatrix} \alpha & \beta\ \gamma \\ \delta & \\ \varepsilon-1 & \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

où nous avons écrit seulement les indices. Si nous effectuons la considération précédente par rapport aux lignes, nous arriverons à une formule semblable

$$\Delta_{21}\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \delta & & \\ \varepsilon & & \end{vmatrix} = \alpha\begin{vmatrix}\alpha-1 & \beta-1 & \gamma-1\\ \delta & & \\ \varepsilon & & \end{vmatrix} + \delta\begin{vmatrix}\alpha & & \beta & \gamma\\ \delta-1 & & & \\ \varepsilon & & & \end{vmatrix} +$$

$$+\varepsilon\begin{vmatrix}\alpha & & \beta & \gamma\\ \delta & & & \\ \varepsilon-1 & & & \end{vmatrix} + (\beta-\alpha)\begin{vmatrix}\alpha & \beta-1 & \gamma\\ \delta & & \\ \varepsilon & & \end{vmatrix} + (\gamma-\alpha)\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma-1\\ \delta & & \\ \varepsilon & & \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Les formules équivalentes sont valables, si les différentes colonnes ont les symboles différents. Des formules (1) ou (2), il suit immédiatement que D est semiinvariant. Mais on peut encore former les semiinvariants comme les sommes des subdéterminants ou des produits des subdéterminants de U, multipliés par les coefficients convenables. On peut déterminer les coefficients ainsi que chez les semiinvariants complètement développés. Par exemple les expressions

$$\begin{vmatrix}a_0 & a_2\\ a_1 & a_3\end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix}a_0 & a_1\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ a_2 & a_3\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}a_0 & a_1 & a_4\\ a_1 & a_2 & a_5\\ a_2 & a_3 & a_6\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}a_0 & a_2 & a_3\\ a_1 & a_3 & a_4\\ a_2 & a_4 & a_5\end{vmatrix}$$

sont les semiinvariants. Il suffit toujours de choisir les subdéterminants seulement des premières lignes de D, qui se suivent l'une après l'autre.

Si nous remplaçons en U les seconds indices écrits dans A_i par les premiers indices non écrits, nous obtiendrons de (1) ou (2) la formule pour $\Delta_{12}U$. D'après cette formule on peut calculer les termes suivants du covariant, qui a le semiinvariant U pour le premier terme. Dans quelques cas, on peut facilement déterminer le terme général.

Il suit de l'expression symbolique des semiinvariants, que nous pouvons employer les déterminants pour l'expression de chaque semiinvariant. On peut exprimer par le déterminant unique les produits symboliques

$$(a\,b) = |a_0\,b_0|,\quad (a\,b)\,(a\,c)\,(b\,c) = |a_0\,b_0\,c_0|,\quad (a\,b)\,(a\,c)\,(a\,d)\,(b\,c)\,(b\,d)\,(c\,d) = |a_0\,b_0\,c_0\,d_0|, \ldots;$$

on a écrit seulement les premières lignes de chaque déterminant. Du produit symbolique

$$M = (a\,b)^\alpha\,(a\,c)^\beta\,(b\,c)^\gamma \ldots$$

nous allons choisir les groupes de la forme la plus elevée et nous les remplacerons par les déterminants. Quelques symboles peuvent rester et ces coefficients se présenteront linéairement dans M (mais non dans les déterminants). L'adjonction des expressions suivantes $(m\,n)$ a pour conséquence d'obtenir plus de pareils produits.

Les membres en diagonale d'un tel produit forment le terme le plus bas*) du semiinvariant M. L'expression de M, décrite plus haut peut toujours être exécutée de façon que le membre diagonal de chaque déterminant pareil, même du premier degré (c'est à dire des coefficients qui se présentent dans M linéairement) contienne un coefficient avec l'indice zéro. De cette façon, la forme que peut prendre le terme le plus bas, est beaucoup limitée.

Le nombre des coefficients qui se présentent linéairement dans chaque produit des déterminants, par lesquels M est exprimé, peut être souvent diminué, si nous décomposons convenablement M. Pour les semiinvariants d'une forme unique c'est toujours possible. Chaque semiinvariant irréductible d'une forme unique peut être exprimé par les produits contenant linéairement (pas dans les déterminants) tout au plus une fois quelque coefficient de la forme donnée.

Comme exemple, on ajoute le système complet des semiinvariants irréductibles de la forme du cinquième degré, exprimés par les déterminants.

---

*) Le terme $a_0^{\alpha}\ a_1^{\beta}\ a_2^{\gamma}\ldots\ b_0^{\delta}\ b_1^{\varepsilon}$ est plus bas que $a_0^{\alpha'}\ a_1^{\beta'}\ a_2^{\gamma'}\ldots\ b_0^{\delta'}\ b_1^{\varepsilon'}\ \ldots$, si la première des expressions $\alpha'-\alpha,\ \beta'-\beta,\ \gamma'-\gamma,\ldots,\ \delta'-\delta,\ \varepsilon'-\varepsilon,\ldots$, qui est différente du zéro, est positive.

Sur les points à coordonnées entières dans le plan.

Par

VOJTĚCH JARNÍK.

(Présenté le 24 Octobre 1924.)

Soit (pour $x > 0$) $B(x)$ le nombre des points à coordonnées entières („Gitterpunkte"), intérieurs au cercle $u^2 + v^2 = x$. Si l'on pose $B(x) = \pi x + R(x)$, on a, d'après un théorème bien connu de M. Sierpiński, $R(x) = O(x^{1/3})$. Ce résultat a été étendu à des courbes plus générales par différents auteurs. D'autre part, on sait d'après M. M. Hardy et Landau que la relation $R(x) = O(x^{1/4-\varepsilon})$ n'est pas exacte pour aucune valeur positive de la constante ε. On connaît, dans cet ordre d'idées, des résultats plus précis, dont je ne cite que le théorème suivant de M. Landau[1]):

Il existe trois nombres positifs C_1, C_2, C_3 *tels que, pour tout* $\xi > C_1$, *il existe un point* x_1 *au moins tel que*

$$\xi \leqq x_1 \leqq \xi + C_2 \sqrt{\xi} \text{ et } R(x_1) > C_3 x_1^{1/4}, \text{ et un point } x_2 \text{ au moins tel que}$$

$$\xi \leqq x_2 \leqq \xi + C_2 \sqrt{\xi} \quad et \quad R(x_2) < -C_3 x_2^{1/4}.$$

L'extension de ce théorème à des courbes plus générales fait l'objet du présent Mémoire.[2])

Soient u, v deux axes rectangulaires. Dans le plan de ces axes soit donnée une courbe continue, fermée et convexe L, contenant l'origine à son intérieur. Nous supposerons en outre que la courbe L satisfait aux conditions suivantes: Il existe trois nombres positifs ε, K, k jouissant des propriétés suivantes:

---

[1]) „Über die Gitterpunkte in einem Kreise" V, Göttinger Nachrichten 1924, p. 135—136; voir aussi les résultats plus généraux, contenus dans le Mémoire „Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen", ibid. p. 137—150.

[2]) Pour les détails bibliographiques et pour les démonstrations plus détaillées voir mon Mémoire original („O mřížových bodech v rovině", Rozpravy Č. Ak., 1924.).

Si nous introduisons un autre système de coordonnées rectangulaires ξ, η par les équations

$$\xi = u \cos\varphi + v \sin\varphi, \quad \eta = -u \sin\varphi + v \cos\varphi$$

(φ quelconque), la courbe L sera représentée par les équations suivantes

$$\eta = f_{1,\varphi}(\xi), \quad \eta = f_{2,\varphi}(\xi),$$

où ξ parcourt un certain intervalle $\xi'_\varphi \leqq \xi \leqq \xi_\varphi$; $f_{1,\varphi}(\xi)$, $f_{2,\varphi}(\xi)$ sont continues pour $\xi'_\varphi \leqq \xi \leqq \xi_\varphi$ et possèdent une dérivée seconde continue pour $\xi'_\varphi < \xi < \xi_\varphi$; en outre, pour $\xi'_\varphi < \xi < \xi_\varphi$, on a $f_{1,\varphi}(\xi) > f_{2,\varphi}(\xi)$.[3]) Pour $\xi_\varphi - \varepsilon \leqq \xi \leqq \xi_\varphi$, on a

$$f_{1,\varphi}(\xi) = \eta_\varphi + h_\varphi \sqrt{\xi_\varphi - \xi} + k_\varphi(\xi_\varphi - \xi) + l_\varphi(\xi_\varphi - \xi)^{3/2} + \Phi_{1,\varphi}(\xi),$$

$$f_{2,\varphi}(\xi) = \eta_\varphi - h_\varphi \sqrt{\xi_\varphi - \xi} + k_\varphi(\xi_\varphi - \xi) - l_\varphi(\xi_\varphi - \xi)^{3/2} + \Phi_{2,\varphi}(\xi).$$

Les fonctions $\Phi_{1,\varphi}(\xi)$, $\Phi_{2,\varphi}(\xi)$ possèdent une dérivée seconde continue pour $\xi_\varphi - \varepsilon \leqq \xi \leqq \xi_\varphi$[4]) et l'on a

$$\Phi_{i,\varphi}(\xi_\varphi) = \Phi'_{i,\varphi}(\xi_\varphi) = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

$\Phi''_{i,\varphi}(\xi)$ est monotonne et en valeur absolue plus petite que K pour $\xi_\varphi - \varepsilon \leqq \xi \leqq \xi_\varphi$. De plus, on a $|h_\varphi| < K$, $|l_\varphi| < K$, $h_\varphi > k$ pour tous les φ. Enfin, $f''_{i,\varphi}(\xi)$ a pour $-\xi_{\varphi+\pi} + \varepsilon \leqq \xi \leqq \xi_\varphi - \varepsilon$ au plus K intervalles de monotonie et est plus petite que K en valeur absolue.[5])

Soit, pour $x \geqq 1$, $L(x)$ la transformée de L par l'homothétie du rapport $\sqrt{x}$ par rapport à l'origine, c'est-à-dire le lieu du point $(\sqrt{x}\,u, \sqrt{x}\,v)$, quand le point (u, v) décrit la courbe L.

Je désigne par J, resp. $J(x)$ l'aire du domaine intérieur à L, resp. $L(x)$ (on a $J(x) = Jx$); par $A(x)$, le nombre des points à coordonnées entières à l'intérieur de $L(x)$, les points sur la courbe $L(x)$ étant comptés avec le poids $1/2$. Je pose enfin $A(x) = Jx + Q(x)$.

I. Identités pour $A(x)$ et $\int_1^x A(y)\,dy$.

Soient γ, δ ($\gamma < \delta$) deux nombres de la forme „*nombre entier* $+ \frac{1}{2}$“; soit $F(x)$ une fonction, définie pour $\gamma \leqq x \leqq \delta$, dont la variation totale dans $<\gamma, \delta>$ est égale à N, et soit $|F(x)| \leqq M$ dans $<\gamma, \delta>$; on a alors l'égalité bien connue

---

[3]) Après une rotation des axes de grandeur π, on voit immédiatement que

$$\xi_{\varphi+\pi} = -\xi'_\varphi, \quad \xi'_{\varphi+\pi} = -\xi_\varphi, \quad f_{1,\varphi}(\xi) = -f_{2,\varphi+\pi}(-\xi), \quad f_{2,\varphi}(\xi) = -f_{1,\varphi+\pi}(-\xi).$$

[4]) Dans tous le cas où je parle de dérivées à une extrémité de l'intervalle dans lequel la fonction est définie, j'entends les dérivées unilatérales, prises du côté correspondant.

[5]) Évidemment, ξ_φ a, comme fonction de φ, une borne inférieure positive; nous supposerons, pour simplifier, que le nombre ε est suffisamment petit pour que l'on ait $-\xi_{\varphi+\pi} + \varepsilon < \xi_\varphi - \varepsilon$ pour tous les φ. Une conséquence immédiate de l'inégalité $h_\varphi > k$ est l'existence d'une borne inférieure positive de la courbure de L.

$$(1) \qquad \sum_{\gamma < n < \delta} \frac{F(n-0) + F(n+0)}{2} = \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \int_{\gamma}^{\delta} \cos 2a\pi x \,.\, F(x)\, dx,$$

où la somme à gauche s'étend sur tous les nombres entiers n avec $\gamma < n < \delta$.

Lemme 1er. *Dans les conditions indiquées, en posant*

$$S_{m,n}(F,\ \gamma,\ \delta) = \sum_{a=m}^{n} \int_{\gamma}^{\delta} \cos 2a\pi x \,.\, F(x)\, dx \quad (n \geqq m,\ n,\ m \text{ entiers}),$$

on a

$$|S_{m,n}(F,\ \gamma,\ \delta)| < A(\delta - \gamma)(M + N),$$

où A désigne une constante absolue.

Je supprime la démonstration de ce lemme, qui est bien facile.

Pour simplifier, je suppose toutes les intégrales au sens de Lebesgue.

Je ferai usage du théorème suivant de M. Lebesgue[6]):

Si $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ pour tous les x avec $a \leqq x \leqq b$, que $f_n(x)$ soient intégrables dans l'intervalle (a, b), et qu'il existe un nombre K tel que $|\sum_{n=1}^{m} f_n(x)| < K$ pour tout nombre entier $m \geqq 1$ et pour tous les x avec $a \leqq x \leqq b$, alors la fonction $f(x)$ est elle-même intégrable dans (a, b), et l'on a

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

Pour démontrer les identités indiquées, je me servirai de la méthode, due à M. Landau.[7]) Soit $x \geqq 1$; je pose $F(u, v, x) = \left\{\begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{matrix}\right\}$, si le point (u, v) est situé $\left\{\begin{matrix} \text{à l'intérieur de} \\ \text{sur} \\ \text{à l'extérieur de} \end{matrix}\right\} L(x)$.

Nous choisissons les nombres α, β, γ, δ de forme „nombre entier $+ \frac{1}{2}$" de façon que $L(x)$[8]) soit située complètement à l'intérieur du rectangle $\alpha < u < \beta$, $\gamma < v < \delta$. Pour chaque u avec $\alpha < u < \beta$, en posant

$$f(u, x) = \sum_{\gamma < n < \delta} \frac{F(u, n-0, x) + F(u, n+0, x)}{2},$$

on a évidemment [d'après (1)]

$$(2) \qquad f(u, x) = \sum_{b=-\infty}^{+\infty} \int_{\gamma}^{\delta} \cos 2b\pi v \,.\, F(u, v, x)\, dv.$$

---

[6]) Valable dans les conditions plus générales.

[7]) „Die Bedeutungslosigkeit der Pfeiffer'schen Methode für die analytische Zahlentheorie", Monatshefte für Math. u. Phys. 34.

[8]) Et a fortiori tout $L(y)$ avec $1 \leqq y \leqq x$.

En appliquant à $f(u, x)$ la formule (1), on a enfin

$$(3)\qquad \sum_{\alpha<n<\beta} \frac{f(n-0,\,x)+f(n+0,\,x)}{2} = \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \cos 2a\pi u \,.\, f(u, x)\, du =$$

$$= \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \cos 2a\pi u \left(\sum_{b=-\infty}^{+\infty} \int_{\gamma}^{\delta} \cos 2b\pi v \,.\, F(u, v, x)\, dv \right) du.$$

On constate aisément, en vertu de notre lemme et du théorème de M. Lebesgue, que l'on peut intervertir l'ordre des opérations $\int_{\alpha}^{\beta} du$ et $\sum_{b=-\infty}^{+\infty}$; l'expression à droite de (3) est alors égale à

$$\sum_{a=-\infty}^{+\infty} \sum_{b=-\infty}^{+\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \cos 2a\pi u \left(\int_{\gamma}^{\delta} \cos 2b\pi v \,.\, F(u, v, x)\, dv \right) du =$$

$$= \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \sum_{b=-\infty}^{+\infty} P(x, a, b),$$

où l'on a posé

$$P(x, a, b) = \int\int_{L(x)} \cos 2a\pi u \cos 2b\pi v \, du\, dv,$$

l'intégrale double étant étendue à l'intérieur de $L(x)$.

L'expression à gauche de (3) est, comme le montre une considération bien facile, égale à $A(x) - \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)$, où $\left\{ \begin{matrix} \varepsilon_1(x) \\ \varepsilon_2(x) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}$, si le point de $L(x)$ qui est situé le plus $\left\{ \begin{matrix} \text{haut} \\ \text{bas} \end{matrix} \right\}$ a pour ses coordonnées des nombres entiers (c'est-à-dire est un „Gitterpunkt"), $\left\{ \begin{matrix} \varepsilon_1(x) \\ \varepsilon_2(x) \end{matrix} \right\} = 0$ dans tous les autres cas. Ainsi nous obtenons la première des identités cherchées:

Pour $x \geq 1$, *on a*

$$(\mathrm{I})\qquad A(x) - \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x) = \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \sum_{b=-\infty}^{+\infty} P(x, a, b).$$

Je construis ensuite

$$\int_{1}^{x} \left(\sum_{a=-\infty}^{+\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \cos 2a\pi u \,.\, f(u, y)\, du \right) dy;$$

cette expression est, d'après (3), égale à $\int_{1}^{x} A(y)\, dy$. D'après notre lemme et d'après le théorème de M. Lebesgue, on voit aisément que l'on peut intervertir l'ordre des opérations $\int_{1}^{x} dy$ et $\sum_{a=-\infty}^{+\infty}$; on obtient ainsi, en substituant à $f(u, y)$ l'expression donnée sous (2),

$$\sum_{a=-\infty}^{+\infty} \int_1^x dy \left(\int_\alpha^\beta \cos 2a\pi u\, du \left[\sum_{b=-\infty}^{+\infty} \int_\gamma^\delta \cos 2b\pi v\, F(u,v,y)\, dv \right] \right).$$

Une seconde application de notre lemme et du théorème de M. L e b e s g u e permet de transformer cette expression en

$$\sum_{a=-\infty}^{+\infty} \sum_{b=-\infty}^{+\infty} \int_1^x dy \left(\int_\alpha^\beta \cos 2a\pi u\, du \left[\int_\gamma^\delta \cos 2b\pi v \,.\, F(u, v, y)\, dv \right] \right)$$

$$= \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \sum_{b=-\infty}^{+\infty} \int_1^x P(y, a, b)\, dy.$$

On trouve ainsi la seconde identité:

Pour $x \geqq 1$, on a

$$\text{(II)} \qquad \int_1^x A(y)dy = \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \sum_{b=-\infty}^{+\infty} \int_1^x P(y, a, b)\, dy.$$

II. Évaluation approchée de $P(x, a, b)$ pour grandes valeurs positives de x.

Dans ce §[9], je désignerai par C les constantes positives, indépendantes de x, a, b; par Θ les fonctions d'un nombre quelconque de variables, dont la valeur absolue ne surpasse pas *1*. Je ne distinguerai pas au moyen d'indices les divers C et Θ.

Lemme 2e. *Pour $x \geqq 1$, on a:*

$$\text{(4)} \qquad P(x, 0, 0) = J\, x$$

et pour $a^2 + b^2 > 0$ (a, b entiers) on a

$$\text{(5)} \qquad P(x, a, b) = \eta_{a,b} \frac{x^{1/4}}{4\sqrt{2}\,\pi\,(a^2+b^2)^{3/4}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{tg\,\varphi = \pm \frac{b}{a}} h_\varphi \sin\left(2\pi\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x}\,\xi_\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{C\Theta}{x^{1/4}(a^2+b^2)^{5/4}},$$

où la sommation s'étend à tous les φ où $0 \leqq \varphi < 2\pi$, $tg\,\varphi = \pm \frac{b}{a}$ (pour $a = 0$, on doit prende les deux angles $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$); et où $\eta_{a,b} = 2$ pour $ab = 0$, $\eta_{a,b} = 1$ dans les autres cas.

J'indique brièvement la démonstration. La formule (4) est évidente. Pour $a^2 + b^2 > 0$, on a

---

[9]) Et aussi, occasion donnée, dans le § suivant.

$$P(x, a, b) = \iint_{L(x)} \cos 2a\pi u \,.\, \cos 2b\pi v \; du\, dv \begin{pmatrix} u = \sqrt{x}\, u' \\ v = \sqrt{x}\, v' \end{pmatrix}$$

$$= x \iint_{L} \cos 2a\pi \sqrt{x}\, u' \,.\cos 2b\pi \sqrt{x}\, v' \; du'\, dv'$$

$$= \frac{x}{2}\left[\iint_{L} \cos 2\pi \sqrt{x}\,(au' + bv')\, du'\, dv' + \iint_{L} \cos 2\pi \sqrt{x}\,(au' - bv')\, du'\, dv'\right]$$

$$= \frac{x}{2}\Big[A(a, b, x) + A(a, -b, x)\Big], \tag{6}$$

où

$$A(a, b, x) = \iint_{L} \cos 2\pi \sqrt{x}\,(au' + bv')\, du'\, dv'.$$

Je pose

$$\xi = \frac{au' + bv'}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,,\ \eta = \frac{-bu' + av'}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,;$$

c'est-à-dire je fais subir aux axes des coordonnées une rotation de grandeur φ, où φ est défini par les relations

$$0 \leqq \varphi < 2\pi,\ \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,,\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,.$$

On a alors, d'après les notations données dans l'introduction de ce Mémoire,

$$A(a, b, x) = \iint \cos\left(2\pi \sqrt{a^2 + b^2}\,\sqrt{x}\,\xi\right) d\xi\, d\eta$$

$$= \int_{-\xi_{\varphi+\pi}}^{\xi_\varphi} \cos\left(2\pi \sqrt{a^2 + b^2}\,\sqrt{x}\,\xi\right) .\, \left(f_{1,\varphi}(\xi) - f_{2,\varphi}(\xi)\right) d\xi$$

$$= -\frac{1}{2\pi \sqrt{a^2 + b^2}\,\sqrt{x}} \int_{-\xi_{\varphi+\pi}}^{\xi_\varphi} \sin\left(2\pi \sqrt{a^2 + b^2}\,\sqrt{x}\,\xi\right) .\, \left[f'_{1,\varphi}(\xi) - f'_{2,\varphi}(\xi)\right] d\xi$$

(intégration par parties).

Pour abréger, je pose $A = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}\,\sqrt{x}$.

$A(a, b, x)$ est alors égale à $-\frac{1}{A}$ multipliée par la partie imaginaire de l'intégrale

$$\int_{-\xi_{\varphi+\pi}}^{\xi_\varphi} e^{iA\xi}\left(f'_{1,\varphi}(\xi) - f'_{2,\varphi}(\xi)\right) d\xi.$$

Nous divisons l'intervalle d'intégration en trois intervalles partiels et considérons les trois intégrales séparément:

$$A) \int_{\xi_\varphi - \varepsilon}^{\xi_\varphi} e^{iA\xi}\left(f'_{1,\varphi}(\xi) - f'_{2,\varphi}(\xi)\right) d\xi$$

$$= \int_{0}^{\varepsilon} e^{iA(\xi_\varphi - \xi)}\left[f'_{1,\varphi}(\xi_\varphi - \xi) - f'_{2,\varphi}(\xi_\varphi - \xi)\right] d\xi$$

$$= e^{iA\xi_\varphi} \int_{0}^{\varepsilon} e^{-iA\xi}\left(-\frac{h_\varphi}{\sqrt{\xi}} - 3l_\varphi \sqrt{\xi} + \Phi'_{1,\varphi}(\xi_\varphi - \xi) - \Phi'_{2,\varphi}(\xi_\varphi - \xi)\right) d\xi.$$

Après quelques intégrations par parties, en utilisant pour l'évaluation du reste le second théorème de la moyenne, on obtient pour cette intégrale

$$
\begin{aligned}
& e^{iA\xi_\varphi}\left[h_\varphi\sqrt{\frac{\pi}{2A}}(-1+i)-ie^{-iA\varepsilon}\frac{h_\varphi}{A\sqrt{\varepsilon}}-ie^{-iA\varepsilon}\sqrt{\varepsilon}\,\frac{3l_\varphi}{A}\right.\\
& \qquad \left.+ie^{-iA\varepsilon}\frac{\Phi'_{1,\varphi}(\xi_\varphi-\varepsilon)-\Phi'_{2,\varphi}(\xi_\varphi-\varepsilon)}{A}+\frac{C\,\Theta}{A^{3/2}}\right] \qquad (7)\\
& = e^{i\left(A\xi_\varphi+\frac{3\pi}{4}\right)}h_\varphi\sqrt{\frac{\pi}{A}}+ie^{iA(\xi_\varphi-\varepsilon)}\frac{f'_{1,\varphi}(\xi_\varphi-\varepsilon)-f'_{2,\varphi}(\xi_\varphi-\varepsilon)}{A}\\
& \qquad +\frac{C\,\Theta}{A^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

$$
B)\qquad \int_{-\xi_{\varphi+\pi}+\varepsilon}^{\xi_\varphi-\varepsilon} e^{iA\xi}(f'_{1,\varphi}(\xi)-f'_{2,\varphi}(\xi))\,d\xi
$$

$$
\begin{aligned}
(8)\qquad & =-i\left[\frac{e^{iA\xi}(f'_{1,\varphi}(\xi)-f'_{2,\varphi}(\xi))}{A}\right]_{\xi=-\xi_{\varphi+\pi}+\varepsilon}^{\xi=\xi_\varphi-\varepsilon}+\frac{C\,\Theta}{A^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

(On obtient l'évaluation du reste par le second théorème de la moyenne, en respectant les conditions imposées aux fonctions $f_{i,\varphi}(\xi)$).

$$
C)\qquad \int_{-\xi_{\varphi+\pi}}^{-\xi_{\varphi+\pi}+\varepsilon} e^{iA\xi}(f'_{1,\varphi}(\xi)-f'_{2,\varphi}(\xi))\,d\xi;
$$

en utilisant la note [3]), on peut ramener cette intégrale à l'intégrale considérée sub A) et l'on trouve ainsi pour elle la valeur

$$
\begin{aligned}
& e^{-i\left(A\xi_{\varphi+\pi}-\frac{\pi}{4}\right)}h_{\varphi+\pi}\sqrt{\frac{\pi}{A}}+\\
(9)\qquad & ie^{iA(-\xi_{\varphi+\pi}+\varepsilon)}\frac{f'_{2,\varphi}(-\xi_{\varphi+\pi}+\varepsilon)-f'_{1,\varphi}(-\xi_{\varphi+\pi}+\varepsilon)}{A}+\frac{C\,\Theta}{A^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

En prenant la partie imaginaire de la somme de (7), (8), (9), on obtient (en remplaçant A par sa valeur)

$$
\begin{aligned}
A(a,b,x) = {} & \frac{1}{2\sqrt{2}\,\pi(a^2+b^2)^{3/4}x^{3/4}}\left[h_\varphi\sin\left(2\pi\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x}\,\xi_\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\right.\\
& \left.+h_{\varphi+\pi}\sin\left(2\pi\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x}\,\xi_{\varphi+\pi}-\frac{\pi}{4}\right)\right]+\frac{C\,\Theta}{(a^2+b^2)^{5/4}x^{5/4}};
\end{aligned}
$$

en utilisant (6), on obtient aisément la formule cherchée (5).

III. Sur la fonction Q (x) pour grandes valeurs positives de x.

Je pose $A(x)=Jx+Q(x)$ et pour $r\geqq 0$, $a^2+b^2>0$, a, b, r entiers

$$
\begin{aligned}
\overline{P}_r(x,a,b) = {} & \eta_{a,b}\frac{x^{\frac{2r+1}{4}}}{4\sqrt{2}\,\pi^{r+1}(a^2+b^2)^{\frac{2r+3}{4}}}\cdot\\
& \cdot\sum_{tg\,\varphi=\pm\frac{b}{a}}\frac{h_\varphi}{\xi_\varphi^r}\sin\left(2\pi\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x}\,\xi_\varphi-\frac{\pi}{4}-r\frac{\pi}{2}\right),
\end{aligned}
$$

$$(10) \qquad \overline{Q}_r(x) = \sum_{a=-\infty}^{+\infty} {}' \sum_{b=-\infty}^{+\infty} {}' \overline{P}_r(x, a, b).^{10})$$

La convergence absolue de la série en (10) pour $r \geqq 1$ est manifeste; pour $r = 0$ la série itérée en (10) est aussi convergente, comme on le voit, en posant $P(x, a, b) = \overline{P}_o(x, a, b) + f(x, a, b)$ et en remarquant qu'après l'identité (I) et le lemme 2e la série $\sum_{a=-\infty}^{+\infty} {}' \sum_{b=-\infty}^{+\infty} {}' P(x, a, b)$ converge et de même la série $\sum_{a=-\infty}^{+\infty} {}' \sum_{b=-\infty}^{+\infty} {}' f(x, a, b)$, en vertu de la relation $f(x, a, b) = \frac{C\,\Theta}{x^{1/4}(a^2+b^2)^{5/4}}$.

D'après l'identité (I) on a

$$A(x) - \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x) = \sum_{a=-\infty}^{+\infty} {}' \sum_{b=-\infty}^{+\infty} {}' \overline{P}_0(x, a, b) + \sum_{a=-\infty}^{+\infty} {}' \sum_{b=-\infty}^{+\infty} {}' f(x, a, b) + Jx,$$

alors

$$(11) \quad \overline{Q}_0(x) = \Sigma\,\Sigma' \overline{P}_0 = Q(x) - \Sigma\,\Sigma' f - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = Q(x) + O(1).$$

Par une intégration par parties et d'après le second théorème de la moyenne, on trouve aisément pour $r \geqq 0$

$$\int_1^x \overline{P_r}(y, a, b)\, dy = \overline{P}_{r+1}(x, a, b) + \frac{C\,\Theta\, x^{\frac{2r+1}{4}}}{(a^2+b^2)^{\frac{2r+7}{4}}} + \frac{C\,\Theta}{(a^2+b^2)^{\frac{2r+5}{4}}},$$

d'où, pour $r \geqq 1$,

$$(12) \qquad \int_1^x \overline{Q_r}(y)\, dy = \overline{Q}_{r+1}(x) + O\left(x^{\frac{2r+1}{4}}\right).$$

Cette dernière relation est encore vraie pour $r = 0$, car on a, d'après l'identité (II),

$$\int_1^x \sum\sum' P(y, a, b)\, dy = \sum\sum' \int_1^x P(y, a, b)\, dy,$$

c'est-à-dire

$$\int_1^x \sum\sum' \left(\overline{P_0}(y, a, b) + f(y, a, b)\right) dy = \sum\sum' \int_1^x \left(\overline{P}_0(y, a, b) + f(y, a, b)\right) dy$$

et par suite, la série $\Sigma\,\Sigma' f(y, a, b)$ étant intégrable terme-à-terme,

$$\int_1^x \sum\sum' \overline{P}_0(y, a, b))\, dy = \sum\sum' \int_1^x \overline{P}_0(y, a, b)\, dy$$

$$= \sum\sum' \overline{P}_1(x, a, b) + \sum\sum' \left(\frac{C\,\Theta\, x^{1/4}}{(a^2+b^2)^{7/4}} + \frac{C\,\Theta}{(a^2+b^2)^{5/4}}\right),$$

[10]) L'apostrophe ' signifie qu'il faut supprimer le terme correspondant à $a = b = 0$.

ce qui donne

$$\int_1^x \overline{Q}_0(y)\,dy = \overline{Q}_1(x) + O(x^{1/4}),$$

c'est-à-dire l'équation (12) pour $r = 0$.

Pour $r \geqq 1$, la série $\Sigma\Sigma'\ \overline{P}_r$ est absolument convergente, et l'on peut par suite changer l'ordre de ses termes à l'arbitraire. Si nous désignons par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ $(0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots)$ les valeurs, rangées par l'ordre de grandeur, prises par l'expression $\pi^2 (a^2 + b^2)\, \xi_\varphi{}^2$ (a, b entiers, $a^2 + b^2 > 0$) et si nous posons

$$U(\lambda_n) = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}} \sum_{\substack{\pi^2 (a^2+b^2)\, \xi_\varphi^2 = \lambda_n \\ tg\varphi = \pm \frac{b}{a}}} \eta_{a,b}\ h_\varphi\ \xi_\varphi{}^{3/2},$$

nous obtenons, pour $r \geqq 1$, r entier:

$$\overline{Q}_r(x) = x^{\frac{2r+1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(\lambda_n)}{\lambda_n^{\frac{2r+3}{4}}} \sin\left(2\sqrt{\lambda_n x} - \frac{\pi}{4} - r\frac{\pi}{2}\right).$$

D'après les propriétés bien connues des séries de Dirichlet, appliquées à la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(\lambda_n)}{\lambda_n{}^s}$, convergente pour $\Re(s) > 1$, on peut trouver un nombre entier $\rho > 1$, si grand que

$$\frac{U(\lambda_1)}{\lambda_1^{\frac{2\varrho+3}{4}}} > 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{U(\lambda_n)}{\lambda_n^{\frac{2\varrho+3}{4}}}.$$

En posant, g étant un nombre entier positif quelconque,

$$x_1{}^{(\varrho)}(g) = \pi^2 \frac{\left(g + \frac{\rho}{4} + \frac{3}{8}\right)^2}{\lambda_1},$$

$$x_2{}^{(\varrho)}(g) = \pi^2 \frac{\left(g + \frac{\rho}{4} - \frac{1}{8}\right)^2}{\lambda_1},$$

on a alors (pour notre valeur choisie de ϱ)

$$(a) \begin{cases} x_1{}^{(\varrho)}(g) = \dfrac{\pi^2}{\lambda_1} g^2 + O(g), \quad x_2{}^{(\varrho)}(g) = \dfrac{\pi^2}{\lambda_1} g^2 + O(g), \\ x_2{}^{(\varrho)}(g) < x_1{}^{(\varrho)}(g) < x_2{}^{(\varrho)}(g+1), \end{cases}$$

$$\overline{Q}_\varrho\left[x_1{}^{(\varrho)}(g)\right] > Cg^{\frac{2\varrho+1}{2}}, \quad \overline{Q}_\varrho\left[x_2{}^{(\varrho)}(g)\right] < -Cg^{\frac{2\varrho+1}{2}}.$$

D'après (12), on a alors, pour $g > C$,

$$\int_{x_2{}^{(\varrho)}(g)}^{x_1{}^{(\varrho)}(g)} \overline{Q}_{\varrho-1}(y)\,dy > C\,g^{\frac{2\varrho+1}{2}}$$

$$\int_{x_1{}^{(\varrho)}(g)}^{x_2{}^{(\varrho)}(g+1)} \overline{Q}_{\varrho-1}(y)\,dy < -Cg^{\frac{2\varrho+1}{2}};$$

la longueur du chemin d'intégration étant dans les deux cas $O(g)$, il s'ensuit l'existence des nombres $x_1^{(\varrho-1)}(g)$, $x_2^{(\varrho-1)}(g)$ tels que

$$x_1^{(\varrho)}(g-1) \leqq x_2^{(\varrho-1)}(g) \leqq x_2^{(\varrho)}(g) \leqq x_1^{(\varrho-1)}(g) \leqq x_1^{(\varrho)}(g)$$

$$\overline{Q}_{\varrho-1}[x_1^{(\varrho-1)}(g)] > C g^{\frac{2\varrho-1}{2}}$$

$$\overline{Q}_{\varrho-1}[x_2^{(\varrho-1)}(g)] < -C g^{\frac{2\varrho-1}{2}}$$

pour $g > C$. D'après (a), on a encore (pour $g > C$)

$$x_2^{(\varrho-1)}(g) < x_1^{(\varrho-1)}(g) < x_2^{(\varrho-1)}(g+1),$$

$$x_1^{(\varrho-1)}(g) = \frac{\pi^2}{\lambda_1} g^2 + O(g), \quad x_2^{(\varrho-1)}(g) = \frac{\pi^2}{\lambda_1} g^2 + O(g);$$

d'après (12), on a (si $\rho \geqq 2$)

$$\int_{x_2^{(\varrho-1)}(g)}^{x_1^{(\varrho-1)}(g)} \overline{Q}_{\varrho-2}(y)\,dy > C g^{\frac{2\varrho-1}{2}}$$

$$\int_{x_1^{(\varrho-1)}(g)}^{x_2^{(\varrho-1)}(g+1)} \overline{Q}_{\varrho-2}(y)\,dy < -C g^{\frac{2\varrho-1}{2}}$$

pour $g > C$. En procédant ainsi, on démontre par induction le fait suivant :

Lemme 3e. *Il existe deux nombres positifs K_1, K_2 jouissant des propriétés suivantes:*

A chaque nombre entier positif $g > K_1$, on peut faire correspondre deux nombres $x_1^{(1)}(g)$, $x_2^{(1)}(g)$ tels que

$$x_2^{(1)}(g) < x_1^{(1)}(g) < x_2^{(1)}(g+1),$$

$$x_1^{(1)}(g) = \frac{\pi^2}{\lambda_1} g^2 + O(g), \qquad x_2^{(1)}(g) = \frac{\pi^2}{\lambda_1} g^2 + O(g),$$

et

$$\int_{x_2^{(1)}(g)}^{x_1^{(1)}(g)} \overline{Q}_0(y)\,dy > K_2 g^{3/2}$$

$$\int_{x_1^{(1)}(g)}^{x_2^{(1)}(g+1)} \overline{Q}_0(y)\,dy < -K_2 g^{3/2}.$$

Mais, d'après (11), on a $\overline{Q}_0(x) = Q(x) + O(1)$.

Alors, la longueur du chemin d'intégration étant $O(g)$, on a le résultat suivant

Lemme 4e. *Il existe deux nombres positifs K_3, K_4 tels que pour $g > K_3$ (g entier) on a*

$$\int_{x_2^{(1)}(g)}^{x_1^{(1)}(g)} Q(y)\,dy > K_4\, g^{3/2},$$

(13)
$$\int_{x_1^{(1)}(g)}^{x_2^{(1)}(g+1)} Q(y)\,dy < -K_4\, g^{3/2}.$$

De ce lemme, on peut déduire aisément les théorèmes II, III, IV, qui font le résultat principal de ce Mémoire. Je trouve opportun du reste, de commencer par citer le théorème suivant, représentant un cas particulier d'un théorème général de M. *van der Corput*:[11])

Théorème I^er.

$$Q(x) = O(x^{1/3})$$

L'applicabilité du théorème de M. *van der Corput* à notre cas résulte de l'existence d'une borne inférieure *positive* de la courbure de la courbe L.

Théorème II^e. *Il existe trois nombres positifs* K_5, K_6, K_7, *jouissant des propriétés suivantes:*

L'ensemble des points x *de l'intervalle*

$$\left.\begin{matrix}[x_2^{(1)}(g),\ x_1^{(1)}(g)] \\ [x_1^{(1)}(g),\ x_2^{(1)}(g+1)]\end{matrix}\right\} \text{où } Q(x) \left\{\begin{matrix} > K_6\, g^{1/2} \\ < -K_6\, g^{1/2}\end{matrix}\right\}$$

a, pour tout $g > K_5$, *une mesure supérieure à* $K_7\, g^{5/6}$.

Démonstration. Je démontre la première partie de la proposition (la seconde partie se démontre d'une manière tout-à-fait analogue). On a (en supposant toujours g suffisamment grand)

(13)
$$\int_{x_2^{(1)}(g)}^{x_1^{(1)}(g)} Q(y)\,dy > K_4\, g^{3/2}.$$

La longueur du chemin d'intégration est plus petite que $K_8 g$ et $Q(x)$ est plus petit que $K_9 g^{2/3}$ (d'après le théorème I^er). Nous posons $K_6 = \frac{K_4}{2K_8}$, et soit M la mesure de l'ensemble en question (c'est-à-dire de l'ensemble, où $x_2^{(1)}(g) \leqq x \leqq x_1^{(1)}(g)$, $Q(x) > K_6 g^{1/2}$).

On a alors

(14)
$$M K_9 g^{2/3} + K_8\, g\, K_6 g^{1/2} > \int_{x_2^{(1)}(g)}^{x_1^{(1)}(g)} Q(y)\,dy.$$

De (13), (14) on conclut que

$$M > \frac{K_4 - K_6 K_8}{K_9}\, g^{5/6} = \frac{K_4}{2K_9}\, g^{5/6},$$

d'où le thèorème II^e, avec $K_7 = \frac{K_4}{2K_9}$.

---

[11]) Voir p. e. Über Gitterpunkte in der Ebene, Math. Annalen 81, p. 1—20; voir surtout le corollaire à la page 5.

Théorème III^e (conséquence immédiate du théorème II^e). *Il existe deux nombres positifs K_{10}, K_{11}, jouissant des propriétés suivantes:*

A chaque nombre entier positif g, on peut faire correspondre deux nombres $x_1(g)$, $x_2(g)$ tels que

$$x_2(g) < x_1(g) < x_2(g+1)$$

$$x_1(g) = \frac{\pi^2}{\lambda_1} g^2 + O(g), x_2(g) = \frac{\pi^2}{\lambda_1} g^2 + O(g),$$

$$Q[x_1(g)] > K_{11}[x_1(g)]^{1/4}, Q[x_2(g)] < -K_{11}[x_2(g)]^{1/4},$$

pour tout $g > K_{10}$.

Si la courbe L est le cercle $u^2 + v^2 = 1$, ce théorème se réduit précisement au théorème de M. Landau, cité à l' introduction.

Théorème IV^e. *Soit* $Q^+(x) = Max(0, Q(x))$,

$$Q^-(x) = Max(0, -Q(x));$$

on peut trouver deux nombres positifs K_{12}, K_{13} tels que

$$\int_1^x Q^+(y)\,dy > K_{13}\, x^{5/4}, \tag{15}$$

$$\int_1^x Q^-(y)\,dy > K_{13}\, x^{5/4} \tag{16}$$

pour tous les $x > K_{12}$.

Démonstration:

$$\int_1^x Q^+(y)\,dy \geqq \sum_{\substack{g > K_3 \\ x_1^{(1)}(g) \leqq x}} \int_{x_2^{(1)}(g)}^{x_1^{(1)}(g)} Q^+(y)\,dy \geqq \sum_{\substack{g > K_3 \\ x_1^{(1)}(g) \leqq x}} \int_{x_2^{(1)}(g)}^{x_1^{(1)}(g)} Q(y)\,dy$$

$$\geqq \sum_{\substack{g > K_3 \\ x_1^{(1)}(g) \leqq x}} K_4\, g^{3/2} \backsim K_4 \sum_{\frac{\pi^2}{\lambda_1} g^2 < x} g^{3/2} \backsim K_{14}\, x^{5/4},$$

d'où la formule (15). La formule (16) se démontre d'une manière tout-à-fait analogue.

Lépidodendron et la chute des coussinets de son écorse.

Par

V. ŠUSTA.

(Présenté le 28 Novembre 1924.)

Les différents stades de l'état de conservation du tronc, causent des difficultés considérables au collectionneur de la flore carbonique. Mais les relations les plus compliquées se montrent au Lépidodendron, dont l'écorce a les stades suivants, connus jusqu'à présent:

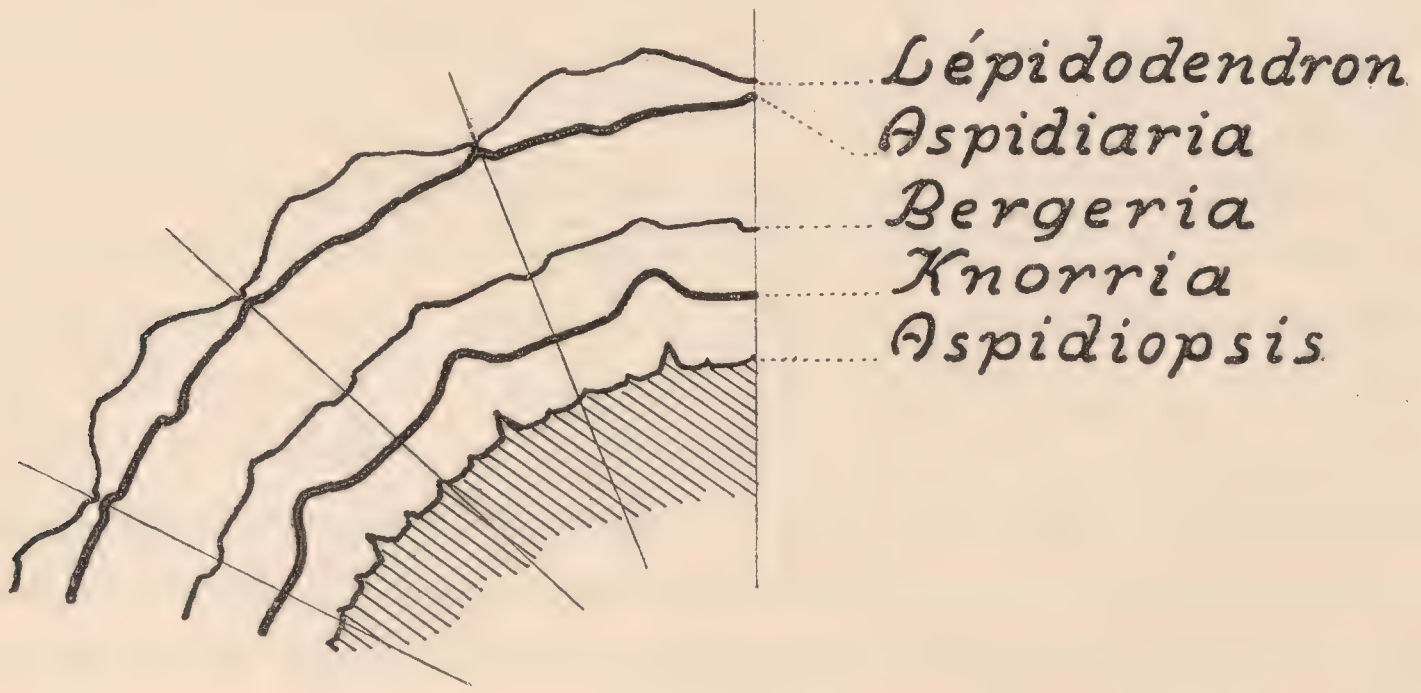


Fig. 1.

1. *Lépidodendron,* Pl. I. fig. 1, pl. II. fig. 1, pl. III. fig. 1 et 2, l'épiderme du tronc avec des coussinets bien conservés, avec une marque de feuille rhomboidale et trois tubercules montrant une fossette trilatérale et linguiforme, une médiane et deux cicatrices transpiratoires.

2. *Aspidiaria,* pl. I. fig. 3 et 5, pl. II. fig. 2 et pl. III. fig. 1, caractérisée par des champs rhomboidaux et nettement tranchés de coussinets, avec des cannelures oblongues et avec une fossette au milieu, près du faisceau de vaisseaux. Elle s'est formée de deux manières. Le plus souvent de sorte que les coussinets se sont détachés du tronc (peut-être seulement au pied du tronc) et l'écorce, qui se trouve sous ceux-ci, nous représente l'Aspi-

diaria. J'ai établi une partie des pièces-à l'appui, par la découverte de coussinets isolés dans les schistes, en partie dans les coussinets associés et dispersés en tout sens, dont un exemplaire est dessiné sur la pl. III. fig. 2. L'autre manière de naître de l'Aspidiaria a été expliquée exactement par le D. Štur par le fait qu'entre le coussinet et le reste de l'écorce s'est formé quelque espace intercellulaire qui, pendant la submersion du tronc, a été rempli de limon; le coussinet était arrêté de l'écorce par un solide faisceau de vaisseaux, pl. III. fig. 1.

3. *Bergeria,* pl. I. fig. 2. se distingue par des coussinets rhomboïdaux reconnaissables et par une cicatrice au milieu de chaque rhombe. Les cannelures, qui forment les champs rhomboïdaux, sont ordinairement plus larges que sur l'épiderme du Lépidodendron et de l'Aspidiaria. Elle a pris naissance de telle façon que le tronc est devenu crex en se pouriissant de dehors; on rarement aussi par la pourriture du tronc à sa surface.

4. *Knorria,* pl. I. fig. 5, pl. II. fig. 1, se distingue par la disparition complète de champs rhomboïdaux et par l'apparition nombreuse de l'aiguillon on de la fossette. Elle s'est formée toujours par la pourriture du tronc en dehors.

5. *Aspidiopsis,* pl. I. fig. 4, pl. II. fig. 2, représente le stade intime du Lépidodendron, caractérisé par des cannelures oblongues parallèles et interrompues; elle forme on la limite entre le tissage plus serré et le tissage plus mince, on la surface de la cavité intérieure du Lépidodendron. Là, oú les coussinets du Lépidodendron se sont détachés du tronc croissant, l'Aspidiaria s'est formée a vielli mais qui avec le temps et qui s'est ridée de ce fait; de cette manière a pris naissance le type d'écorce jusqu'à présent inconnu, que j'ai appelé „A s p i d i a r i u m", pl. II. fig. 3 et 4; voir aussi R. Zeiller, qui le détermine „Lépidodendron aculeatum." L'Aspidiarium montre au milieu du coussinet, une fossette pyramidale, autour de laquelle sont, disloquées des rides oblongues avec des circonscriptions rhomboïdales des coussinets plus on moins visibles. Plus vieux est l'Aspidiarium, les rides ocenpent une plus grande superficie aux dépens des fossettes jusg'à ce que ces dernières disparaissent complètement.

La situation des différents stades de l'état de conservation du tronc du Lépidodendron est rendue . . . . . la dans le texte fig. 1; leur suite de l'épiderme à l'intérieur est la suivante:

1. *Lépidodendron,* épiderme.
2. *Aspidiaria,* l'écorce sous les coussinets.
3. *Bergeria,* la partie moyenne de l'écorce.
4. *Knorria,* la couche inférieure de l'écorce.
5. *Aspidiopis,* la surface de la cavité intérieure du tronc.

2a. *Aspidiarium* est plus vieux que l'Aspidiaria et il forme la première couche de l'écorce après la chute des coussinets.

Sur une certaine expression paramétrique des coniques et son application à la déduction de quelques théorèmes et constructions rapportants aux coniques et aux courbes rationelles du quatrième ordre.

Par

J. SOBOTKA.

Présenté le 28 novembre 1924.

1. Considérons une conique k centrique dans le système orthogonal des coordonnées donné par ses axes. Son équation on peut écrire:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0,$$

les nombres a et b soient tout deux réels, ou un réel et le deuxième imaginaire; ou ensuite tout deux soient imaginaires, tel que cette équation caractérise chaque conique centrique. Ses asymptotes seront alors

$$b x + i a y = 0; \quad b x - i a y = 0.$$

Exprimons la conique par des équations paramétriques, au moyen des droites parallèles à une des asymptotes. Si nous menons cette parallèle par le point (x, y) sur k à l'asymptote première, son équation devient

$$b \xi + i a \eta = b x + i a y;$$

elle coupe l'axe x dans le point dont l'abscisse est

$$\xi = x + i \frac{a}{b} y.$$

Choisissons la valeur $t = \frac{\xi}{a}$ pour paramètre, alors

$$a b t = b x + i a y;$$

et pour cela

$$\frac{a b}{t} = b x - i a y.$$

Ainsi nous obtenons l'expression paramétrique de la courbe k

$$x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right); \quad y = -\frac{i\,b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

Si une circonférence est donnée par l'équation:

$$x^2 + y^2 - 2\,\alpha\,x - 2\,\beta\,y + \pi = 0,$$

il y a alors la relation pour les paramètres de ses points d'intersection avec k, si nous posons $e^2 = a^2 - b^2$,

$$t^4 - \frac{4}{e^2}(a\,\alpha - i\,b\,\beta)\,t^3 + \frac{2}{e^2}(a^2 + b^2 + 2\,\pi)\,t^2 - \frac{4}{e^2}(a\,\alpha + i\,b\,\beta)\,t + 1 = 0. \qquad (1).$$

Il y a alors pour la circonférence une condition $(t)_4 = 1$, où la signification employée est évidente. Au contraire les paramètres qui correspondent à l'équation

$$t^4 + a_3\,t^3 + a_2\,t^2 + a_1\,t + 1 = 0,$$

appartiennent à quatre points concycliques de la conique k, car par comparaison de ses coefficients à ceux de l'équation précédente nous obtenons trois équations de premier degré en α, β, π et nous pouvons alors fixer une circonférence qui correspond à la deuxième équation. Lorsque la circonférence possède un point d'osculation avec la conique k, dont le paramètre soit τ et lorsqu'elle coupe cette conique dans un point du paramètre t, la relation devient $\tau^3\,t = 1$.

Pour la circonférence passant par le point t, qui est osculatrice à k en un point différent de t, le paramètre τ est pour ce point exprimé par l'équation:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt[3]{t}}.$$

Par conséquent, par le point t passent trois circonférences, qui sont osculatrices à k en un autre point. Leurs paramètres sont alors:

$$\tau_1 = 1 : \left|\sqrt[3]{t}\right|, \quad \tau_2 = 1 : \varepsilon\left|\sqrt[3]{t}\right|, \quad \tau_3 = 1 : \varepsilon'\left|\sqrt[3]{t}\right|,$$

où 1, ε, ε' désignent les racines de l'équation $x^3 - 1 = 0$. Le produit de ces paramètres est $\tau_1\,\tau_2\,\tau_3 = \frac{1}{t}$, tel que le produit $\tau_1\,\tau_2\,\tau_3\,t = 1$; ainsi nous arrivons au théorème de Steiner: „Les points en lesquels les circonférences menées par le point t sont osculatrices, sont situés avec le point t sur une circonférence."

Faisons couper une circonférence (1) par la courbe k dans des points τ_i, $i = 1 \ldots 4$. Pour la circonférence osculatrice en point τ_i qui coupe k encore dans le point dont le paramètre soit t, on a la relation

$$t_i = \frac{1}{\tau_i^3}, \text{ alors } t_1\ t_2\,t_3\,t_4 = \frac{1}{(\tau_1\,\tau_2\,\tau_3\,\tau_4)^3} = 1.$$

Ainsi nous pouvons énoncer le théorème:

„Les cercles osculateurs en quatre points concycliques sur la conique k la coupent, chacun dans un point, et ces quatre points sont de même concycliques."

Il en résulte de même:

„Si A, B, C, D soient quatre points concycliques sur la conique k et $A_1 A_2 A_3$; $B_1 B_2 B_3$; $C_1 C_2 C_3$; $D_1 D_2 D_3$ les points en lesquels les cercles de courbure mentionés passant par les points $A, \ldots D$ sont osculateurs à elle et si nous choisissons connvenablement de chacune de ces groupes $A_1 A_2 A_3, \ldots D_1 D_2 D_3$ un point, nous obtenons 27 groupes de quatre points concycliques."

2. Si la circonférence par le point t_0 sur la conique k la touche dans un point τ et la coupe encore dans un point u, il est:

$$(t)_4 = t_0\, \tau^2\, u = 1, \quad (t)_2 = \tau^2 + 2\,\tau\,(t_0 + u) + t_0\, u.$$

De ces relations entre τ et u sur chaque circonférence par le point t_0 résulte l'équation:

$$\tau^4 + 2\, t_0\, \tau^3 - (t)_2\, \tau^2 + \frac{2\,\tau}{t^0} + 1 = 0 \qquad (2)$$

qui signifie que pour chaque valeur $(t)_2$, quatre circonférences passent par le point t_0, en touchant k et leurs points de contact sont situés sur la circonférence (2).

Parceque pour la circonférence dont la coordonnée π est donnée, on a

$$(t)_2 = \frac{2}{e^2}\,(a^2 + b^2 + 2\,\pi),$$

on peut voir que les circonférences passant par le point t_0 forment pour chaque valeur $(t)_2$ un faisceau, dont le deuxième point fondamental se trouve sur la droite qui joint le centre O de la conique k au point t_0.

Il en résulte le theoréme suivant:

„Un faisceau des circonférences qui passent par le point donné M sur la conique k et qui a le diamètre $O\,M$ pour droite de puissance, contient quatre éléments qui touchent la courbe k, et dont les points de contact se trouvent sur une circonférence v."

Si π est la puissance du point O pour des circonférences du faisceau mentionné, et si α, β, Π sont les coordonnées de la circonférence v, il résulte par comparaison de l'équation (2) à l'équation (1)

$$t_0 = -\frac{2}{e^2}\,(a\,\alpha - i\,b\,\beta), \qquad \frac{1}{t_0} = -\frac{2}{e^2}\,(a\,\alpha + i\,b\,\beta)$$

$$-\frac{2}{e^2}\,(a^2 + b^2 + 2\,\pi) = \frac{2}{e^2}\,(a^2 + b^2 + 2\,\Pi)$$

et de ces équations nous obtenons

$$\frac{4\,(a^2\,\alpha^2 + b^2\,\beta^2)}{e^4} = 1, \quad \Pi + \pi = -\,a^2 - b^2.$$

Alors le centre V de la circonférence v se trouve sur la courbe de 2e degré r dont les sommets partagent en deux parties égales les distances entre les centres principaux de courbure de la conique k et son centre O; la circonférence v coupe orthogonalement la circonférence k de centre O, pour laquelle le carré de diamètre est égal à $-(\pi + a^2 + b^2)$. Si x_0, y_0 sont les coordonnées du point $M(t_0)$, et si nous substituons dans les équations qui les expriment paramétriquement les valeurs mentionnées pour t_0 et $\frac{1}{t_0}$ nous obtenons:

$$x_0 = \frac{-2a^2\alpha}{e^2}, \quad y_0 = \frac{2b^2\beta}{e^2}.$$

Des ces équations il suit, que le point V est par rapport à O symétrique au point qui partage en deux parties égales le segment de la normale de la conique k en point M limité par ses axes.

On reçoit ainsi le théorème:

„Une circonférence quelconque qui a son centre V sur la conique r, coupe la conique donnée k aux quatre points $T_1, \ldots T_4$. Si V_0 est le point symétrique à V par rapport au centre O, puis la droite menée par ce point et antiparallèle à $O\,V_0$ par rapport aux axes de la conique k est sa normale; les circonférences $k_1 \ldots k_4$ qui passent par le pied de cette normale et qui touchent k aux points $T_1 \ldots T_4$ forment un faisceau, dont le deuxième point fondamental N est situé sur la droite $O\,M$."

Pour une hyperbole équilatère k on a $\Pi + \pi = o$, $\alpha = -x_0$, $\beta = -y_0$; la courbe r coïncide avec k; si nous choisissons $\Pi = o$, nous obtenons la relation suivante:

„La circonférence dont le centre V est situé sur l'hyperbole équilatère et qui passe par son centre la coupe dans quatre points dont deux sont réels; les circonférences qui la touchent en ces points et qui passent par son centre se coupent sur elle dans le point diametralement opposé par rapport à V." (0)

Au moyen de la généralisation projective nous pouvons exprimer les théorèmes:

„Si nous coupons une courbe de 2e degré k par une autre conique quelconque q, chacune des coniques qui ont en points ainsi obtenus un contact de 2e degré avec k et passent par deux points fixes Q_1, Q_2 situés sur q coupe la conique k encore une fois et ces quatre points d'intersection se trouvent avec Q_1, Q_2 également sur une conique." (I)

„Dans un faisceau des coniques qui passent par un point fixe P sur la conique donnée k, par un point Q quelconque dans son plan et par les deux autres points Q_1, Q_2 se trouvant sur une droite conjuguée à la droite $(Q\,P)$ par rapport à k, il y a quatre éléments qui touchent la conique k en points qui sont ainsi que Q_1 et Q_2 situés sur une certaine conique g; les pôles de la droite $(Q_1\,Q_2)$ par rapport à toutes ces courbes g possibles sont situés de même sur une certaine conique r." (II)

3. Si M est un point quelconque de la conique k, t le paramètre de ce point et si nous menons par le sommet $(a, 0)$ une droite parallèle au diamètre, conjugué à $O\,M$ (où O signifie le centre de la conique k), cette droite coupe k dans le point M^*, dont le paramètre T est lié avec le paramètre t par la relation simple $T = t^2$, ce qu'on peut déduire facilement.

Appliquons cette relation à la construction des normales de la conique k, menées d'un point quelconque P de son plan. Nous construisons pour ce point l'hyperbole d'Apollonius h qui coupe k dans les pieds des normales cherchées.

L'équation de l'hyperbole h est donc

$$x\,y - m\,y - n\,x = 0.$$

Pour les paramètres de ses points d'intersection avec k nous obtenons l'équation:

$$t^4 - 2\left(\frac{m}{a} + \frac{i\,n}{b}\right)t^3 + 2\left(\frac{m}{a} - \frac{i\,n}{b}\right)t - 1 = 0.$$

On obtient facilement l'équation

$$t^4 - \frac{1}{e^2}(a\,X - i\,b\,Y)\,t^3 + \frac{1}{e^2}(a\,X + i\,b\,Y)\,t - 1 = 0,$$

qui donne les paramètres des pieds des normales à la courbe k par le point $P\ (X,\ Y)$.

Il s'ensuit qu'il y a entre les coordonnées X, Y du P et les coordonnées m, n du centre de l'hyperbole h une homologie affinne exprimée par des équations

$$X = \frac{e^2}{a^2}\,m, \qquad Y = -\frac{e^2}{b^2}\,n. \tag{3}$$

Les perpendiculaires abaissées du sommet $(a,\ 0)$ aux normales qui sortent du point P coupent k dans les points, dont les paramètres sont caractérisés par la relation $T = t^2$; alors les paramètre T satisfont à l'équation:

$$(T^2 - 1)^2 = 4\,T\left[\left(\frac{m}{a} + \frac{i\,n}{b}\right)^2 T^2 - 2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)T + \left(\frac{m}{a} - \frac{i\,n}{b}\right)^2\right]$$

ou

$$T^4 - 4\left(\frac{m}{a} + \frac{i\,n}{b}\right)^2 T^3 + 2\left[4\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) - 1\right]T^2 - 4\left(\frac{m}{a} - \frac{i\,n}{b}\right)^2 T + 1 = 0.$$

Les points T se trouvent ainsi sur une circonférence l. Pour leurs coordonnées nous obtenons par comparaison avec (1) les équations suivantes:

$$a\,\alpha - i\,b\,\beta = e^2\left(\frac{m}{a} + \frac{i\,n}{b}\right)^2$$

$$a\,\alpha + i\,b\,\beta = e^2\left(\frac{m}{a} - \frac{i\,n}{b}\right)^2$$

$$a^2 + b^2 + 2\,\pi = e^2\left[4\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) - 1\right].$$

De ces équations on peut déduire

$$\alpha = \frac{e^2}{a}\left(\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2}\right), \quad \beta = -\frac{2\,e^2\,m\,n}{a\,b^2}$$

$$a^2 + \pi = 2\,e^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right).$$

Si nous posons dans ces équations les valeurs des coordonnées X, Y, nous obtenons

$$\alpha = \frac{1}{a\,e^2}\,(a^2\,X^2 - b^2\,Y^2); \quad \beta = \frac{2\,a\,X\,Y}{e^2}$$

$$a^2 + \pi = \frac{2}{b^2}\,(a^2\,X^2 + b^2\,Y^2)$$

et ensuite

$$\frac{2\,\alpha}{\beta} = \frac{X}{Y} - \frac{b^2}{a^2}\,\frac{Y}{X}.$$

Soit L centre de la circonférence l et ω l'angle qui est formé par $O\,P$ et $+\,x$, ω' l'angle formé par la perpendiculaire à $O\,P$ et $+\,x$, et ensuite ω'' l'angle formé par le diamètre conjugué à cette pérpendiculaire avec $+\,x$; puis on peut facilement déduire de l'équation dernière:

$$2\,\frac{\alpha}{\beta} = -\,tg\,\omega' + tg\,\omega'\,tg\,\omega''\,tg\,\omega = -\,tg\,\omega' - tg\,\omega''.$$

Si nous menons par le point $(a,\ 0)$ la droite parallèle au diamètre perpendiculaire à $O\,P$ et par le point $(-\,a,\,0)$ la parallèle au diamètre conjugué à f, ces deux droites se coupent dans un point M sur la courbe k; l'angle φ formé par le diamètre conjugué à $O\,M$ et par l'axe $+\,x$ est caractérisé par la relation:

$$tg\,\varphi = \frac{tg\,\omega' + tg\,\omega''}{2};$$

alors

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\,tg\,\varphi;$$

par conséquent la droite $O\,L$ est pérpendiculaire à la tangente de la courbe k en point M.

Nous menons alors à $O\,P$ une pérpendiculaire par le point $(a,\ o)$ qui coupe k au point M; puis la perpendiculaire g du point O à la tangente de la courbe k en point M est un diamètre de la circonférence l. L'équation de cette circonférence devient:

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{a\,e^2}\,(a^2\,X^2 - b^2\,Y^2)\,x - \frac{4\,a\,X\,Y}{e^2}\,y + \frac{2}{e^2}\,(a^2\,X^2 + b^2\,Y^2) - a^2 = 0$$

et la puissance du point $(a,\ o)$ à l'égard d'elle est $\frac{4\,b^2\,Y^2}{e^2}$. Alors la circonfé-

rence l coupe orthogonalement la circonférence q au centre (a, o) et au rayon égal à $\frac{2\,b\,Y}{e}$.

Pour construire la circonférence l construisons d'abord la droite g, puis la coordonnée β par laquelle son centre est déterminé; enfin construisons la circonférence q; par cette manière la construction de l est donnée.

Le point $(-a, o)$ a à l'égard de l la puissance $\frac{4\,a^2\,X^2}{e^2}$; alors l coupe orthogonalement la circonférence q' au centre $(-a, o)$ et au rayon égal à $\frac{2\,a\,X}{e}$.

Nous pouvons alors L construire par la manière suivante:

Sur la droite de puissance pour les circonférences q, q' déterminons un point, dont l'ordonné est égal à $\frac{2\,a\,X\,Y}{e^2}$.

Si q est imaginaire, la circonférence q^* concentrique au rayon $\frac{2\,i\,b\,Y}{e}$ est réelle; en ce cas nous coupons q^* et q' par la circonférence r, qui coupe toutes les deux en points réels; puis la corde commune des circonférences r et q' coupe la droite qui est symetrique à la corde commune des circonférences q^* et r par rapport au centre de la circonférence q^*, dans le point situé sur la droite de puissance des circonférences q et q'.

Quand on coupe l par le cercle $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, on obtient les points d'intersection sur la droite

$$(a^2\,X^2 - b^2\,Y^2)\,x + 2\,a^2\,X\,Y\,y = a\,(a^2\,X^2 + b^2\,Y^2)$$

qui ne change pas si l'on laisse le point P parcourir un diamètre de k. Alors l décrit un faisceau.

Ainsi nous arrivons aux résultats de Joachimsthal.

4. Maintenant déplaçons le système de coordonnées parallèlement pour que l'origine coïncide au point $(a, 0)$ et posons dans les équations le paramètre $p = \frac{b^2}{a}$; ensuite la valeur a tendant à l'infini, la conique k se transforme en parabole $y^2 = 2\,p\,x$; pour laquelle nous obtenons par ce procédé

$$\alpha = 2\,X - p; \quad \beta = 2\,Y, \quad \pi = 0.$$

Si l'on prend pour les points sur la parabole $y^2 = 2\,p\,x$ pour paramètre $t = \frac{y}{x}$, nous obtenons $x = \frac{2\,p}{t^2}$, $y = \frac{2\,p}{t}$ et alors pour ses points d'intersection avec la circonférence $x^2 + y^2 - 2\,\alpha\,x - 2\,\beta\,y + \pi = 0$ on a l'équation

$$\pi\,t^4 - 4\,p\,\beta\,t^3 + 4\,p\,(p - \alpha)\,t^2 + 4\,p^2 = 0; \qquad (\alpha)$$

donc la condition nécessaire et suffisante en est $(t)_3 = 0$.

Si une circonférence est osculatrice à une parabole en point t et si elle la coupe dans le point τ on peut déduire de cette condition $t = -3\tau$; alors entre ces points il existe une relation de projectivité.

En remplaçant cette valeur pour t dans l'équation (α) nous trouvons de nouveau que les points d'intersection des circonférences de courbure de la parabole aux quatre points concycliques sont aussi concycliques. Si α, β, π sont les coordonneés de la circonférence première,

$$\alpha' = 9\alpha - 8p, \quad \beta' = -27\beta, \quad \pi' = 81\pi$$

sont les coordonnées de la circonférence deuxième.

5. Des théorèmes mentionnés sur les coniques nous obtenons des *théorèmes analogues pour les courbes rationelles du quatrième ordre* k^4.

Si k^4 possède les points doubles ordinaires et si nous choisissons le triangle formé par ces points pour le triangle de référence, son équation devient:

$$a_{11}x_2^2x_3^2 + a_{22}x_3^2x_1^2 + a_{33}x_1^2x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3x_1^2 + 2a_{31}x_3x_1x_2^2 = 0.$$

Par la transformation du second degré $x_i = \frac{\varrho}{y_i}$ cette courbe devient la conique k

$$a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + a_{33}y_3^2 + 2a_{12}y_1y_2 + 2a_{23}y_2y_3 + 2a_{31}y_3y_1 = 0.$$

Du théorème mentionné (I) on peut déduire au moyen de cette transformation:

„Si nous coupons la courbe k^4 qui possède des points doubles Q_1, Q_2, Q_3 par une conique quelconque q, passant par deux entre eux Q_1, Q_2, nous obtenons quatre points d'intersection A_1, A_2, A_3, A_4 et si nous traçons ensuite par les points Q_1, Q_2 des coniques qui sont osculatrices à la courbe k^4 en points $A_1 \ldots A_4$, chacune de celles la coupe encore en un point, et les quatres points ainsi obtenus se trouvent avec Q_1, Q_2 aussi sur une conique."

Surtout on peut exprimer le theorème:

„Une droite quelconque coupe k^4 en quatre points; les coniques qui y sont osculatrices et qui passent par deux de ses points doubles, la coupent, chacune encore dans un point; les quatre points ainsi obtenus sont situés avec les points doubles mentionnés sur une conique."

Du théorème (II) nous obtenons pour k^4 un théorème analogue.

Dans la transformation mentionnée du second degré, correspond à chaque conique qui passe par deux points doubles Q_1, Q_2, une conique, qui passe aussi par ces points; à une droite quelconque correspond une conique circonscrite au triangle $Q_1Q_2Q_3$ et à chaque droite passant par un point double correspond une droite qui passe aussi par ce point.

Coupons la droite $Q_1 Q_2$ par la conique k dans les points R_1, R_2 et soient r_1, r_2 les tagentes à k en ces points. Une droite quelconque menée par le point R_1 se transforme en conique circonscrite au triangle $Q_1 Q_2 Q_3$, qui a à Q_3 une tangente commune avec k^4 et une droite quelconque menée par le point R_2 se transforme en conique qui a à Q_3 la seconde tangente commune avec k^4. Les droites r_1, r_2 deviennent les coniques analogues (r_1) (r_2). Parceque r_1 possède avec k deux points infiniment voisins communs, (r_1) coupe la courbe k^4 en outre des points doubles encore dans deux points infiniment voisins de Q_3. Alors (r_1), (r_2) sont circonscrites au triangle $Q_1 Q_2 Q_3$ et (r_1) est osculatrice en Q_3 à une branche de la courbe k^4, (r_2) à la seconde. Dans la transformation indiquée, au pôle R de la droite $(Q_1 Q_2)$ par rapport à k correspond le point d'intersection R_3 des coniques (r_1), (r_2). Ainsi nous parvenons aux théorèmes:

„Si R_3 est l'autre point d'intersection de deux coniques qui sont circonscrites au triangle de points doubles $Q_1 Q_2 Q_3$, et dont l'une est osculatrice à la première branche de la courbe k^4, l'autre à la seconde en un point double Q_3 et si nous choisissons ensuite sur k^4 un point quelconque M et sur la conique passant par les points Q_1, Q_2, Q_3, R_3, M un point quelconque N, puis dans le faisceau des coniques passant par les points M, N, Q_1, Q_2 il y a quatre coniques, qui touchent la courbe k^4; leurs points de contact se trouvent avec Q_1 et Q_2 sur une conique."

Si nous choisissons en particulier à l'égard de k un faisceau de coniques passant par les points Q_1, Q_2, R et par un des points d'intersection de la courbe k avec la droite $(R Q_3)$, nous obtenons ce théorème:

„La droite $(Q_3 R_3)$ coupe k^4 encore en deux points; de chacun d'eux on peut mener à la courbe k^4, sauf la tangente de ce point, quatre autres tangentes, dont les points de contact se trouvent sur une conique passant par les points Q_1, Q_2."

6. Si k^4 possède un noeud d'inflexion, p. ex. à Q_3, le point correspondant R_3 coïncide avec Q_3; la droite $(Q_3 R_3)$ devient indéfinie et nous arrivons au theorème:

„La courbe du quatrième ordre avec trois points doubles dont l'un est un noeud d'inflexion est caractérisée par la propriété que les points de contact des quatre tangentes menées du point quelconque P sur la courbe k^4 sont situés sur une conique passant par les points Q_1, Q_2. Pou- la conique k, Q_3 devient le pôle de la droite $Q_1 Q_2$.

Si nous choisissons le triangle $Q_1 Q_2 Q_3$ pour le triangle de reférence l'équation de la courbe k^4 avec le noeud d'inflexion à Q_3 devient

$$a_{11} x_2^2 x_3^2 + a_{22} x_3^2 x_1^2 + a_{33} x_1^2 x_2^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 x_3^2 = 0. \qquad (6).$$

Par la transformation du second degré $x_i = \frac{\varrho}{y_i}$ la courbe k^4 passe en conique k, dont l'équation est

$$a_{11} y_1^2 + a_{22} y_2^2 + a_{33} y_3^2 + 2 a_{12} y_1 y_2 = 0.$$

On peut aussi déterminer cette courbe, comme il est facile à déduire, de la conique k' donnée par l'équation:

$$a_{22}\, x_1^2 - 2\, a_{12}\, x_1\, x_2 + a_{11}\, x_2^2 + \frac{4\,(a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2)}{a_{33}}\, x_3^2 = 0.$$

Les tangentes du point quelconque G sur la droite $(Q_1\, Q_2)$ menées à k', et la droite qui joint le point harmonique à G par rapport aux points Q_1, Q_2 avec le point Q_3 se coupent dans deux points de la courbe (6) qui est ainsi engendrée par une involution des tangentes sur k' et par un faisceau des droites projectif à elle.

Si nous déduisons alors de la courbe k^4 une courbe homographique de la manière qu'aux points Q_1, Q_2 correspondent les points absolus à l'infini, la courbe k' passe en conique $k^{*\prime}$, le point Q_3 en son centre $Q_3{}^*$ et la courbe k^4 passe en podaire $k_4{}^*$ de la conique $k^{*\prime}$ pour $Q_3{}^*$ comme pôle.

Alors on peut transmettre les propriètés de $k_4{}^*$ à la courbe k^4 avec un noeud d'inflexion.

Dans les coordonnées orthogonales nous pouvons exprimer l'équation de la conique $k^{*\prime}$ sous la forme

$$b^2\, x^2 + a^2\, y^2 - a^2\, b^2 = 0\,;$$

puis l'équation de la courbe $k_4{}^*$ devient

$$(x^2 + y^2)^2 - (a^2\, x^2 + b^2\, y^2) = 0.$$

Cette courbe est une courbe inverse à la conique k_0

$$a^2\, x^2 + b^2\, y^2 - e^4 = 0$$

par rapport au cercle $x^2 + y^2 = e^2$. Cette conique possède alors les centres principaux de courbure de la conique $k^{*\prime}$ pour les sommets.

Alors de cette propriété il est évident que la courbe k^4 avec un noeud d'inflexion peut être transformée par l'homographie en courbe inverse $k_4{}^*$ à la conique centrique donnée par rapport à une circonférence concentrique.

Si $b'^2\, x^2 + a'^2\, y^2 = a'^2\, b'^2$ est l'équation de cette conique, il suit:

„Du point quelconque P de la courbe $k_4{}^*$ sortent quatre tangentes (différentes de la tangente du point P même) et les points de contact de ces tangentes se trouvent sur une circonférence v; alors à chaque point P sur $k_4{}^*$ appartient une circonférence v et toutes ces circonférences enveloppent une courbe anallagmatique du quatrième ordre.“

Car les circonférences v sont inverses aux circonférences qui ont leur centres sur la conique $a'^2\, x^2 + b'^2\, y = \frac{e^4}{4}$ et coupent orthogonalement la circonférence $x^2 + y^2 + a'^2 + b'^2 = 0$; leur centres sont alors de même situés sur une certaine conique.

En général on trouve pour une courbe k^4 avec des points doubles Q_1, Q_2, Q_3 dont l'un Q_3 est un noeud d'inflexion le théorème suivant:

„Par un point quelconque P de la courbe k^4 passent quatre ses tangentes qui la touchent en d'autres points; leurs points de contact sont situés avec Q_1 et Q_2 sur une conique v. Si P parcourt la courbe k^4, v enveloppe une courbe du quatrième ordre qui a Q_1 et Q_2 pour points doubles; les pôles de la droite $(Q_1\,Q_2)$ par rapport à ces coniques parcourent aussi une conique."

7. Nous pouvons géometriquement réaliser la transformation considérée $x_i = \frac{\varrho}{y_i}$ en choisissant un quadriangle quelconque qui a Q_1, Q_2, Q_3 pour points diagonaux; si R est un point donné du plan, nous menons par le point Q_1 la droite harmonique à la droite $(Q_1\,R)$ par rapport aux côtés opposés du quadriangle qui se coupent dans ce point; nous obtenons les droites analogiques par rapport aux points Q_2 et Q_3. Ainsi nous arrivons aux trois droites qui se coupent dans un seul point R', lequel nous faisons correspondre au point R et ainsi nous obtenons la transformation considérée.

Nous pouvons aussi considérer une telle transformation du plan, qu'au point R nous faisons correspondre la droite harmonique par rapport au triangle $Q_1\,Q_2\,Q_3$ et réciproquement. Si x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées du point R et u_1, u_2, u_3 les coordonnées de la droite r, cette transformation est donnée par les équations: $x_i = \frac{\varrho}{u_i}$; au moyen desquelles passe la courbe du quatrième ordre en conique h:

$$a_{11}\,u_1^{\,2} + a_{22}\,u_2^{\,2} + a_{33}\,u_3^{\,2} + 2\,a_{12}\,u_1\,u_2 + 2\,a_{13}\,u_1\,u_3 + 2\,a_{23}\,u_{23} = 0.$$

Pourque la courbe k^4 possède un noeud d'inflexion, il faut que deux de coèfficients a_{12}, a_{13}, a_{23} soient égaux à 0. Si la courbe possède alors deux noeuds d'inflexion, le troisième point double sera aussi un noeud d'inflexion de cette courbe, et nous pouvons écrire son équation:

$$a_{11}\,x_2^{\,2}\,x_3^{\,2} + a_{22}\,x_3^{\,2}\,x_1^{\,2} + a_{33}\,x_1^{\,2}\,x_2^{\,2} = 0.$$

Ici la conique h est donnée par l'équation:

$$a_{11}\,u_1^{\,2} + a_{22}\,u_2^{\,2} + a_{33}\,u_3^{\,2} = 0.$$

Son équation devient en coordonnées des points

$$\frac{x_1^{\,2}}{a_{11}} + \frac{x_2^{\,2}}{a_{22}} + \frac{x_3^{\,2}}{a_{33}} = 0.$$

Il y est évident que la courbe h est déterminée par les tangentes aux points Q_1, Q_2, Q_3 de la courbe k^4.

Et puis si deux points doubles Q_1, Q_2 sont points circulaires à l'infini, la droite harmonique du point quelconque R est perpendiculaire à la droite $(Q_3 R)$ et partage en deux parties égales le segment $Q_3 R_0$ qui est égal au segment $R Q_3$. Si nous construisons par rapport à h une conique h^* homothétique pour le centre de l'homothétie Q_3 et pour le rapport $1: -2$, nous reconnaissons que la courbe k^4 est podaire de la courbe h^* pour Q_3 comme pôle. Les tangentes au point Q_3 sont données par l'équation $a_{11} x_2^2 + a_{22} x_1^2 = 0$, alors elles sont harmoniques par rapport aux droites $(Q_3 Q_1)$, $(Q_3 Q_2)$.

Si alors ces droites sont isotropes et par conséquent les asymptotes de la conique h sont perpendiculaires, cette conique est une hyperbole équilatère et la courbe k^4 est une lemniscate de Bernoulli.

Si c est l'excentricité linéaire de l'hyperbole h, k^4 est une courbe inverse à cette hyperbole par rapport à la circonférence $x^2 + y^2 = c^2$. Dans cette inversion la circonférence, qui a son centre G sur l'hyperbole h et passe par son centre Q_3 est transformée à une tangente à cette hyperbole au point qui est symétrique au point G par rapport à son axe. Par conséquent le théorème (0) donne le résultat:

„Pour construire les tangentes d'une lemniscate du point quelconque M situé sur elle, trouvons d'abord sur elle le point M', dans lequel elle coupe encore la droite $Q_3 M$ et construisons la symétrale m du segment $Q_3 M'$; les points dans lesquels m coupe la lemniscate sont les points de contact des tangentes cherchées."

De ce rapport nous pouvons exprimer le théorème de Laguerre:

„Si une courbe du quatrième ordre k^4 possède trois noeuds d'inflexion, les points de contact des tangentes qu'on peut mener de son point quelconque M à elle-même se trouvent sur la droite m."

La droite m est, comme on peut voir, l'harmonicale du point M par rapport au triangle $Q_1 Q_2 Q_3$.

Soient $t_1, \ldots t_4$ les tangentes mentionnées du point M; $T_1, \ldots T_4$ les points de conctact et $S_1, \ldots S_4$ les autres points d'intersection de cettes tangentes avec la courbe k^4.

La courbe k^4 et la courbe qui se décompose en droites $t_1 \ldots t_4$ déterminent un faisceau des courbes du quatrième ordre passant par seize points: les points $T_1, \ldots T_4$, et leur points infiniment voisins $T_1', \ldots T_4'$, les points $S_1, \ldots S_4$ et enfin le point M et ses points infiniment voisins M', M'', M''' sur k^4.

Parce que les points $T_1, \ldots T_4$ et $T_1', \ldots T_4'$ se trouvent sur deux tangentes infiniment voisins de la courbe h, il y a dans le faisceau une courbe qui se décompose en ces tangentes et en une conique. Alors nous obtenons le résultat: „La conique déterminée par les points $S_1, \ldots S_4$ et M a avec la courbe donnée k^4 en point M un contact du troisième ordre."

On peut énoncer le théorème réciproque:

„La courbe de la quatrième classe k_4, avec trois tangentes doubles dont les points de contact sont points de rebroussement possède la propriété suivante: Sa tangente quelconque t la coupe aux quatre points $T_1, \ldots T_4$; les tangentes à la courbe en ces points se coupent dans un point M qui est le point harmonique de la droite t par rapport au triangle déterminé par les tangentes doubles; si t se déplace en restant tangente de la courbe, le point M decrit une conique, qui joint tous les six points de rebroussement mentionnés; de chacun des points $T_1, \ldots T_4$ (outre la tangente en ce point même) passe encore une tangente à la courbe k_4 et il y a une conique qui a avec k_4 la tangente t et son point de contact communs, qui touches es quatre tangentes ici mentionnées et qui a avec elle en ce point un contact du 3e ordre."

Si nous appliquons ce théorème sur une développée de la conique, nous obtenons le rapport suivant:

„La conique h, dont les sommets sont les centres principaux de courbure d'une conique centrique k donnée, possède la propriété que les centres de courbure $T_1, \ldots T_4$ de la courbe k, qui appartiennent aux pieds de normales sortant du point quelconque sur h se trouvent sur une droite qui est elle-même une normale de la courbe k en un certain point. Si T est le centre de courbure pour la courbe k pour ce point, les autres normales qui peuvent être menées des points $T_1, \ldots T_4$ à la courbe k, déterminent avec t une conique qui a avec la développée de la courbe k en point T un contact du 3e ordre".[1])

Nous trouvons ce résultat aussi par une considération géométrique:

Soit t une normale de la courbe k en point M. Les pieds de trois autres normales de la conique k menées du point quelconque P sur t sont situés sur une circonférence p, passant par son point M' diamètralement opposé à M; si le point P se déplace sur la droite t, p forme un faisceau de circonférences passant par le point M' et par le pied de la perpendiculaire du centre O de la conique k à sa tangente au point M', ce que Joachimsthal avait démontré.[2])

Les centres P_0 de ces circonférences sont situés sur la droite t_0 parallèle à t, et par rapport à O symétrique à la droite qui partage en deux parties égales la distance du point O à t; ces centres forment une ponctuelle semblable à la ponctuelle des points P sur la droite t dans le rapport 1 : 2. Le centre de la perspectivité V de ces ponctuelles se trouve donc sur la conique h. Dans notre faisceau de circonférences, quatre circonférences existent, qui touchent la conique k. Ce sont les points de distribution pour l'involution du 3e degré, qui est donnée sur k par ce faisceau.

---

[1]) Cf. Laguerre, Oeuvres complètes t. II., p. 470 et s.

[2]) Cf. Journal de Crelle t. 26.

Pour chacune de ces circonférences, la droite qui joint son centre au point correspondant P est une normale de la conique k et ce point est le point d'intersection de deux normales infiniment voisines de la courbe k; c'est alors un des points d'intersection de la droite t avec la développée de cette courbe. Les tangentes de la développée aux points sur t se coupent alors dans le point V de la courbe h.

Нѣсколько добавленій къ морфологіи трахейной системы у личинокъ Diptera.

Ант. Виммеръ.

(Съ 15 рисунками въ текстѣ.)

(Представлено 7. марта 1924.)

(Съ чешскаго перевелъ *С. Новицкій*.)

Какъ только естественники ознакомились съ трахейной системой у личинокъ насѣкомыхъ, начались попытки изслѣдованія ея происхожденія и возникновенія. Сначала преобладалъ взглядъ, что трахейная система возникла изъ какого-нибудь внутренняго органа, который первоначально не служилъ цѣлямъ дыханія.

Эту теорію поддерживала, вмѣстѣ съ замкнутостью трахейной системы у личинокъ насѣкомихъ, догадка, что дыхальца личинокъ подёнокъ возникли путемъ отпаденія трахеальныхъ жабръ. На мѣстахъ, гдѣ жаберная трахея отстала отъ замкнутой трахеальной системы, возникли будто-бы въ ней и въ эпидермисѣ отверстія, которыя сдѣлались зачатками дыхалецъ.

Взглядъ, что закрытая трахейная система является первоначальнымъ типомъ, а открытая лишь его вторичнымъ измѣненіемъ, былъ поколебленъ эмбріологическими открытіями Ковалевскаго, Бючли, Hatschek'a, а также анатомическими открытіями Вейссманна и Пальмена.

Привожу ихъ въ сокращенной формѣ. Ковалевскій нашелъ у эмбріона личинки жука Hydrophilus эктодермальныя впячиванія, которыя разрослись въ 2 цилиндрическіе мѣшка такъ, что цѣлое впячиваніе пріобрѣло форму буквы T. Мѣшечки были расположены сегментально. Изъ нихъ возникаютъ трахеи. Мѣшечки, гомологичные вышеупомянутымъ, констатировалъ Бючли въ сегментахъ зародыша личинки рода Apis, а Hatschek также въ сегментахъ зародыша гусеницы.

Вейссманнъ и Пальменъ доказали, что и закрытая трахейная система соединяется съ кожными покровами (ея происхожденіе — эктодермально)

нѣжными волокнами, которыя Пальменъ назвалъ funiculi. Онъ-же нашелъ ихъ и у личинокъ Ephemera. Эти волокна соединены прямо съ покровами вблизи жаберъ. Изъ ихъ концовъ, а никоимъ образомъ не изъ мѣстъ отпаденія жаберныхъ трахей, образуются дыхальца у imago. Итакъ волокно соединяетъ замкнутую трахейную систему съ будущей стигмой системы открытой.

Funiculi констатировалъ позднѣе Hurst у личинокъ изъ рода Culex, то есть у личинокъ съ открытой трахейной системой, Zavřel же у личинокъ Pelopia съ системой замкнутой.

Въ настоящее время признанной считается слѣдующая теорія: у всѣхъ Tracheata трахеи возникли впячиваніемъ эктодермы, иногда и покрововъ внутрь тѣла. Въ тѣлѣ же *эти впячиванія разрослись въ разныя развѣтвленія и вѣточки. Вѣточки, встрѣчаясь, срастались.*

I. Моя задача показать, что въ природѣ есть доказательства сегментальнаго расположенія не только у личинокъ перипневстическихъ, но и амфипневстическихъ, какъ и у метапневстическихъ, у которыхъ на почти прямыхъ главныхъ стволахъ нѣтъ ни слѣда первичной сегментаціи. Вотъ тому примѣры:

a) Въ открытой трахейной системѣ личинокъ Cecidomyidae (Iteoniidae) имѣются совершенно очевидные слѣды сегментаціи (рис. 1.). Ихъ главные дорсальные стволы (tracheae anastom. longit. dorsales) составлены слѣдующимъ образомъ: изъ 9. дыхальца по правой и лѣвой сторонѣ идетъ сегментъ, который дистальнымъ концомъ своимъ прирастаетъ съ сегменту, выходящему изъ 8. дыхальца, этотъ послѣдній приросъ къ сегменту, выходящему изъ 7. дыхальца и такъ далѣе до дыхальца 2. Сегментъ же, вырастающий изъ 2. дыхальца, впадаетъ въ trach. cephalica dorsalis, которая выходитъ изъ 1. дыхальца. Подобнымъ образомъ составленный главный стволъ я нашелъ также у личинки Chalcididae изъ рода Torymus (Hymenoptera).

У личинокъ Cecidomyidae и у личинокъ рода Torymus можно замѣтить довольно явственную сегментацію главнаго ствола, которая поддерживаетъ взглядъ, что главные стволы возникли изъ сросшихся сегментовъ.

b) О томъ, что главные стволы у Cecidomyidae произошли изъ сросшихся элементовъ, свидѣтельствуютъ нѣкоторыя черты экзувіевъ (сброшенныхъ шкурокъ) у вида *Amaurosiphon caricis* Rübs. Когда я просматривалъ экзувіи куколокъ, мнѣ удалось найти у нихъ въ брюшкѣ распадающіеся главные стволы, а именно въ слѣдующемъ порядкѣ: сегментъ, выходящій изъ 9. дых., оторвался отъ сегмента изъ 8. дых., этотъ въ свою очередь отъ сегмента, выходящаго изъ 7 дых. Такое раздѣленіе продолжалось до самаго конца брюшка. Мѣста распада главнаго ствола одновременно указываютъ и мѣста сращеній.

c) Дорсальные сегменты трахей у личинокъ Pelopinae, какъ изображаетъ и пишетъ Zavřel (см. списокъ литературы), имѣютъ видъ уже

почти непрерывныхъ трубочекъ. Все же небольшая ихъ изогнутость вблизи дыхальцевыхъ дугъ позволяетъ и здѣсь подозрѣвать сегментацію.

d) При просмотрѣ шагъ за шагомъ всей трахейной системы навѣрное удастся найти слѣды сегментаціи на главныхъ стволахъ, какъ у личинокъ амфипневстическихъ, такъ и у метапневстическихъ. Такъ напр. у молодыхъ личинокъ рода Culex (метапневст.) я нашелъ слѣдующее: вблизи дыхательной трубочки находится перетяжка на главномъ стволѣ и сно у́же этого послѣдняго (рис. 2.). Въ слѣдующемъ кольцѣ тѣла это явленіе повторяется. Въ кольцахъ тѣла, слѣдующихъ далѣе, эти перетяжки менѣе замѣтны, хотя все же они у́же, чѣмъ главные стволы, которые передъ перетяжками и за ними какъ бы расширены. Если прослѣдить перетяжки далѣе на главномъ стволѣ по направленію къ головѣ, то онѣ представляются едва болѣе узкими, чѣмъ толщина главнаго ствола, оставаясь все же замѣтными.

Эти перетяжки несомнѣнно указываютъ границы отдѣльныхъ сегментовъ. Zavřel упоминаетъ въ своей работѣ „О дыханіи и дыхательныхъ органахъ личинокъ Chironomidae“ (O dýchání a dýchacích ústrojích larev Chironomidů) объ розетко-образномъ суженіи на главныхъ стволахъ Culicinae, хотя ихъ не изобразилъ и не описалъ. Я съ нимъ вполнѣ соглащаюсь, что это явленіе отличается отъ перетяжекъ, возникшихъ удушеніемъ, какъ это наблюдалъ Babák.

e) Съ внѣшней стороны на главныхъ стволахъ у личинокъ Culex pipiens L. можно замѣтить бугорки, изъ которыхъ вырастаетъ общее основаніе сегментовъ побочныхъ стволовъ (Trach. anastom. longit. ventralis) и вѣтви, называемой trachea ventralis (рис. 3.). Кромѣ того отъ нихъ также отвѣтвляются funiculi. Такъ какъ у личинокъ Diptera, у которыхъ развиты дыхальцевыя дуги, эти послѣднія служатъ мѣстомъ отвѣтвленія выщепоименованнымъ трахеямъ и волокнамъ (funiculi), то я считаю бугорки у Culex за рудименты дыхальцевыхъ дугъ а слѣдовательно также и за слѣды сегментаціи главныхъ стволовъ. Число этихъ бугорковъ, 8 паръ, отвѣчаетъ среднему числу дыхалецъ.

f) И у личинокъ рода Ptychoptera можно найти въ трахейной системѣ слѣды сегментаціи. Главные стволы по цѣлой длинѣ розетко-образно вздуты въ значительно большей степени, чѣмъ мы это видимъ у личинокъ Culicidae. Вздутія похожи на длинные мѣшечки, переходящіе въ болѣе короткіе и тонкіе отдѣлы. На главныхъ стволахъ можно замѣтить мѣста, гдѣ ранѣе были дыхальцевыя дуги. Изъ суженныхъ оральныхъ концовъ этихъ вздутій вырастаетъ общее основаніе висцеральной и вентральной трахеи. Эти вѣтви нормально выходятъ изъ дыхальцевыхъ дугъ, если-же таковыхъ не имѣется, то, понятно, основанія упомянутыхъ трахей указываютъ мѣсто, гдѣ раньше были дыхальцевыя дуги.

g) Хотя у личинокъ Stratiomyidae главные стволы представляютъ собою длинныя, однообразныя и почти вездѣ одинаково толстыя трубки, все же можно и на нихъ обозначить мѣста, гдѣ были когда-то дыхаль-

цевыя дуги. Это опять-таки основанія вентральныхъ и висцеральныхъ трахей. Описанныя явленія суть слѣды сегментаціи, хотя и довольно незначительные.

h) Изъ литературы приведу примѣры: Meinert нашелъ въ главныхъ стволахъ личинокъ Mochlonyx (нынѣ Corethra) на мѣстахъ сращеній даже тонкія перегородки. — Zavřel же наблюдалъ у экзувіевъ куколокъ Chironomidae распаденіе главнаго ствола на отдѣлы, какъ это нашелъ Hurst у экзувіевъ Culicinae, а Виммеръ у экзувіевъ Cecidomyidae (Itoniidae).

II. Возникшая разрастаніемъ и срастаніемъ трахейная система полностью развита только у личинокъ Fungivoridae (Mycetophilidae) исключая личинку Polylepta. Какъ примѣръ приведу Cordyla fuscata Latr. (рис. 4.). У личинки этого вида можно замѣтить умѣренно дугообразно-изогнутые главные стволы (tr. anastom. longit. dorsal.). Начальныя части сегментовъ, выходящихъ изъ дыхалецъ, называются дыхальцевыми дугами (tr. arcus stigmat.).

Дистальные концы главныхъ стволовъ соединяются поперечными анастомозами (trach. anastom. transv. dorsales); ихъ я насчиталъ 9, хотя личинки имѣютъ только 8 паръ дыхалецъ.

Изъ дыхальцевыхъ дугъ выходятъ сегменты побочныхъ (вентральныхъ) стволовъ и срастаются съ основаніемъ слѣдующихъ; ихъ 7 паръ. Середины ихъ соединяютъ между собою tracheae anastom. transv. ventrales; ихъ я нашелъ также 9.

Объ остальныхъ вѣточкахъ не упоминаю. Подобнымъ же образомъ я писалъ объ нихъ въ своей работѣ „О топографіи трахеальной системы у личинокъ двукрылыхъ“. (O topografii tracheální soustavy larev hmyzu dvojkřídlého).

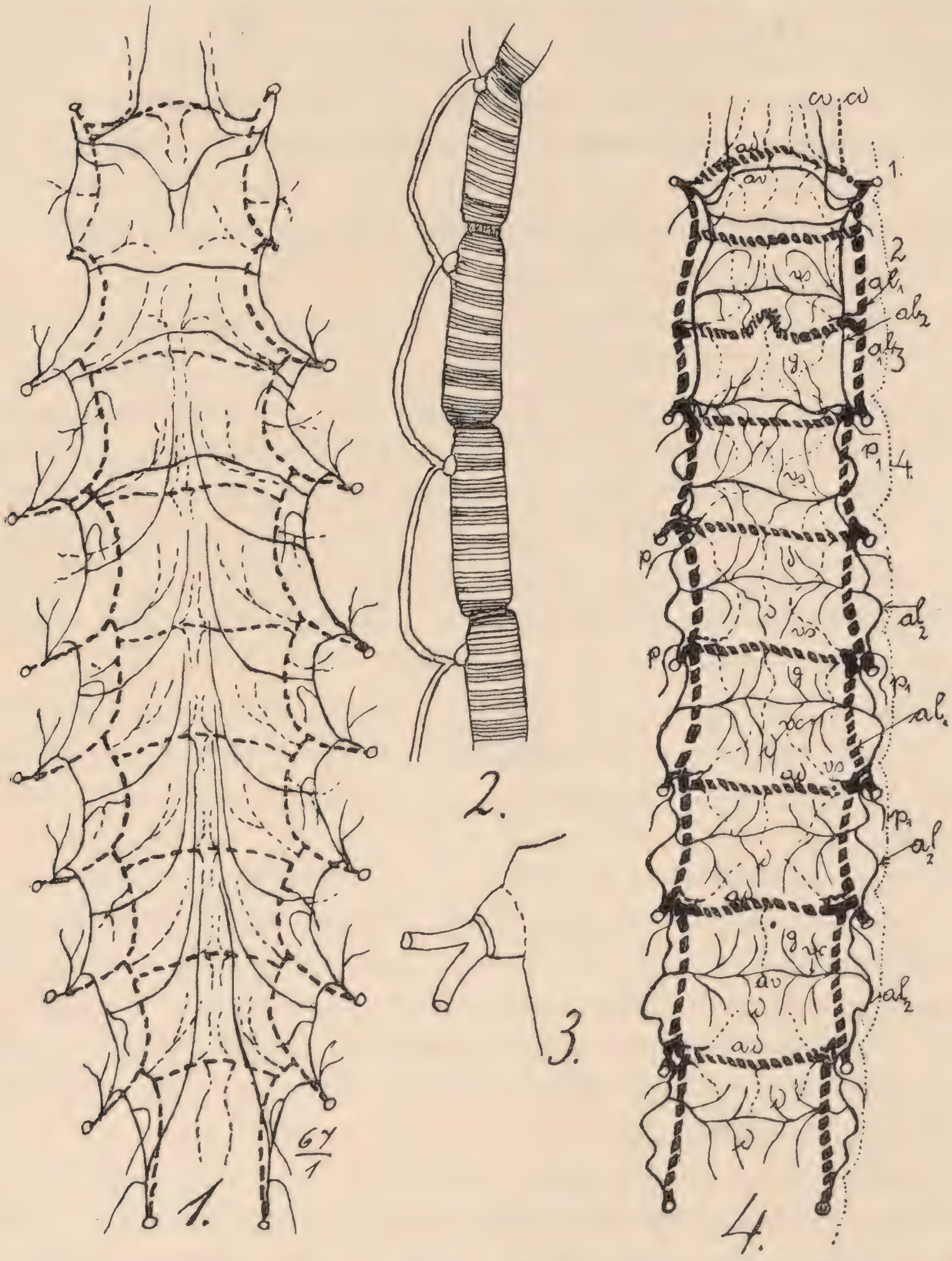
На видоизмѣненіе трахеальной системы оказала по Пальмену сильное вліяніе среда, въ которой живетъ личинка. Рѣшающее значеніе этого вліянія можно замѣтить въ дѣйствіи воды, которое вызываетъ въ трахейной системѣ личинокъ *упрощеніе* въ сравненіи съ системой личинокъ Fungivoridae.

Далѣе опишу постепенное упрощеніе трахеальной системы.

a) Первый шагъ къ упрощенію можно отмѣтить у личинокъ Cecidomyidae (Iteoniidae), хотя они обитаютъ въ средѣ мало отличающейся отъ той, въ которой живутъ личинки Fungivoridae. Эти послѣднія развиваются преимущественно въ грибахъ, Cecidomiidae же по большей части въ частяхъ сосудистыхъ растеній (въ особыхъ галлахъ). Вѣроятно, что изъ тканей сосудистыхъ растеній вытекаетъ при пораненіи болѣе влаги, чѣмъ изъ гифовъ грибовъ. Поэтому трахейная система Cecidomyidae упростилась слѣдующимъ образомъ:

Изъ 9 дорсальныхъ поперечныхъ вѣтокъ имѣется у нихъ лишь 8, изъ 9 вентральныхъ только 4. Остальное, какъ у Fungivoridae.

b) Дальнѣйшее упрощеніе появляется у личинокъ Lycoriidae (Sciaridae). Ихъ перипневстическія личинки живутъ главнымъ образомъ (опять-таки не всѣ) во влажномъ перегноѣ, или во влажной, богатой перегноемъ землѣ. У нихъ сохранились только 2 дорсальныя и 4 вентральныя пере-



1. Contarinia beticola Mik. Вся трахейная система отчасти схематически. — 2. Culex pipiens L. Сильно увеличенная часть главнаго ствола съ перетяжками и бугорками. — 3. Culex pipiens L. Бугорокъ на главномъ стволѣ, значительно увеличенный. — 4. Cordyla fuscata Latr. *ad* = дорсальныя перемычки al_1 = отдѣлы главнаго ствола. al_2 = отдѣлы побочнаго ствола. *av* = вентральныя перемычки *cd* = trach. cephal dorsalis. *cv* = tr. cephal. ventral. *ct* = tracheae dendriticaceae. *g* = вентральная трахея идущая къ гангліямъ. p_1 = вентральная плейральная трахея. *vc* = висцеральная трахея. *vs* = передняя сосудо-мускульная трахея (vasomuscularis). Значительно увеличено.

мычки. Отдѣлы побочныхъ стволовъ редуцировались и ихъ рудиментъ извивается между 1. и 2. дыхальцемъ справа и слѣва.

Во всемъ брюшкѣ исчезли побочные стволы.

c) Значительное упрощеніе трахеальной системы мнѣ удалось найти у амфипневстическихъ личинокъ вида Petaurista maculipennis Mg. (= trichocera). Она имѣетъ около 1. пары дыхалецъ толстую дорсальную перемычку и по одной тонкой въ 3. и 4. сегментахъ тѣла. Около послѣдней пары дыхалецъ *нѣтъ дорсальной перемычки,* и это представляетъ исключеніе изъ правила, которому подчиняются амфипневстическія личинки, имѣющія дорсальныя перемычки при 1. и при послѣдней парѣ дыхалецъ. Главные и побочные стволы хорошо развиты. Изъ вентральныхъ перемычекъ осталась лишь единственная. Личинки живутъ въ гніющихъ стебляхъ растеній, въ ручьяхъ и пещерахъ.

d) Упрощеніе продолжалось какъ у личинокъ амфипневстическихъ, такъ и у метапневстическихъ почти въ равной степени. Изъ амфипневстическихъ личинокъ самую простую трахеальную систему находимъ у личинки Petaurista, такъ какъ она имѣетъ на 6 дорсальныхъ перемычекъ меньше, чѣмъ остальныя амфипневстическія личинки. У послѣднихъ сохранились, какъ главные такъ и побочные стволы. Дорсальныя поперечныя анастомозы измѣнились за исключеніемъ первой и послѣдней въ тонкія искривленныя перемычки. Вентральныя поперечныя анастомозы уменьшились въ числѣ, или же совсѣмъ исчезли.

Трахейная система у метапневстическихъ личинокъ отличается отъ перипневстической только въ подробностяхъ. Для лучшаго ознакомленія и обзора привожу самые необходимые примѣры, и при этомъ наиболѣе характерные.

e) Представителемъ метапневстическихъ личинокъ является личинка рода Culex. Оба толстые главные ствола соединяются восемью дорсальными перемычками. Послѣднія тонки и искривлены. Изъ бугорковъ, о которыхъ мы уже говорили, выходятъ отдѣлы побочныхъ (вентральныхъ) стволовъ, составляющіе по сращеніи справа и слѣва 8 дугъ. Изъ послѣднихъ вырастаютъ вентральныя вѣтви. Вентральныхъ поперечныхъ анастомозъ я не нашелъ.

Цѣлая группа Brachycera, насколько я могъ констатировать, имѣетъ въ личиночной стадіи трахеальную систему амфипневстическаго характера. Она здѣсь упростилась приблизительно, какъ у личинокъ метапневстическихъ. Можно различить двѣ степени упрощенія.

Первая степень — у личинки рода Lonchoptera Mg. Здѣсь изъ дорсальныхъ перемычекъ первая и послѣдняя остались толстыми. Лежащія между ними 7 остальныхъ — тонки, искривлены и сильно развѣтвлены. Остальное не отличается отъ трахейной системы метапневстовъ. — Подробности читатель найдетъ въ работѣ Meijer'a о личинкѣ Lonchoptera. — Она живетъ во влажныхъ мѣстахъ въ гнилыхъ листьяхъ.

Вторая степень упрощенія встрѣчается у личинки рода Ptiolina Zett. Она живетъ въ маршанціи Pelia, плавающей по водѣ. Все въ ея

трахеальной системѣ осталось, какъ у Lonchoptera, исключая 1. и послѣднюю перемычку, которыя стали *тонкими*.

f) Мы бы ожидали, что амфипневстическія личинки Cyclorrhapha, подотряда двукрылыхъ, который значительно уклонился отъ Orthorrhapha, будутъ обладать самой простой трахеальной системой. Но развитіе ихъ трахейной системы остановилось на стадіи амфипневстическихъ Brachycera съ двумя слѣдующими отклоненіями:

α) Личинки Cyclorrhapha всегда имѣютъ очень толстыя 1. и послѣднюю перемычки.

β) Самыя молодыя стадіи личинокъ носятъ слѣды болѣе сложной трахейной системы въ видѣ 1 или 2 вентральныхъ перемычекъ.

g) При разборѣ вопроса объ упрощеніи трахейной системы нельзя обойти молчаніемъ открытія Schmitz'a. Онъ изслѣдовалъ личинку Polylepta leptogaster Winn., которую нашелъ у Maastricht'a въ пещерахъ. Передъ этимъ ее находили Bezzi, Jeannel и Ratzovitza въ другихъ пещерахъ. Schmitz убѣдился, что вышеупомянутая личинка имѣетъ открытыми только первыя стигмы; 2. закрыты, остальныя исчезли.

Между 1. и 2. дыхальцами сохранился рудиментъ дорсальной части трахейной системы, а именно: 2 tracheae cephalicae, дорсальная перемычка, затѣмъ часть главн. ствола между 2. и 1. дых. Редукція трахейной системы у личинки Polylepta, хотя и неясно, но все же позволяетъ замѣтить въ себѣ слѣды трахейной системы Chironomus'овъ (личинокъ), имѣющихъ *закрытую трахейную систему*. Необходимо подчеркнуть, что мы не придерживаемся мнѣнія, что личинка Polylepta была предшественницей личинокъ Chironomus, а лишь, что эта личинка даетъ указанія относительно пути, по которому могло проходить развитіе отъ *открытой* трах. системы (уже редуцированной) къ замкнутой и тоже редуцированной трах. сист. Личинки Chironomus обладаютъ въ общихъ чертахъ одинаково редуцированной трах. системой, какъ и личинка Polylepta leptogaster. У личинокъ Chironomus остался рудиментъ главныхъ стволовъ, тянущійся отъ передняго края 3. торакальнаго кольца черезъ 2. и 1. въ голову. Вмѣсто дорсальной перемычки, которая еще имѣется у Polylepta, мы видимъ у личинокъ Chironomus корреспондирующіе пучки трахей. Личинка Chironomus имѣетъ вентральныя трахеи, выходящія прямо изъ главныхъ стволовъ; онѣ отсутствуютъ у Polylepta. Zavřel указываетъ, что многія личинки Chironomus имѣютъ и въ брюшкѣ рудиментъ трахейной системы.

Слѣдуетъ обратить вниманіе на интересныя совпаденія у обѣихъ личинокъ, состоящія въ томъ, что обѣ принимаютъ воздухъ изъ воды покровами брюшка (у Chironomus особымъ образомъ измѣненными), что у обѣихъ атрофировалась трахейная система и наконецъ, что у перойв (Polylepta) есть тенденція къ закрытію и исчезновенію дыхалецъ, у второй же эти послѣднія уже закрылись и исчезли.

Далѣе отмѣчаемъ, какъ дѣйствовалъ на упомянутныхъ личинокъ переходъ дыхательныхъ функцій съ однихъ органовъ на другіе. Дыхальца закрывались, трах. система редуцировалась, наконецъ дыхальца исчезли, вслѣдствіе чего возникла замкнутая трахейная система. Ясно видно, что тутъ на образованіе новыхъ признаковъ оказывала вліяніе среда. Насѣкомое, которое попыталось бы принимать воздухъ изъ воды дыхальцами, подвергалось опасности, что они будутъ залиты. Благодаря постоянному сопротивленію тѣла противъ воспріятія воды вмѣстѣ съ воздухомъ, закрывались понемногу дыхальца, пока совершенно не исчезли. Ихъ функцію приняли на себя покровы.

Какъ отразилось упрощеніе трах. системы на снабженіи воздухомъ мозга и брюшного нервнаго тяжа, я излагаю въ своей работѣ „Trachealisation des Kopfes und des Nervenbauchstranges der Dipterenlarven“.

III. *Возникновеніе дорсальныхъ перемычекъ.* Прежде всего обратимъ вниманіе на перемычки, соединяющія двѣ дорсальныя головныя вѣтви (tr. ceph. dors.) у личинки *Lycoria Thomae,* L. На первый взглядъ кажется, что обѣ головныя вѣтви вырастаютъ изъ 1. дорсальной перемычки.

Если-же прослѣдить эту кажущуюся перемычку отъ дыхальцевой дуги, то правая и лѣвая части ея представляются (рис. 6.), какъ основная часть головной трахеи. Отъ этой основной части отдѣляется по вѣтви къ мозгу (tr. cerebr. dorsal.), и только между этими послѣдними развилась коротенькая перемычка, возникшая изъ сросшихся побочныхъ вѣточекъ церебральныхъ трахей. Слѣдовательно *цѣлая trachea anastom. transv. dorsalis образована изъ 2 основныхъ частей головной трахеи, изъ 2 основныхъ частей церебральныхъ трахей и изъ сросшихся побочныхъ вѣтокъ послѣднихъ.*

Подобнымъ же образомъ устроены трахеи у личинки Contarinia loti, Deg. (рис. 7.), у которой измѣнилось лишь направленіе трахей. Такъ такъ мозгъ сдвинутъ въ грудныя кольца, трахеи головы направлены въ началѣ назадъ (аборально). Тамъ, гдѣ изъ нихъ вырастаетъ по одной церебральной трахеѣ, поворачиваются первыя опять въ оральномъ направленіи и входятъ въ голову. Церебральныя дорсальныя трахеи соединены опять-таки короткой перемычкой, образованной побочными вѣточками церебральной трахеи. Цлѣдовательно trach. anast. transv. dorsalis возникла здѣсь опять изъ частей головной вѣтви, изъ частей церебральныхъ вѣтвей и изъ побочныхъ вѣточекъ. То же явленіе я наблюдалъ у всѣхъ личинокъ Eucephala и Brachycera, поскольку я ихъ смогъ изслѣдовать.

У личинокъ *Cyclorrhapha я не смогъ установитъ присутствія дорсальныхъ церебральныхъ трахей.* Поэтому у нихъ дѣло обстоитъ проще. Ихъ trach. anastom. transv. dorsalis возникла исключительно изъ сросшихся вѣтвей головной трахеи.

Подобнымъ же образомъ образовалась 1. дорсальная перемычка у *Pelopinae.* У нихъ имѣется trach. cerebr. dorsal. Но она отщепилась

такъ далеко отъ головной трахеи, что, судя по изображеніямъ Zavřel'a, она не могла принять участія въ образованіи дорсальной перемычки.

Возникновеніе остальныхъ дорсальныхъ перемычекъ въ груди и брюшкѣ быть можетъ намъ объяснятъ слѣдующіе примѣры: *a*) Личинки Lycoria имѣютъ на концѣ брюшка единственную дорсальную перемычку, а передъ ней по 1 сосудо-мускульной трахеѣ (tr. vasomuscularis) (рис. 12.). Въ переднихъ частяхъ брюшка, гдѣ нѣтъ дорсальныхъ перемычекъ, имѣется 2 пары сосудо-мускульныхъ трахей. *b*) Личинки вида Petaurista maculipennis имѣютъ въ 1. брюшномъ кольцѣ тонкую дорсальную перемычку, а передъ ней одну-единственную пару сосудо-мышечныхъ трахей, а именно tracheae vasomuscul. anter. и poster. *c*) Въ тѣлѣ личинокъ почти всѣхъ Iteoniidae (Cecidomyidae) и Fungivoridae (кромѣ рода Polylepta) оба главные ствола соединяются почти во всѣхъ кольцахъ тѣла дорсальными перемычками. За то въ каждомъ кольцѣ тѣла имѣется лишь по 1 парѣ сосудо-мускульныхъ трахей и при этомъ лишь переднихъ (anteriores), а никогда не заднихъ (posteriores). *d*) Всѣ амфипневстическія личинки Cyclorrhapha, имѣя въ груди и брюшкѣ дорсальныя перемычки, также не имѣютъ заднихъ (posteriores) сосудо-мускульныхъ трахей.

Такъ какъ въ сегментахъ тѣла личинокъ не наблюдается trachea vasomuscul. posterior, когда имѣются дорсальныя перемычки, я заключаю, что послѣднія *возникли сращеніемъ заднихъ сосудо-мускульныхъ трахей.*

Доказательства того, что дорсальныя перемычки суть продукты сращенія мнѣ удалось найти въ трехъ случаяхъ. *a*) Я получилъ личинокъ Piophila sp., приготовившихся къ окукленію. Приготовленіе къ этому процессу подтверждалось также выдающимися и разросшимися имагинальными дисками. Когда я выпрепарировалъ трахейную систему изъ передней части туловища, то увидѣлъ посерединѣ толстой передней перемычки какъ-бы надрѣзъ (рис. 5.). *b*) Я снялъ шкурку личинки съ Pegomyia nigritarsis въ томъ моментѣ, когда она закукливалась. Въ ней я нашелъ толстую 1. дорсальную перемычку, раздѣленной пополамъ. Здѣсь опять-таки перемычка дѣлилась въ томъ мѣстѣ, гдѣ вѣроятно срослась. *c*) Въ шкуркѣ куколки Rhagoletis cerasi 1. перемычка уже совершенно раздѣлилась, и обѣ части, будучи вытянуты изъ тѣла, прилегали къ главнымъ стволамъ.

IV. *Исчезнованіе толстыхъ дорсальныхъ перемычекъ стоитъ въ связи съ исчезновеніемъ дыхалецъ.* Этотъ взглядъ можно подтвердить слѣдующими наблюденіями:

a) Перипневстическія личинки, исключая личинокъ Lycoria, имѣютъ при каждой парѣ дыхалецъ по толстой перемычкѣ.

b) Въ тѣлѣ личинокъ Iteoniidae (Cecidomyidae), тоже перипневстическихъ, я нашелъ въ 3. кольцѣ груди рудиментъ-тупикъ дыхальцевой дуги, при отсутствіи дорсальной перемычки. Здѣсь исчезла перемычка тамъ, гдѣ пропало дыхальце.

c) У личинокъ Brachycera и Cyclorrhapha, поскольку я ихъ изслѣдовалъ, остались 2 пары дыхалецъ: передняя и задняя. Непосредственно около нихъ главные стволы соединены почти всегда толстой trachea anastom. transv. dorsalis; слѣдовательно при двухъ парахъ дыхалецъ — двѣ перемычки.

d) Метапневстическія личинки, характеризованныя наружно единственной парой стигмъ, имѣютъ при ней внутри единственную толстую дорсальную перемычку.

e) Личинка Polylepta leptogaster Winn. имѣетъ первую пару дыхалецъ открытою, вторая же редуцирована и закрыта. Остальныя пары дыхалецъ исчезли. Какова же картина у этой личинки внутри? У первыхъ дыхалецъ дорсальная перемычка толще, у вторыхъ, редуцированныхъ, уже тоньше. Въ брюшкѣ, гдѣ нѣтъ дыхалецъ—нѣтъ и перемычекъ. Изъ этого ясно, что редукція дыхалецъ находится въ связи съ редукціей толстыхъ перемычекъ, а изчезновеніе дыхалецъ съ исчезновеніемъ таковыхъ, или по меньшей мѣрѣ съ ихъ радикальнымъ измѣненіемъ (редукціей).

Моему взгляду, противорѣчатъ факты въ трахейной системѣ личинокъ Lycoria, которыя несутъ на брюшкѣ, какъ дыхальца такъ и дыхальцевыя дуги, а всетаки и здѣсь мы видимъ исчезновеніе дорсальныхъ перемычекъ (tracheae anastom. transv. dorsales). Это отклоненіе я объясняю особой тенденціей личинокъ къ амфипневстическому типу, заключающейся въ томъ, что дыхальца, лежащія между 1. и послѣдней парой — значительно меньше, и что при большихъ стигмахъ остались толстыя перемычки, и притомъ при двухъ парахъ — двѣ.

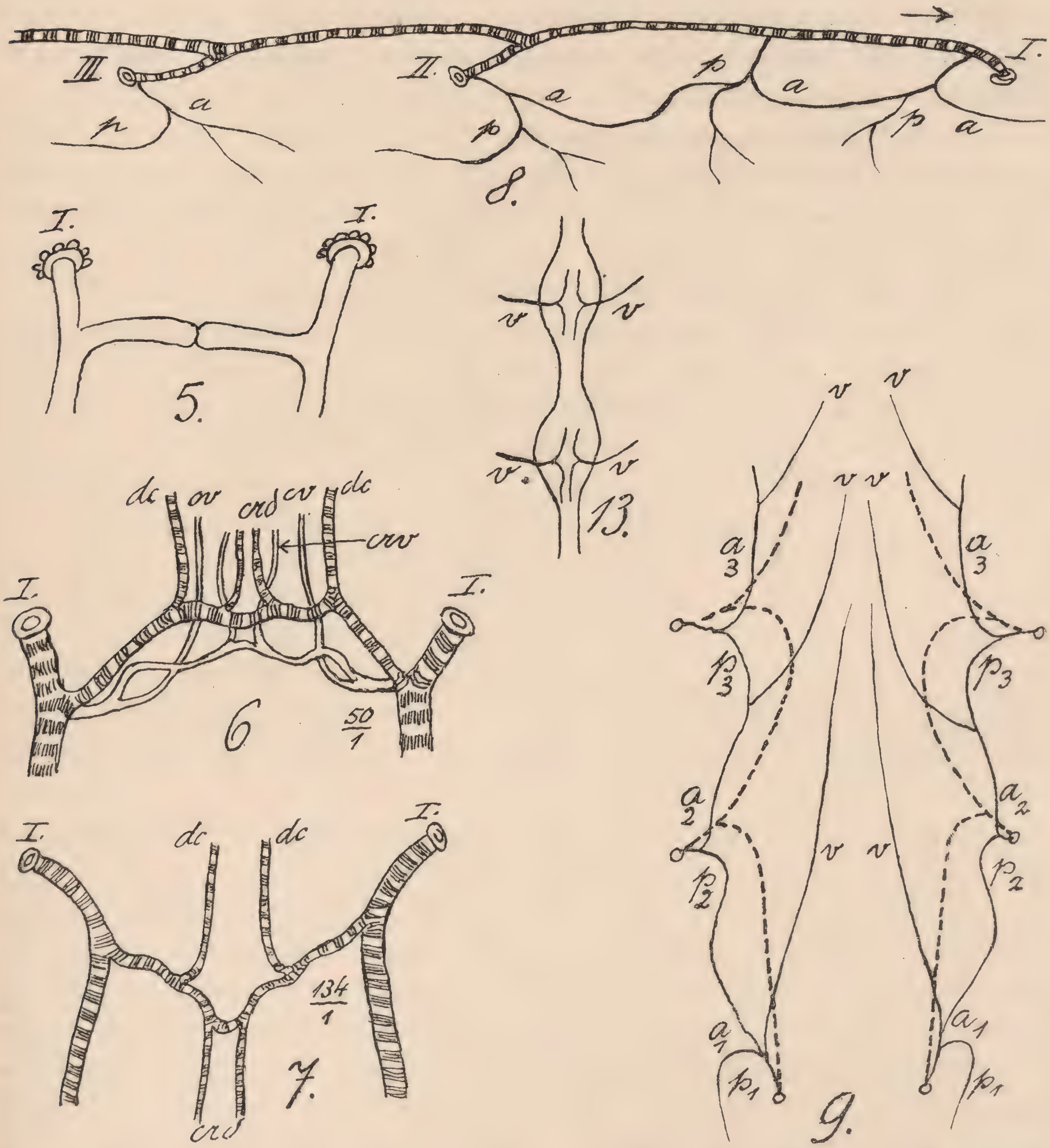
Далѣе можетъ служить объясненіемъ фактъ, что *редукція стигмъ не происходитъ въ одинаковой степени съ редукціей дорсальныхъ перемычекъ.* Такъ у личинокъ рода *Cordyla,* хотя дыхальца въ 3. грудномъ кольцѣ и отсутствуютъ, все же сохранилась тонкая, т. е. частично редуцированная перемычка. Наоборотъ у *Megadiplosis* дорсальная перемычка 3-го грудного кольца исчезла, несмотря на то, что рудиментъ дыхальцевой дуги сохранился. Далѣе у личинокъ амфипневстическихъ исчезли всѣ стигмы, лежащія между 1-ой и послѣдней парой, кромѣ этихъ обѣихъ. У личинокъ этихъ 1. и послѣдняя перемычки толстыя, тогда какъ остальныя очень тонки, искривлены и обильно развѣтвлены. При сравненіи ихъ съ толстыми и почти прямыми поперечками личинокъ Cordyla fuscata Latr., выясняется, что при имѣющихся дыхальцахъ перемычки не редуцированы, тамъ же, гдѣ они отсутствуютъ — редуцированы.

По наблюденіямъ Zavřel'a апневстическія личинки *Tanypina имѣютъ 3 дорсальныя* перемычки, хотя у нихъ, какъ у всѣхъ личинокъ съ замкнутой трахейной системой, дыхальца совершенно отсутствуютъ.

Личинка *Petaurista Maculipennis Mg.*, имѣетъ, будучи амфипневстической, 3 перемычки въ тѣлѣ: 1. вьется у 1. пары стигмъ, 2. же и 3. въ той

части тѣла, гдѣ стигмы отсутствуютъ. Такъ какъ онѣ тонки — то онѣ редуцированы.

Приведенныхъ примѣровъ вѣроятно будетъ достаточно для подтвержденія высказаннаго взгляда, что редукція дыхалецъ не прогресси-



5. Piophila sp. Дѣленіе дорсальной перемычки при окукливаніи. — 6. Lycoria Thomae L. *crd* = tr. cerebral. dorsal., *crv* = tr. cerebr. ventr., *dc* = trach. cephal. dorsalis. — 7. Contarinia loti Deg. Часть дорсальныхъ трахей при 1. дыхальцѣ. *crd* = tr. cerebral. dorsal., *dc* = tr. cephal. dorsal. Значительно увеличено. — 8. Lycoria morio Fbr. Часть главнаго ствола между I. и III. дыхальцами съ прилежащей вентральной частью. Между I. и II. дыхальцами побочный стволъ, между II. и III. несоединенныя вѣтви. *a* = tr. ventralis anterior, *p* = tr. ventralis posterior. Стрѣлка обозначаетъ направленіе къ головѣ. — 9. Contarinia beticola Mik. Конецъ трахейной системы, полусхематично. a_1, a_2, a_3, = trach. ventr. anterior, p_1, p_2, p_3, = tr. ventr. posterior, *v* = дистальныя вѣтви tr. ventralis anterior. Сильно увеличено. — 13. Pachyrrhina pratensis L. 2 ганглія съ дистальными концами вентральной трахеи (*v*).

руетъ рука объ руку съ редукціей толстыхъ дорсальныхъ перемычекъ и наоборотъ.

V. Въ своей работѣ „O dýchání a dýchacích ústrojích larev Chironomidů“ (О дыханіи и дыхательныхъ органахъ личинокъ Chironomidae) пишетъ докторъ Zavřel на 8. стр.: „Продольныя вентральныя анастомозы (tr. anastom. longit. ventrales) . . . ясно показываютъ, что они возникли главнымъ образомъ изъ tr. ventralis posterior, а можетъ быть и изъ нѣкоторой плевральной вѣточки слѣдующей дыхальцевой дуги“.

Я по существу соглашаюсь съ этимъ взглядомъ, но утверждаю, что trachea anastomat. longitudinalis ventralis образовалась изъ сросшихся tr. ventralis posterior и tr. ventralis anterior. Вотъ доводы, приводимые мною въ доказательство такого толкованія:

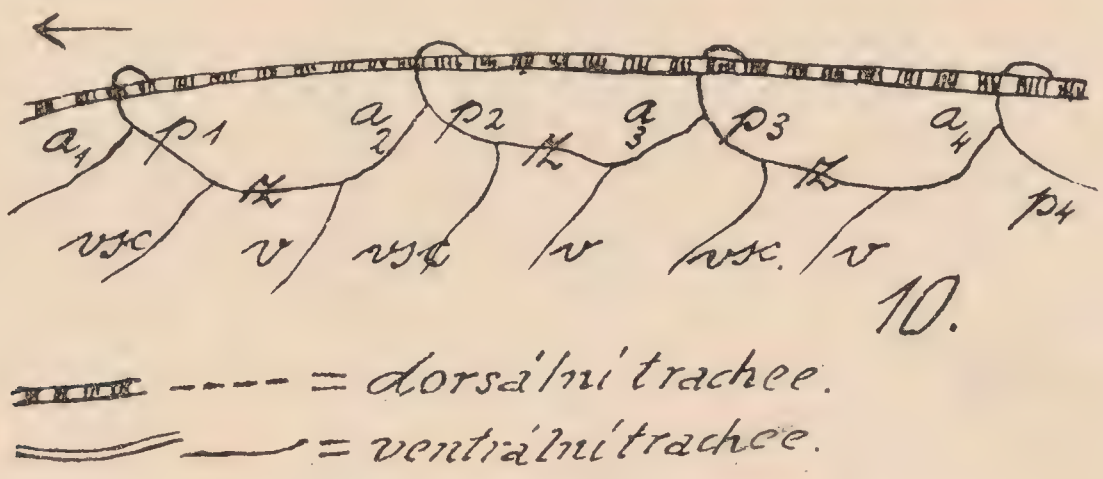
a) Какъ уже мною неоднократно приводилось, рудиментъ побочнаго (вентральнаго) трахейнаго ствола у личинокъ Lycoria проходитъ только между 1. и 2. дыхальцами (рис. 8). У второго дыхальца выходитъ изъ дыхальцевой дуги развѣтвленная вентральная trachea posterior (рис. 8 *p*). Она изгибается въ аборальномъ направленіи. Изъ III. дыхальцевой дуги выходитъ вентральная трахея, передняя вѣтвь которой (рис. 8 *a*) изгибается орально навстрѣчу вѣтви задней, выходящей изъ II. дыхальцевой дуги. То же самое повторяется регулярно между III. и IV., IV. и V. и т. д., и наконецъ между послѣдней и предпослѣдней дыхальцевой дугой. Какъ въ положеніи, такъ и въ формѣ, здѣсь повторяется все то же, что наблюдается и на предыдущей анастомозѣ, называемой tr. anastom. longit. ventralis передъ II. дыхальцемъ, съ той лишь разницей, что передъ II. дыхальцемъ (въ оральномъ направленіи) вѣточки срослись въ одну анастомозу, тогда какъ за II. дыхальцемъ (въ аборальномъ направленіи) анастомоза неполная; она раздѣлена на двѣ, одна къ другой направленныя вѣточки (*a*, *p*).

b) Личинки Cecidomyidae имѣютъ очень хорошо развитыя tracheae anastomat. longitud. ventrales. Приблизительно посерединѣ члениковъ тѣла эти трахеи внезапно изгибаются, и изъ сгиба вырастаетъ trachea ventralis (рис. 9 *v*). Если внимательно сравнить расположеніе вентральныхъ трахей личинокъ Cecidomyidae съ таковымъ у личинокъ Lycoria, можно считать, что отдѣлъ, высылающій вѣтвь къ гангліямъ, представляетъ собою вѣтвь, называемую „trachea ventralis anterior (рис. 9 a_1, a_2, a_3), тогда какъ другую вѣтвь можно считать за трахею, называемую „tr. ventralis posterior“. (рис. 9 p_1, p_2, p_3).

c) Новое затрудненіе толкованію этихъ сращеній воздвигаетъ trachea visceralis у личинокъ подотряда Cyclorrhapha. Въ тѣлѣ этихъ личинокъ вырастаютъ наряду съ плейральными вентральными вѣточками изъ побочныхъ стволовъ (tr. an. long. ventr.) совершенно самостоятельно (какъ будто) еще висцеральныя трахеи въ каждомъ кольцѣ брюшка и въ заднихъ кольцахъ груди. Передняя вѣтвь направляется къ нервамъ (конецъ вентральной трахеи), тогда какъ задняя trachea visceralis къ пищевари-

тельному каналу. Этотъ фактъ приводитъ наблюдателя въ полное недоумѣніе, еще усиливаемое однимъ обстоятельствомъ, извѣстнымъ у взрослыхъ жуковъ, а именно: висцеральная трахея выходитъ прямо изъ главнаго ствола (tr. an. long. dors.), какъ утверждаетъ Kolbe. Что касается личинокъ двукрылыхъ, то я въ своей прежней работѣ „O topografii tracheální soustavy larev hmyzu dvoukřídlého“ (О топографіи трахейной системы личинокъ двукрылыхъ) доказалъ, что *trachea visceralis никогда не выходитъ изъ главнаго ствола*, а всегда изъ побочныхъ стволовъ или, если ихъ нѣтъ, изъ вентральной трахеи.[1]) Этимъ отличается трахейная система двукрылыхъ отъ таковой личинокъ Aphrophorina (Homoptera), у которыхъ висцеральная трахея выходитъ прямо изъ дыхальцевой дуги за основаніемъ вентральной перемычки.

Покончивъ съ мѣстомъ отхожденія висцеральной трахеи у личинокъ двукрылыхъ, вернемся опять къ личинкамъ Cyclorrhapha. У этой группы



10. Pegomyia nigritarsis Ztt. Часть главнаго и побочнаго ствола. a_1, a_2, a_3, a_4 = передняя вентральная трахея, p_1, p_2, p_3, p_4 = задняя вентральная трахея, z = соединеніе, возникшее сращеніемъ концовъ трахей a и p, v = собственно вентральная трахея, vsc = tr. visceralis. Стрѣлка обозначаетъ направленіе къ головѣ.

tr. visceralis выходитъ совершенно самостоятельно и довольно далеко отъ основанія вентральной вѣтви. Это бы опровергало высказанный взглядъ о происхожденіи побочныхъ стволовъ. Взглянувъ на Lycoriina, можно и побочные сегменты трахей личинокъ Cyclorrhapha свести къ схемѣ личинокъ Lycoriina. Висцеральная трахея выходитъ далеко отъ основанія вентральной, какъ и задняя вѣточка большой вентральной вѣтви (рис. 10 *vsc*), за то конецъ вентральной трахеи (рис. 10 *v*) представляетъ часть передней вѣтви (рис. 10 *a*). Остальная часть трахеи (рис. 10 *z*) есть или задняя или передняя вѣтка вентральной вѣтви. Такимъ образомъ можно объяснить, почему у личинокъ Cyclorrhapha trachea visceralis кажется передней вѣткой, а trachea ventralis (лучше было бы ее называть tr. neuralis) задней вѣткой. Если нарисовать схему по личинкамъ Lycoria, то станетъ ясно, что и побочные стволы личинокъ Cyclorrhapha произошли изъ сращенія передней вѣтки съ задней. Zavřel подчеркнулъ роль задней вѣтви при этомъ, я же доказываю, что здѣсь при-

[1]) Я былъ склоненъ думать, что вентральная трахея и есть висцеральная, и такъ ее во всѣхъ прежнихъ работахъ и называлъ; здѣсь я эту ошибку исправляю.

нимали участіе обѣ вентральныя вѣтви, какъ *заднія, такъ и переднія*. Этимъ мои взгляды нѣсколько отличаются отъ взглядовъ Zavřel'a.

Я считаю доказаннымъ, что сегменты побочныхъ стволовъ у личинокъ двукрылыхъ возникли путемъ сращенія передней вѣтки вентральной трахеи съ задней вѣткой ея же. Плейральныя вѣтки приняли участіе лишь тамъ, гдѣ возникаютъ у началъ сегментовъ побочнаго ствола маленькіе, ограниченные трахеями трехугольники (Phytomyza xylostei).

VI. Вслѣдствіе вышеизложеннаго, я могу утверждать, *что основной частью при образованіи вентральнаго отдѣла трахейной системы является trachea ventralis со своими боковыми вѣтками*. Ея дистальные концы образовали, срастаясь, вентральныя перемычки. Эту гипотезу я основываю на слѣдующемъ:

1. Личинка Dasyneura lamiicola, Mik. имѣетъ въ передней части тѣла 4 вентральныя перемычки, которыя сильно искривлены (рис. 11 *av*). Почти что изъ ихъ середины выходятъ вѣтки, снабжающія воздухомъ ближайшіе ганглііи. Въ сегментахъ тѣла далѣе назадъ извиваются несросшіяся вентральныя вѣтки (рис. 11 *v*), но концы ихъ лежатъ въ гангліяхъ настолько близко другъ къ другу, что мнѣ сперва казалось, будто бы онѣ срастаются въ перемычки. Для образованія таковыхъ не хватаетъ дѣйствительно лишь нѣсколькихъ милиметровъ. Это явленіе встрѣчается почти что у всѣхъ Iteoniidae.

2. Личинки *Lycoria* доставляютъ воздухъ въ грудные ганглііи изъ 2 вентральныхъ перемычекъ (рис. 12). Въ первомъ брюшномъ кольцѣ несросшіеся концы вентральныхъ трахей проходятъ подобнымъ образомъ, какъ 2 предыдущія перемычки. Наблюдатель увидитъ на концевыхъ отдѣлахъ вентральной трахеи тѣ же короткія вѣточки, вьющіяся вдоль средней оси и проникающія какъ къ гангліямъ, такъ и къ подкожнымъ мускуламъ, т. е. такъ же, какъ это происходитъ и у перемычекъ. Это расположеніе внушаетъ предположеніе, что перемычки и вѣтки — одного происхожденія.

3. Изслѣдованіе дистальныхъ концовъ у личинокъ Pachyrrhina и Tipulina (рис. 13 *v*) намъ показываетъ, что концы лежатъ настолько близко другъ къ другу, что кажутся сросшимися. Было бы довольно вѣточки длиною въ нѣсколько милиметровъ, съ обѣихъ сторонъ, и перемычка была бы налицо.

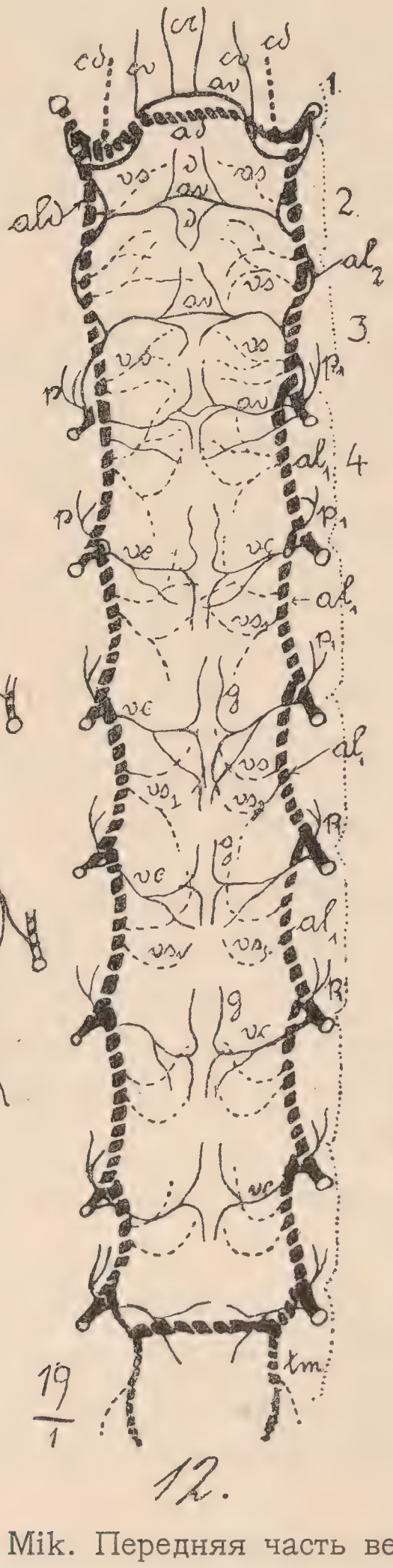
4. Если внимательно посмотрѣть на вентральную часть трахейной системы молодой личинки Fegomyia nigritarsis Ztt. (рис. 14), можно замѣтить, что первыя вѣтви вентральной трахеи вполнѣ срослись, вторыя, такъ сказать, едва соединены, третья же пара вовсе не образовала перемычки.

5. У молодой личинки Drosophila fenestrarum, Fall (рис. 15) вентр. перемычки проходятъ (рис. 15 *av*), подобнымъ же образомъ, какъ и несросшіяся вентральныя трахеи слѣдующихъ сегментовъ тѣла (15 *v*).

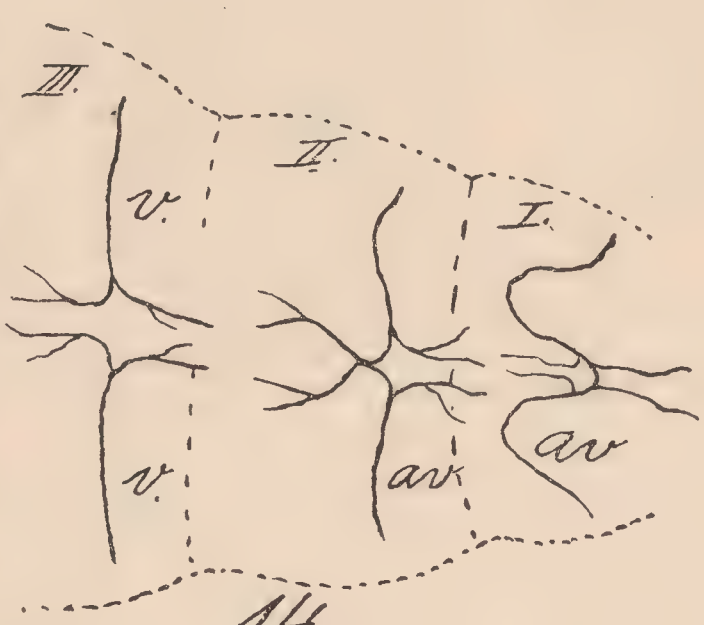
Обстоятельствами, приведенными подъ 1—5 пунктами, я доказываю вышеизложенное утвержденіе, что *вентральныя перемычки суть сросшіяся вентральныя трахеи.*

Лишь теперь нахожу возможнымъ коснуться самаго затруднитель-

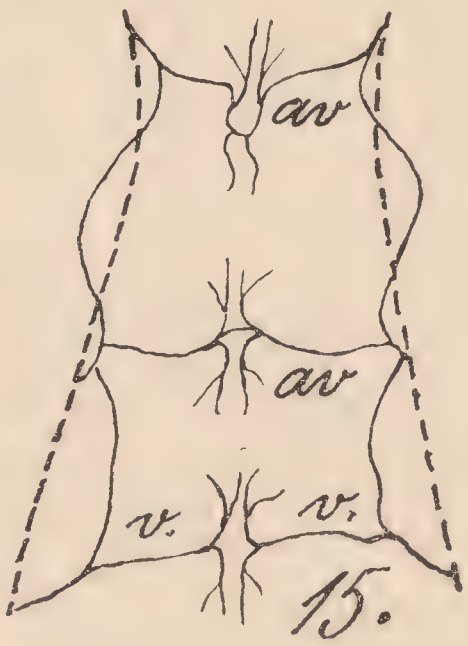
11.



12.



14.



15.

11. Dasyneura lamiicola, Mik. Передняя часть вентральной трахеи снизу. Схематически. *av* = вентральныя перемычки, *v*, *v* = вентральныя вѣтви. — 12. Lycoria Thomae, L. Трахейная система полусхематично. *ad* = дорсальныя перемычки, al_1 = = отдѣлы главнаго ствола, *av* = вентральныя перемычки, *cd* = trach. cephalica dorsalis, *cv* = tr. ceph ventralis, *d* = tr. dendrit,. *g* = вентральная трахея, p_1 = = вентральная плевральная трахея, *vc* = висцеральная трахея, *vs* = tr. vasomuscular. anterior, vs_1 = vasomuscularis posterior. — 14. Pegomyia sp. Молодая личинка. *av* = вентральныя перемычки *v*, *v* = вентральныя вѣтви Передняя часть тѣла снизу; схематично. — 15. Drosophila fenestrarum, Fall. Передняя часть трахейной системы молодой личинки; схематично. *av* = вентральныя перемычки *v*, *v* = вентральныя вѣтви. Всѣ рисунки увеличены.

наго вопроса, а именно: нарушалась ли упрощеніемъ трахейной системы цѣлость вентральныхъ перемычекъ? Отвѣты даютъ намъ примѣры трахейной системы молодыхъ личинокъ подотряда Cyclorrhapha. Эти личинки имѣютъ въ молодости (предыдущіе 4. и 5. примѣры) 1 или 2 вентральныя перемычки, послѣ же линьки — ни одной. Здѣсь очевидна тенденція къ распаденію вентральныхъ перемычекъ въ вѣтви при процессѣ упрощенія. Кромѣ того 4. и 5. примѣры доказываютъ, конечно лишь неясно, первичность системы, характеризованной трахейными перемычками.

VII. Кажется, что въ природѣ нѣтъ ни одного доказательства для личинокъ амфипневстическихъ, показывающаго, *какъ приблизительно возникла ихъ трахейная система.*

Я предполагаю, что ключомъ къ этому вопросу является трах. система Lycoria (Sciara). Я наблюдалъ снаружи у этихъ личинокъ лишь стремленіе къ типу амфипневстовъ. Я убѣдился на значительномъ числѣ личинокъ Lycoria Thomae L. и Lyc. morio Fabr., что 1. и послѣднія дыхальца довольно большой величины, тогда какъ между ними лежащія — малы. Если представить себѣ, что эти маленькія дыхальца закрылись, и отъ неупотребленія въ концѣ концовъ исчезли, то получится снаружи типъ амфипневстической личинки.

У личинокъ Lycoria же двѣ толстыя дорсальныя перемычки, по одной у первой и у послѣдней пары стигмъ, ясно напоминаютъ амфипневстическій типъ трахейной системы.

Подобно тому, какъ личинки Lycoria проявляютъ стремленіе къ амфипневстіи, такъ и предки амфипневстическихъ личинокъ могли постепенно, или внезапно (объ этомъ нельзя спорить) пріобрѣсти склонностъ къ амфипневстическому характеру и потерять свой первоначальный перипневстическій характеръ. Но не желая пускаться въ предположенія, укажу лишь на фактъ, что личинки Lycoria указываютъ путь, по которому перипневстическая трахейная система могла перейти въ амфипневстическую.

Упрощеніе трахейной системы у личинокъ Diptera изложено сжато въ помѣщенной ниже табличкѣ, которая и служитъ вмѣсто резюме.

Еще остаются слѣдующіе неразрѣшенные вопросы:

1. Возникли ли дорсальныя перемычки изъ какой-либо вѣтви эктодермальнаго впячиванія?

2. Откуда исходятъ трахеи питающія имагинальные диски?

3. Имѣются ли funiculi у всѣхъ личинокъ Diptera, и происходятъ ли изъ ихъ концовъ дыхальца imago?

Кромѣ того слѣдуетъ поискать дорсальную церебральную трахею у личинокъ изъ группы Aschiza и Schizophora.

Сравнительная таблица.

	Дорсальныя перемычки		Вентральныя перемычки		Побочные стволы		Дыхальцевыя дуги		Дыхальца на		Примѣчанія
	въ груди	брюшкѣ	въ груди	брюшкѣ	въ груди	брюшкѣ	въ груди	брюшкѣ	груди	брюшкѣ	
1. Cordyla	3 толстыя	6 толстыхъ	3	7	есть	есть	1 пара	7 паръ	1 пара	7 паръ	
2. Cecidomyidae	1 толстая	7 толстыхъ	3	1	есть	есть	2 пары	8 паръ	1 пара	8 паръ	
3. Brachycera	1 толстая	1 толстая	0	0	есть	есть	1 пара	1 пара	1 пара	1 пара	
4. Petaurista	1 толстая 1 тонкая	1 тонкая	0	0	есть	есть	1 пара	1 пара	1 пара	1 пара	
5. Polyneura	2 тонкія	7 тонкихъ 1 толстая	0	0	есть	есть	0	1	0 паръ	1 пара	
6. Cyclorrhapha	1 толстая 1 тонкая	1 толстая 6 тонкихъ	0	0	есть	есть	1	1	1 пара	1 пара	
7. Pelopiinae*)	2	6 тонкихъ	0	0	есть	есть	3	5	0 паръ	0 паръ	*) по Zavřel'y
8. Chironominae*)	Остатки трахей въ груди и концѣ брюшка. Увсѣхъ ли родовъ въ брюшкѣ — неизвѣстно.										*) по Zavřel'y
9. Polylepta*)	1 толстая	1 толстая	0	0	0	0	1 пара	1 пара	1	1	*) по Schmitz'y
10. Lycoriidae	1 толстая	1 толстая	3	1	есть	0	1 пара	7 паръ	1	7	

ALOIS WIESNER, PRAGUE.

ACADÉMIE TCHÈQUE DES SCIENCES
(ČESKÁ AKADEMIE VĚD A UMĚNÍ)

BULLETIN INTERNATIONAL

RÉSUMÉS DES TRAVAUX PRÉSENTÉS

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, NATURELLES
ET DE LA MÉDECINE

XXVI^e ANNÉE

(1925)

CZECH ACADEMY
LIBRARY

PRAGUE
PUBLIÉ PAR L'ACADÉMIE TCHÈQUE DES SCIENCES
1926

ACADÉMIE TCHÈQUE DES SCIENCES
(ČESKÁ AKADEMIE VĚD A UMĚNÍ)

BULLETIN INTERNATIONAL

RÉSUMÉS DES TRAVAUX PRÉSENTÉS

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, NATURELLES
ET DE LA MÉDECINE

XXVI^e ANNÉE

(1925)

Charles Univ

PRAGUE
PUBLIÉ PAR L'ACADÉMIE TCHÈQUE DES SCIENCES
1926

Bureau of Standards
JUN 23 1987
Library
324.45

CARNEGIE INSTITUTE OF TECHNOLOGY LIBRARY

ALOIS WIESNER, PRAGUE

TABLE DES MATIÈRES

Page

F. Rádl: Sur un certain problème général des équations différentielles linéaires 1
Dr A. J. Frank (Bratislava): The leading system of the heart. (With one microphotographic table) 3
Dr Vladimír Tůma: Contribution à l'histologie et embryogénèse du glomus coccygien de l'homme. (Avec 3 tableaux) 4
J. Sobotka: Une généralisation de deux théorèmes de Joachimsthal 8
Henry Křepelka and Wm. Podroužek: The precipitation of ferric salts with ammonium sulphide 11
J. Koutek (Prague): Sur le granit de Mrákotín. (Avec 2 figures dans le texte et 2 tableaux) 25
Dr J. M. Horák: Sur les antinomies de la théorie des ensembles 38
Jos. Kaucký: Une courte démonstration de la formule de Kummer ... 45
J. Liznar: Sur l'influence de l'atmosphère sur les variations diurnes de la déclination magnétique 47
V. Láska: Sur un groupe d'erreurs et sa correspondance avec la méthode des moindres carrés 50
B. Machytka: Sur les groupes G_8, G_{16} et G_{32} de transformations planes quadratiques et sur les systèmes linéaires de courbes d'ordre $4n$ et $8n$ se reproduisant par ces groupes 55
J. Sobotka: Contribution aux constructions cubiques et biquadratiques 74
Jar. Petrbok: La stratigraphie et paléontologie de la terasse pluviale (mindélienne) de Jourdain près de Daganea Alef (Avec une planche et 4 illustrations dans le texte) 87
Jan Zvoníček (Prague): Détermination du degré économique de la compression et de la détente dans les machines à vapeur. (Avec 4 figures) 101
Karel Dusl: Sur les formules linéaires de la théorie des fonctions théta 106
Jar. Petrbok: Evidences as to the real age of the Pectunculus sediment near Tel-Aviv in Palestine proving thus an oscillation of the Mediterranean sea level in historical times 111

Page

Jan Vilhelm: De la signification morphologique des métamorphoses anormales des élements sexuels dans les fleures pleines de Paeonia paradoxa Andr. (Avec 213 illustrations et 7 tableaux dans le texte) 117
Karel Domin: Festucetum carpaticae in the Tatras of Biela 129
J. Sobotka: Sur la construction de la courbe gauche du 3e ordre, de la courbe gauche du 4e ordre et de la première espèce et de la surface du second degré au moyen du plus grand nombre possible de points imaginaires conjugués 146
Dr Fr. Vanýsek: L'influence de Radiation α sur le Sucre du Sang ... 157
B. Procházka: Construction de la quadrique P donnée par la section non-diamétrale K, le cône tangent L et le point a 161
Н. И. Андрусовъ: Послѣтретичная Тирренская террасса въ области Чернаго моря. 164
Celda Klouček: Découvertes nouvelles dans le Silurien inférieur d_α ($Dd_{1\alpha}$) en Bohême II 178
V. Dolejšek and J. Heyrovský: The Occurence of Dvi-Manganese (At. No 75) in Manganese Salts 179
Dr Ant. Vančura: Appréciation électrocardiographique de l'état du myocarde des athérosclérotiques..... 184
F. Herlés, R. Tatterová et J. Šerf: Complexe ventriculaire d'électro-cardiogramme et sa valeur pronostique dans les aortites chroniques d'origine syphilitique 186
Jar. Petrbok: Les mollusques nouveaux du Bourdigalien tchèque 190
Dr Joseph Klíma: Sur le conoïde droit rationnel circonscrit à une sphère 194
V. Suk: On the Relation of Blood-Sugar to Physical Training and Mental Work 199
Vojtěch Jarník: Quelques remarques sur les points à coordonnées entières à l'intérieur d'un cercle 211
A. J. Chura: Les changements cytologiques postmortaux 214
Jar. Petrbok: De la stratigraphie et paléontologie du pléistocène près de Varna. (Avec 3 figures dans le texte) 218
J. Sobotka: Sur les axes axonométriques dans la projection clinogonale, le rapport de leurs longueurs étant donné. (Avec 3 figures) 226
Dr A. Pirchan: L'influence des rayons α sur le sang des lapins 239
Fr. Vanýsek and A. Pirchan: Method of Determining Motion of Body Water 241

Sur un certain problème géneral des équations différentielles linéaires.

Par

F. RÁDL.

Présenté le 20 mars 1925.

Deux expressions différentielles linéaires $\varphi(y)$, $\psi(y)$ d'ordre resp. $n-1$ et 1 seront dites *multipliées*, si l'on élimine y_1 du système

$$\varphi(y_1) = 0,\ y_1 = \psi(y)$$

ou y_{-1} de l'autre système

$$\psi(y_{-1}) = 0,\ y_{-1} = \varphi(y);$$

les *produits différentiels* ainsi obtenus sont des expressions différentielles d'ordre n, différentes pour les deux cas – la multiplication différentielle n'est donc pas commutative.

On peut définir maintenant la *division différentielle* d'une expression diff. lin. d'ordre n

$$y^n + p_1 y^{n-1} + \ldots + p_n y \tag{1}$$

par l'expression $y' + a y$ à l'aide du système

$$y_1^{n-1} + q_1 y_1^{n-2} + \ldots + q_{n-1} y_1 + h y = 0,\ y_1 = y' + a y, \tag{2}$$

$y' + a y$ est le diviseur, $y_1^{n-1} + \ldots + q_{n-1} y_1$ le quotient, h le *reste*.

La multiplication différentielle n'étant pas une opération commutative, on peut définir une autre division, *la division adjointe*, du même dividende (1) par le même diviseur $y' + a y$ à l'aide du systéme

$$y'_{-1} + a y_{-1} + k y = 0,\ y_{-1} = y^{n-1} + r_1 y^{n-2} + \ldots + r_{n-1} y, \tag{3}$$

où $y^{n-1} + \ldots + r_{n-1} y$ est le quotient, k est un autre *reste* qui est dit le *reste adjoint* du reste h.

On peut diviser à nouveau le premier quotient par un autre diviseur $y + \bar{a} y$, de l'une et l'autre manière: on déduit ainsi les nouveaux restes (h^2), $(h\ k)$. En opérant de même sur le second quotient on définira $(k\ h)$ et (k^2) et de proche en proche des restes $(h^r\ k^s)$ avec $1 \leqq r + s \leqq n$.

L'auteur démontre que les restes $(h^r\, k^s)$ sont invariants par rapport à toute permutation des opérations h, k et, en outre, qu'ils sont liés par certaines relations indépendantes; par suite le nombre des restes est égal à l'ordre n de l'expr. (1).

Si le reste $h = 0$, la division est finie; si $h \neq 0$, nous continuons la division en éliminant d'abord y dans le système (2), ce qui conduit à une autre expression d'ordre n dont les restes sont liées à ceux de l'expression (1) par des relations simples. Nous continuons ainsi la division jusqu'à obtenir un reste $(h)_p$ nul. Mêmes conclusions pour le deuxième mode de division.

Comme application de cette théorie l'auteur démontre le théorème suivant, qui est la partie principale et le but du traité:

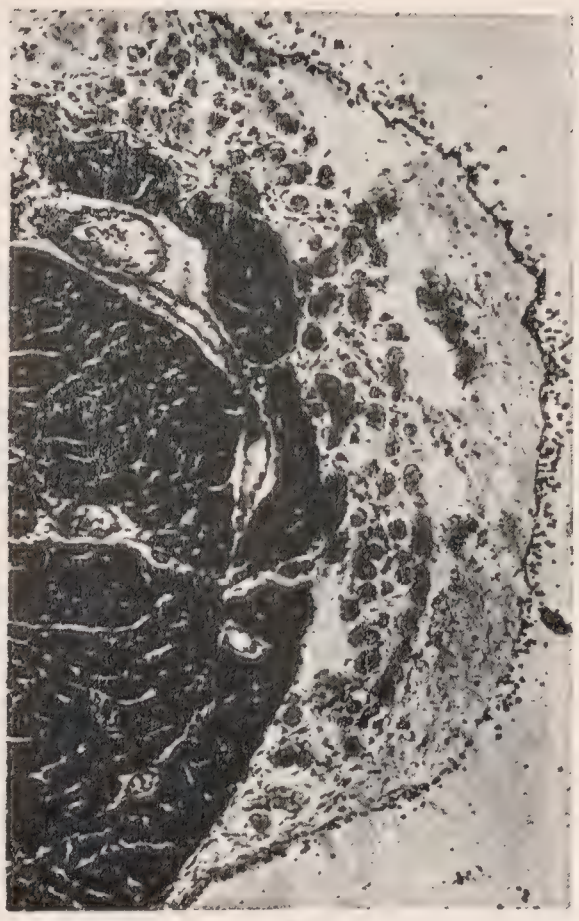
En divisant l'expression différentielle $y^n + P\, y^{n-1}$ *par l'expr.* $y' + P\, y$ *on obtient pour reste après* p *divisions successives:*

$$(h)_p = \frac{H_{p+1}\, H_{p-1}}{H_p{}^2},\ H_p = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda^{n-1} & \dots & \lambda^{p(n-1)} \\ \lambda' & \lambda^n & & \lambda^{p(n-1)+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda^p & \lambda^{n+p-1} & & \lambda^{pn} \end{vmatrix},\ \lambda = e^{-\int P\, dz}$$

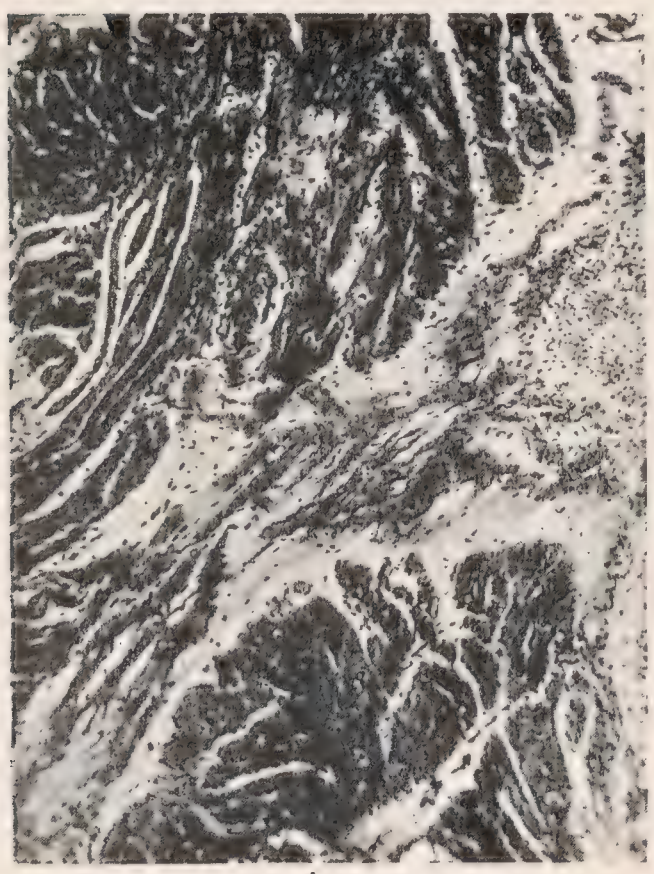
L'expression $y^n + P\, y^{n-1}$ *est divisible par l'expr.* $y' + P\, y$, *si* $H_{p-1} = 0$ *ou si la valeur* P *satisfait à une certaine équation diff. lin. à coëfficients constants arbitraires.*

2.

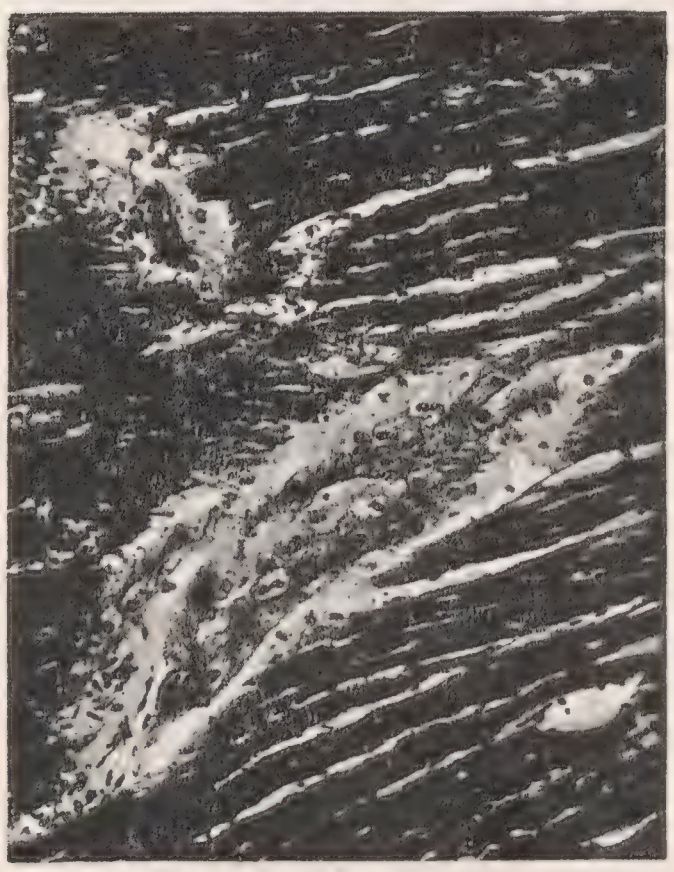
6.



7.

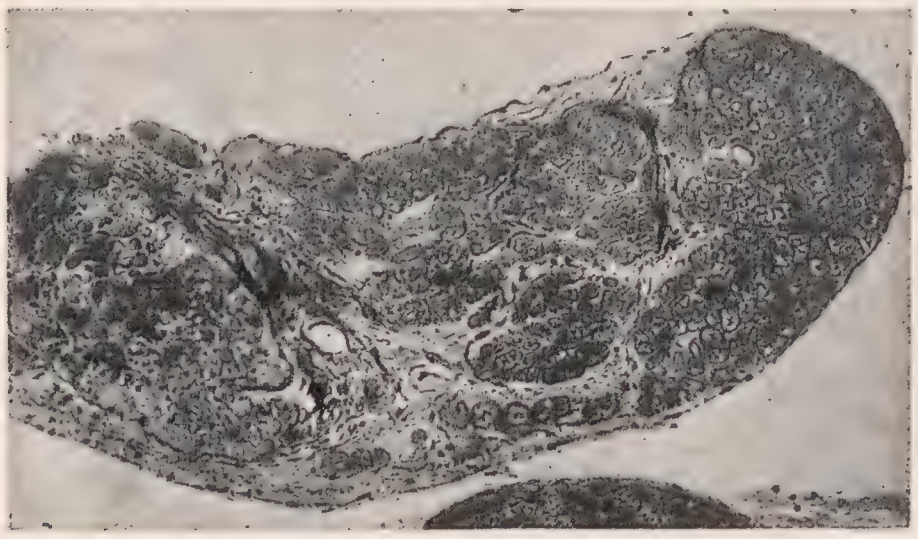


4.



5.

3.



7.

The leading system of the heart.

By

Dr. A. J. FRANK, Bratislava.

With one microphotographic table.

Presented the 3. April 1925.

1. The leading system is not to be considered as a remnant of the original atrioventricular muscular connection according to Mall.

My discoveries are fully in agreement with Tandler's opinion, namely that the first rudiments of Tawara's node are from their very beginning a remnant of the myocard in their structure as well as their building. This is true even at the time, when the atrioventricular muscular connection is entirely preserved. That both branches appear already at the time, when the atrioventricular-muscular connection is not as yet entirely interrupted. Their isolated condition is to be easily followed far into the ventricles. Their specific structure, to my mind, does not speak in favour of any possibility of their growth from the remnant of the muscular connection, because it does not possess any special differentiation at all. Therefore it is imposible to agree with Mall's opinion, because I found Purkyně's cells in the septal and ventricular myocard of both sides.

2. One cannot accept — at least not in it's whole extent — Tawara's view, which represents the atrioventricular part of the leading system as a tree, the roots of which are the node of Aschoff-Tawara, the trunk and large branches the *crus commune* together with *crus dextrum* and *crus sinistrum*, the fine branches the cells of Purkyně; for it doesn't respect the occurence of Purkyně's cells in the right atrium as well as in the ventricular septum and walls.

Contribution à l'histologie et embryogénèse du glomus coccygien de l'homme.

Par le

Dr. VLADIMÍR TŮMA,

assistant de l'institut.

Travail de l'Institut d'histologie et d'embryologie près la Faculté de médicine de l'université Charles à Prague (Directeur: Professeur Dr. O. Srdínko).

Avec 3 tableaux noirs.

Avec la subvention de la bourse du Docteur Šícha et de la dotation de IIème Classe de l'Académie de Sciences.

Présenté le 20 Mars 1925.

Dans la communication présente j'essaerai de donner brièvement le résultat d'études faites sur l'histologie et l'embryologie du glomus coccygien de l'homme.

J'ai employé pour mes recherches les régions coccygiennes en bloc preparées des étappes suivantes: les embryons humains de 11 5, 20·5, 34, 52, 56·5, 102, 160, 180, 250, 250·5, 260, 270, 320, 360, 370 et 446 mm du longueur total. Chez les nouveaux-nés, chez les enfants (2 et 3 mois, 6 et 7 ans) et chez les hommes et femmes adults (24, 26, 34, 36, 40, 45, 47, 54, 58 ans) on avait préparé et fixé seulement les parties molles de la paroi antérieure de la pointe du coccyx. En outre, à titre de comparaison, j'ai étudié aussi les glomeruli caudales chez les lapins et les chats. Pour fixation du matérial nous nous sommes servi du formol à 10 p. c., du sublimé concentré avec de l'acide acétique glacial et spécialement du liquide de Zenker et de Bouin. Les blocs étaient includés à la paraffine et coupés sagitallement et transversallement à 10 μ. Le coups à paraffine en séries étaient colorés par l'hématoxyline et l'éosine, l'hématoxyline et picro-fuchsine, l'hématoxyline de fer du Heidenhein, par le procédé de Weigert pour les fibres elastiques, par la méthode originale de Mallory, méthode de Kohn-Wiesel pour la réaction chromique, et par les mélanges de Leishman, May-Grünwald et Giemsa-Romanowski.

Le glomus coccygien de l'homme est fondé en 6 semain de la vie embryonnaire comme une anse arterioveineuse, située étroitement auprès

du fondement des vertèbres coccygiennes vemtralement et dans la ligne médiale. Cette anse, originalement n'atteignante pas le bout d'épine du dos, croît jusqu'à leur pointe et forme à la fin caudale des nouveaux anses sécondaires. Leurs parois sont formées par l'éndothélium, auquel se rangeient les cellules polygonales du mésenchyme. L'engrossissement locale de la paroi, présupposée par une couche des cellules épithéloides comme chez noeuds adults, décrits par Schumacher, je n'ai pas encore trouvé dans ces étappes. Dans les stades plus avancés les anses secondaires s'accroient, les anses croîssent et pour le défaut de place se tournent beaucoup de fois. Les cellules mésenchymales, s'attachantes à l'éndothelium, se transforment en couche cohérente des cellules épithéloides, formante leur tunique moyenne modifié ; les cellules posées en dehors de cette couche forment la tunique externe des fibres collagènes. Par l'accroissement du tissu collagène autour de l'anse se forme la capsule du noeud ; ces procès sont finis au 9me mois embryonale.

L'histologie du glomus coccygien chez les nouveaux-nés, des enfants et adultes ne diffère ni par l'âge ni par le sexe caractéristiquement et je suis, dans cette question tout à fait d'accord avec Schumacher.

Les glomerules caudales des lapins et des chats existent en formation moins typiquement développées, mais autrement analogiques du glomus humaine.

A l'âge plus avanceée la couche extérieure des cellules épithéloides se transforme en fibroplastes et fibrilles collagènes. Les cellules épithéloides typiques ont toujours le plasma absolument clair, homogène, qui ne témoigne ni pour la sécretion de ceux cellules ni pour leurs faculté de contraction ; aussi ils ne donnent pas la réaction chromique positive.

Le diamètre des vaisseaux anastomotiques est toujours tellement étroit, que la capacité de la regulation de la tension du circulation du sang, supposée par Schumacher, ne peut être prise en considération et plûtot, que le cours tortu ne prouve pas une célérité haute de coulemment, qui pouvait compenser ce diamètre etroit. On ne réussit pas histologiquement à trouver aucun signe de la sécretion dens les cellules du glomus et pour cela je conteste leur fonction sécretoire. Je prends le glomus coccygien de l'homme pour une manifestation partielle de l'écimation de toute la région coccygienne de l'homme.

Explications rélatives aux illustrations.

Microfotographié avec le grand appareil microphotographique du Zeiss, dessiné avec l'appareil d'Abbé.

Planche I.

Fig. 1⁰. Glomus coccygien de l'homme exécuté de 26 ans. Mélange de Zenker. Après la préparation colorée par l'hématoxyline et l'éosine. Zeiss obj. A. 8, oc. K. 12, tube 160 mm. e = l'endothélium; m = les cellules epithéloides de la tunique moyenne; a = tunique externe.

Fig. 2⁰. Le coup transversale de l'anastomose du glomus coccygien chez l'homme de 45 ans. Mélange de Zenker. Après coloration avec le procédé originale de Mallory. Zeiss obj. AA 10, oc. K. 12, tube 160 mm. e = l'éndothélium; m = les cellules épithéloides de la tunique moyenne; a = tunique externe; ec = cellules épithéloides dans la tunique externe.

Fig. 3⁰. Segment du glomus coccygien de l'homme de 58 ans. Formole. L'hématoxyline-picrofuchsine. Zeiss obj. A 8, oc. K. 12, tube 160 mm. e = l'éndothélium; m = les cellules épithéloides avec les caractèrs primaires; mf = les cellules épithéloides, devenantes fibroblastiques; a = la tunique externe.

Fig. 4⁰. de la même préparation comme la figure précedente. Zeiss obj. D 40, oc. K. 12, tube 160 mm.

Planche II.

Fig. 5. Glomus coccygien d'un garçon de 2 mois. Mélange de Zenker. L'hématoxyline de fer du Heidenhein. Zeiss obj. AA 10, oc. de proj. 4, extract. 73 cm. e = l'éndothélium; m = les cellules epithéloides de la tunique moyenne; a = tunique externe.

Fig. 6⁰. Glomus coccygien d'un garçon de 2 mois. Un noeud d'à coté. Fixation de Zenker. L'hématoxyline de fer du Heidenhein. Zeiss obj. DD 40, oc. de proj. 2, extr. 61 cm. En bas sur l'image le passage d'un vaisseau anastomotique (à gauche) dans une veine (à droite) en section longitudinale.

Fig. 8⁰. Amas des corpuscules de Vater-Pacini de la pointe du coccyx, envellopé en une capsule comunne. Fixation de Zenker. L'hématoxyline de fer du Heidenhein. Zeiss obj. AA 10, oc. de proj. 2, extr. 73 cm.

Fig. 9⁰. Glomerule caudale au niveau de l'avant-dernière vertèbre caudale. Coup sagitale. Lapin ♂ .Fixation avec sublimé. L'hématoxyline et picrofuchsine. e = l'éndothélium; m = les cellules épithéloides avec des fibres lisses; a = la tunique externe des vaisseaux. Zeiss A8, oc. K. 12, tube 160 mm.

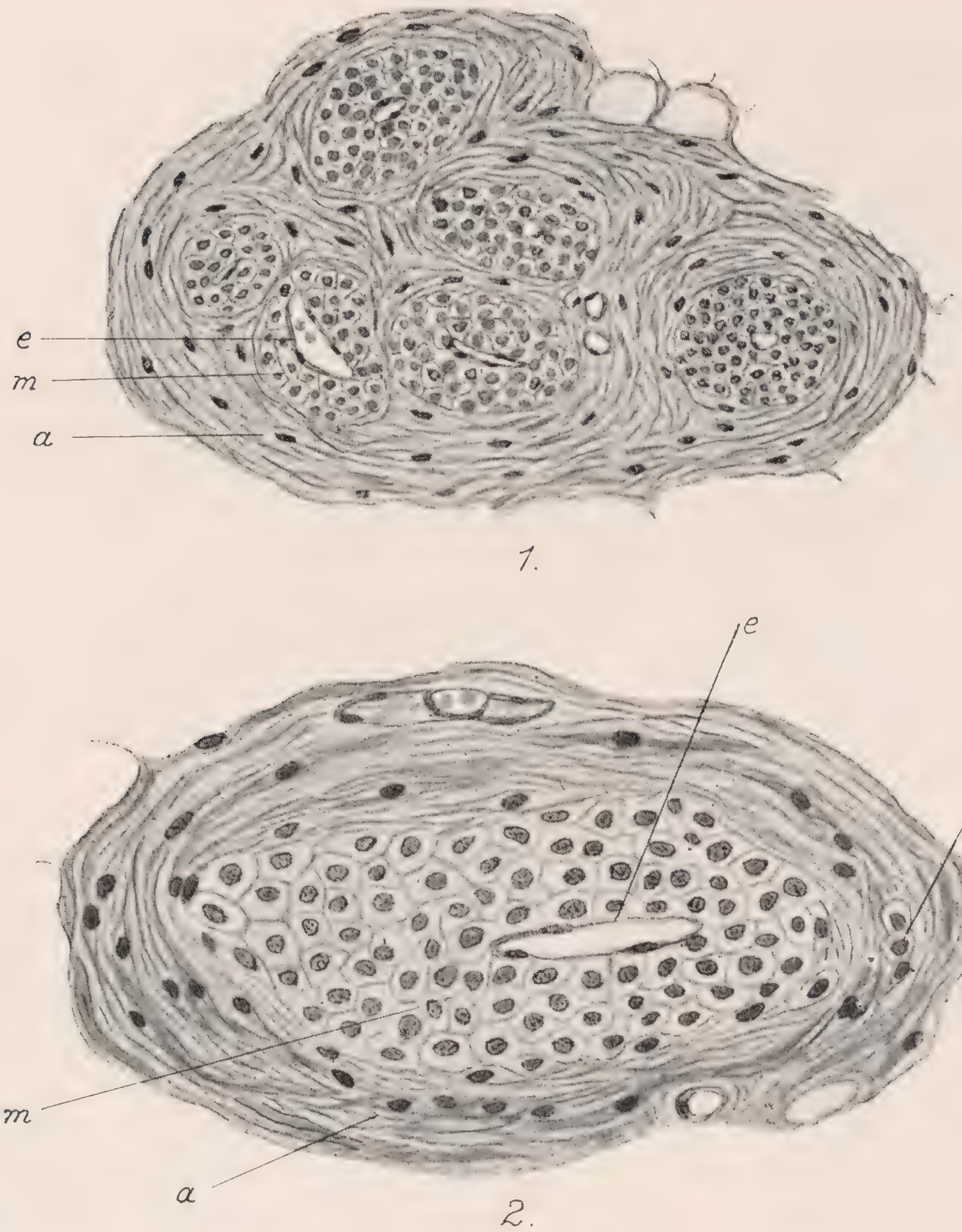
Planche III.

Fig. 10⁰. Le fondement du glomus coccygien chez un embryon humain de 56·5 mm du longueur totale. Coup sagitale. Fixation de formole. Après le procédé

Dr. VLAD. TŮMA:

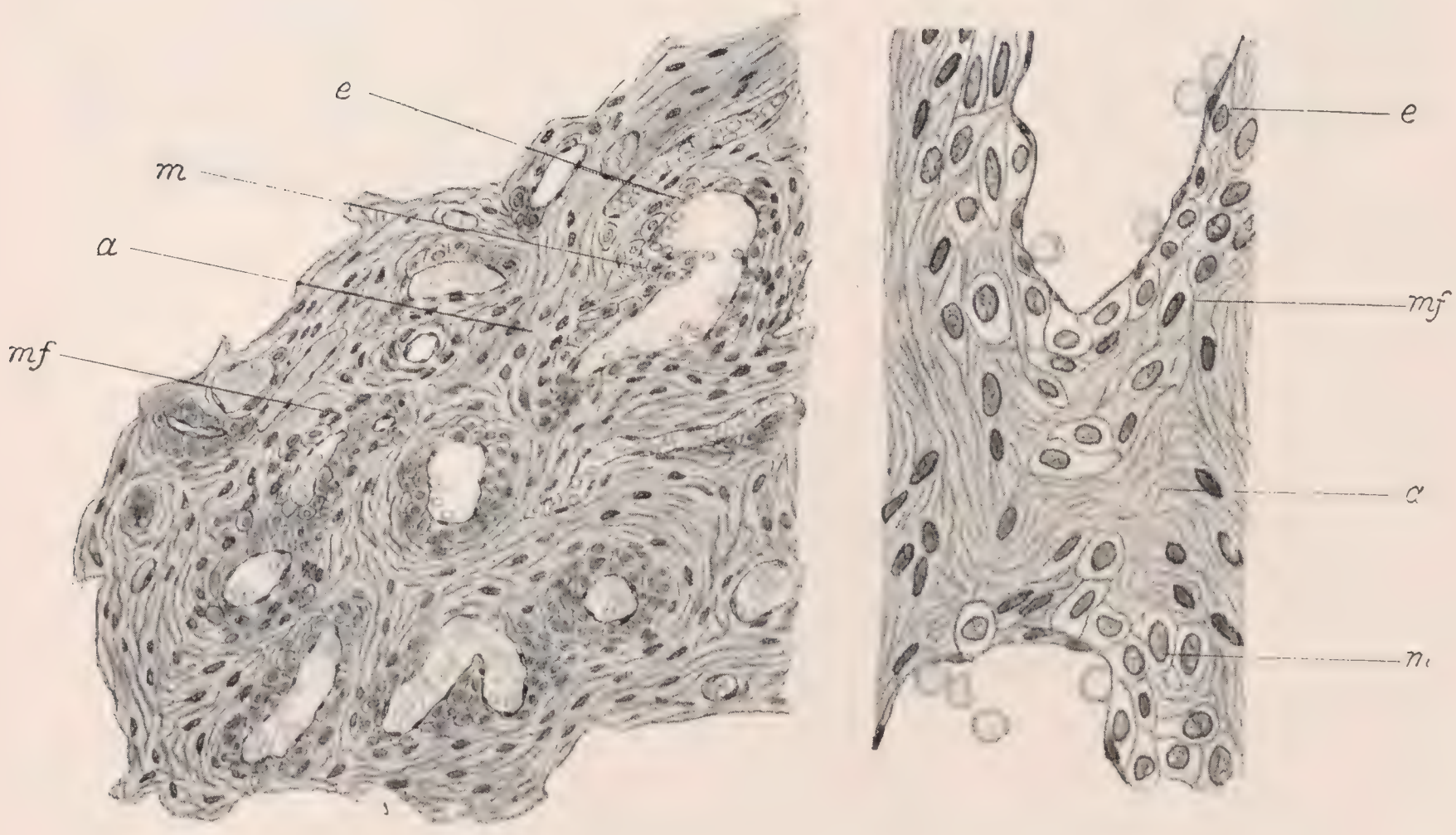
Contribution à l'histologie et embryogénèse du glomus coccygien de l'homme.

Pl. I.



1.

2.



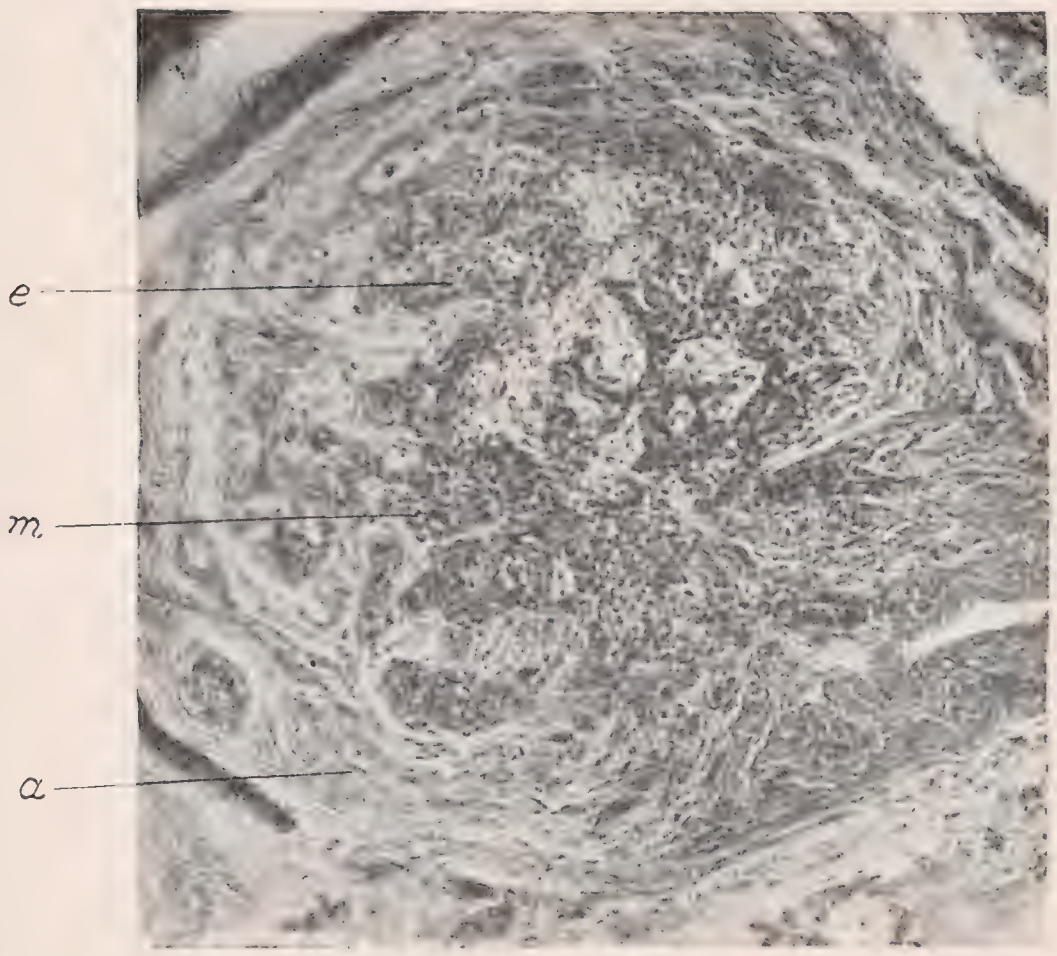
3.

Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême 1925.

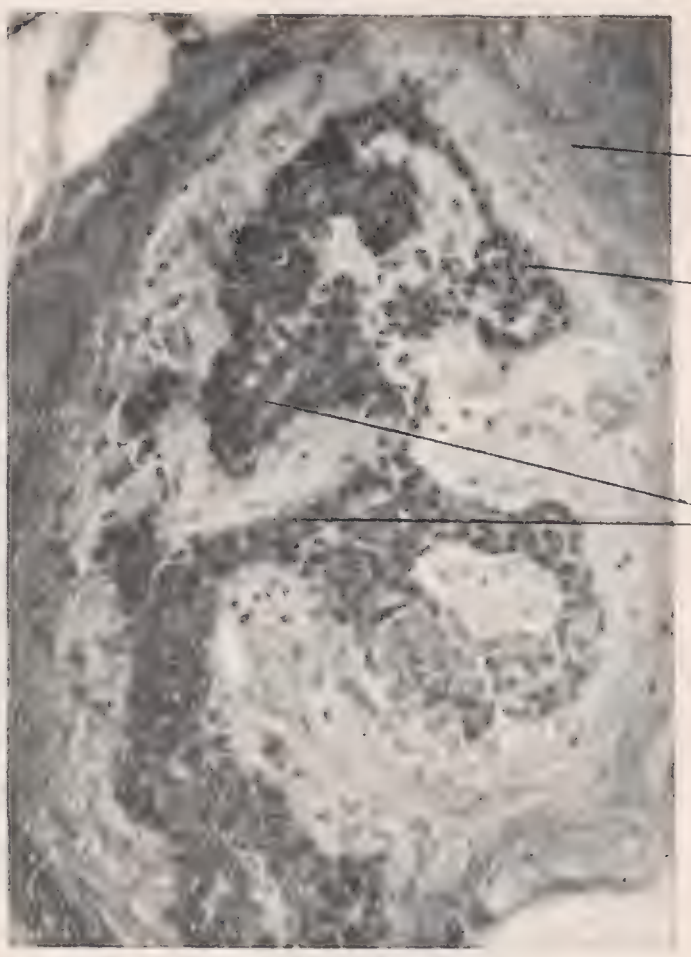
Dr. VLAD. TŮMA:

Contribution à l'histologie et embryogénèse du glomus coccygien de l'homme.

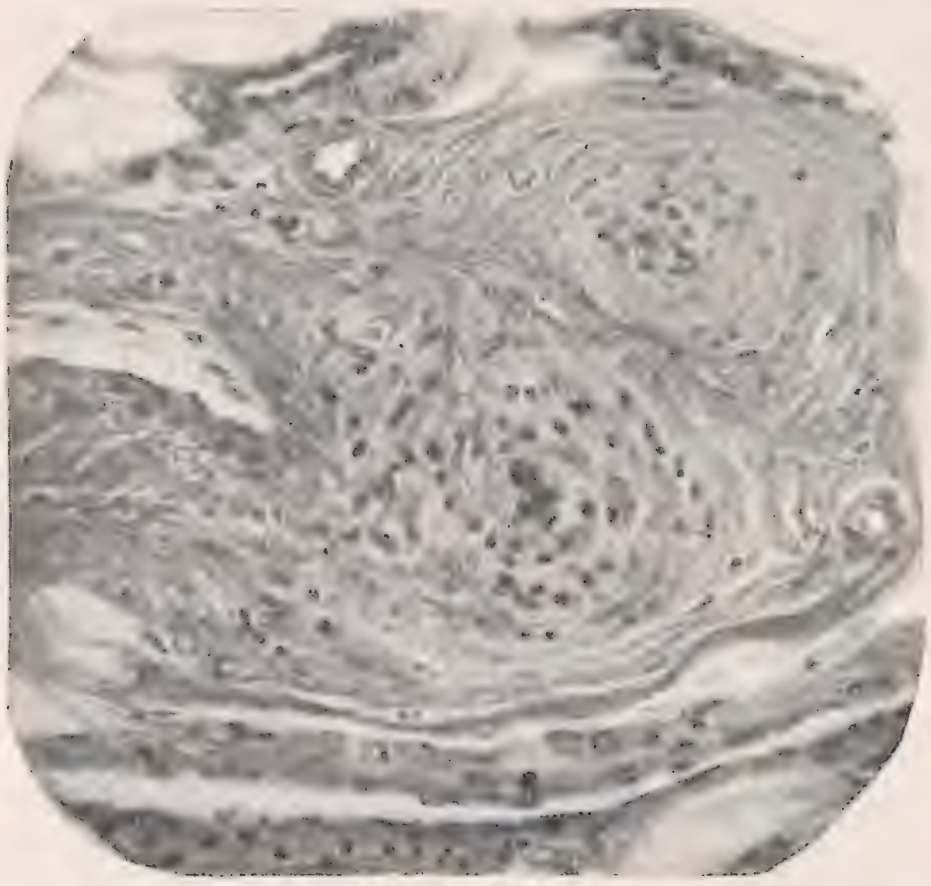
Pl. II.



5.

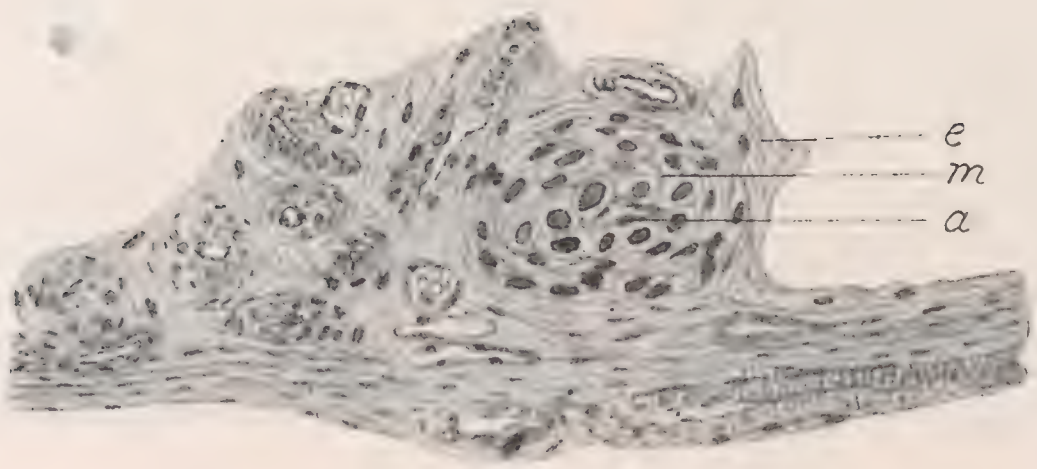


6.



7.

8.



9.

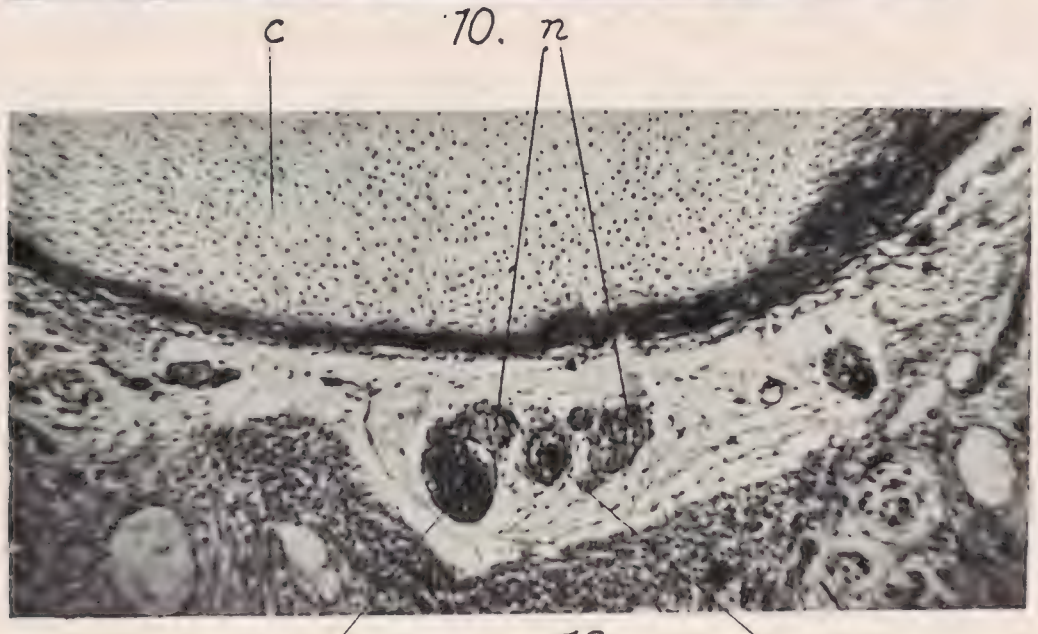
Dr. VLAD. TŮMA:

Contribution à l'histologie et embryogénèse du glomus coccygien de l'homme.

Pl. III.

10.

11.



13.

12.

14.

15.

Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême 1925.

orig. de Mallory. Zeiss obj. aa 6, oc. de proj. 2, extr. 73·5 cm, k = l'anse artério-veineuse primitive; c = l'avant-derniére vertèbre coccygienne.

*Fig. 11*⁰. Le fondement du glomus chez un embryon humain de 160 mm du longueur totale. Coup sagitale. Le bout caudale de l'anse primitive et les anses secondaires. Formole. Vert de méthylène et pyronine. Zeiss obj. AA 10, oc. de proj. 2, extr. 66 cm.

*Fig. 12*⁰. Le fondement du glomus chez un embryon de 20·5 mm du longueur totale. Coup sagitale. Formole. Méthode orig. de Mallory. Zeiss obj. AA, oc. de proj. 2, extr. 76 *cm*.

*Fig. 13*⁰. L'artère et veine sacrée moyenne chez un foetus de 18 cm du long. tot. Le coup sagitale au niveau de l'avant-dernière vertèbre coccygienne. Fixation de Zenker. L'hématoxyline et picrofuchsine. Zeiss obj. aa6, oc. de proj. 2, extr. 75 cm. a = l'artère sacrée moyenne; v = veine sacrée moyenne; n = les nerfs; c = l'avant-dernière vertèbre du coccyx.

*Fig. 14*⁰. Glomus coccygien avec une ganglion sympatique glissée d'un garçon de 3 mois. Le coup sagitale au niveau de la pointe du coccyx. Fixation de Zenker. L'hématoxyline de fer du Heidenhein. Zeiss obj. AA 10, oc. de proj. 2, extr. 73 cm. gs = le ganglion sympatique; gl = le glomus coccygien; a = la capsule de glomus; c = l'avant-dernière vertèbre du coccyx.

*Fig. 15*⁰. Le coup transversale d'une anse secondaire de la fondement du glomus d'un embryon de 160 mm du longueur totale. Formole. L'hématoxyline et picrofuchsine. Zeiss obj. DD 40, oc. de proj. 2, extr. 66 cm. e = l'éndothélium; m = les cellules mésenchymales.

Une généralisation de deux théorèmes de Joachimsthal.

Par

J. SOBOTKA.

Présenté le 16. janvier 1925.

1. Pour une conique centrique on peut énoncer le théorème suivant:

„Coupons une conique centrique k par une hypebole ayant les asymptotes parallèles aux axes de la conique et soient $A_1 \ldots A_4$ leurs points d'intersection. Trois points quelconques de ces quatre points et le point qui est sur la courbe k diamétralement opposé au quatrième sont situés sur une circonférence. La réciproque est aussi vraie: Si l'on coupe la conique k par une circonférence, trois points quelconques de quatre points d'intersection et le point qui est sur la courbe k diamétralement opposé au quatrième sont situés sur une hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles aux axes de la conique k.“

Joachimsthal a trouvé la première partie de ce théorème pour le cas où l'hyperbole coupant la conique k passe par son centre.

Nous démontrons d'abord le théorème en cas d'une ellipse.

Ayons une circonférence k' de centre O avec deux diamètres perpendiculaires x et y. Coupons cette circonférence par l'hyperbole h' ayant ses asymptotes parallèles à x et y. Soient enfin $A_1' \ldots A_4'$ les points d'intersection de ces deux courbes. Les droites $A_1' A_2'$, $A_3' A_4'$ sont antiparallèles par rapport aux axes de l'hyperbole équilatère h'; c'est pourquoi le diamètre de h' qui est perpendiculaire à l'une de ces deux droites est conjugué à l'autre et par conséquent ces droites sont antiparallèles par rapport à x et y.

Si nous désignons par A' le point qui est sur k' diamétralement opposé au point A_1', les droites $A_2' A'$, $A_3' A_4'$ sont de même antiparallèles par rapport aux axes x et y.

Construisons à ces figures les figures affines homologiques ayant x comme l'axe, y comme la direction de l'affinité. Au cercle k' correspond

une ellipse ayant x, y pour axes. À l'hyperbole h' correspond une hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles à x et y. Soient $A_1 \ldots A_4$, A les points qui correspondent aux $A_1' \ldots A_4'$, A'. Les droites qui correspondent dans la position orthogonalement homologue aux droites antiparallèles par rapport à l'axe de l'affinité sont aussi antiparallèles par rapport à cette axe.

Réciproquement si une ellipse k et une hyperbole h sont données, on transformera par l'affinité homologique orthogonale ces figures en cercle k' et hyperbole h' et notre théorème en cas d'une ellipse suit des rapports qui existent entre k' et h'.

Pour démontrer ce théorème aussi en cas d'une hyperbole k, considerons deux hyperboles équilatères k' et h' dont la première a ses axes x, y parallèles aux asymptotes de la seconde. Soient de nouveau A_1', A_2', A_3' trois points d'intersection de ces hyperboles. Le quatrième point d'intersection A_4' est alors point d'intersection des hauteurs du triangle $A_1' A_2' A_3'$. Soit du même A' le point sur k' qui est diamétralement opposé au point A_1'. Les droites $A_1' A_4'$, $A' A_4'$ sont, par conséquent, parallèles à deux diamètres conjugués de l'hyperbole k' et on sait que la perpendiculaire tracée à l'un de ces deux diamètres est antiparallèle à l'autre par rapport aux axes x, y. Les points A_2', A_3', A_4', A' se trouvent donc situés sur une circonférence.

Lorsque nous transformons de nouveau l'hyperbole équilatère k' au moyen de l'affinité orthogonale, ayant une des axes x, y pour l'axe de l'homologie en hyperbole k, l'hyperbole h' devient une hyperbole équilatère h, les droites $A_2' A_3'$, $A_4' A'$ deviennent les droites $A_2 A_3$, $A_4 A$ et restent antiparallèles par rapport aux axes x, y. Réciproquement si une hyperbole quelconque équilatère k est donnée, ayant x, y pour axes et étant coupée par une hyperbole équilatère avec les asymptotes parallèles aux axes x, y, on déduira par l'affinité orthogonale les hyperboles équilatère k', h' et on obtiendra ainsi notre théorème en cas d'une hyperbole. La démonstration de la seconde partie du théorème énoncé est de même facile.

Si l'on fait varier l'ellipse k de la façon que l'un de ses sommets sur l'axe x reste fixe tandisque le centre O et l'autre sommet V s'eloignent à l'infini, l'ellipse k devient dans la limite une parabole, les droites $V A_1$, $V A$ deviennent deux parallèles à l'axe x qui sont symétriques par rapport à cette axe, et en outre la droite $V A_1$ devient pour $A_1 \equiv V$ une asymptote de l'hyperbole h. Par conséquent notre théorème prend pour le cas limite d'une parabole la forme:

„Les points d'intersection à distance finie de la parabole k et de l'hyperbole équilatère h, ayant une de ses asymptotes parallèles à l'axe x de la parabole k, et le point d'intersection de la parabole k et de la droite qui est symétrique à l'asymptote de la hyperbole par rapport à l'axe x sont situées sur une circonférence. Réciproquement par trois points quelcon-

ques de quatre points d'intersection d'une parabole k et d'une circonférence arbitraire on peut faire passer une hyperbole équilatère h, ayant une asymptote parallèle à l'axe de la parabole. Cette asymptote passe par le point sur k qui est symétrique au quatrième point d'intersection de la circonférence et de la parabole par rapport à l'axe x."

Pour donner une démonstration directe de ce théorème, considerons deux hyperboles équilatères, égales h et h' avec les centres O, O' qui passent par deux points A_1, A_2. Soient M, N les points où les asymptotes de l'hyperbole h rencontrent la droite $(A_1 A_2)$. Supposons que l'une des asymptotes de l'hyperbole h' passe par le point M et soit parallèle à $(O N)$ et que l'autre passe par le point N et soit parallèle à $(O M)$. On peut maintenant faire correspondre projectivement ces deux hyperboles l'une à l'autre de telle façon que pour deux points arbitraires respectifs, l'un P sur h, l'autre P' sur h', les droites $(A_1 P)$, $(A_2 P')$ soient antiparallèles aux asymptotes ou ce qui revient au même soient parallèles à deux diamètres conjugués.

Ainsi les droites $(A_1 A_2)$, $(P P')$ sont de même antiparallèles aux asymptotes et le vecteur $P P'$ est égal au vecteur $O O'$. Car, dans la projectivité introduite, les points à l'infini sur les hyperboles correspondent à eux-mêmes et l'égalité des vecteurs est évidente pour le couple $P P'$ où $P' \equiv A_1$ et pour le couple où $P \equiv A_2$. Par conséquent cette égalité est satisfaite toujours. Il est de même aisé à voir qu'on peut faire passer une circonférence par les points $A_1 A_2$ et les points d'un couple quelconque $P P'$.

Considerons maintenant le faisceau de paraboles passant par les points A_1, A_2 dont les axes sont parallèles à $(O M)$. Désignons par ϕ la parabole du faisceau qui passe par le point arbitraire P sur h. La circonférence circonscrite au triangle $A_1 A_2 P$ rencontre la courbe h' en point P', mais celui-ci appartient aussi à la parabole ϕ, puisque les droites A, P et $A_2 P'$ sont antiparallèles par rapport à son axe.

D'après un théorème connu, si l'on coupe deux coniques ϕ, h' par une conique l passant par deux points A_1, A_2 qui sont communs à ϕ et h', les droites qui joignent les autres points communs aux coniques $\phi\, l$, $h'\, l$ et $\phi\, h'$ se rencontrent en un point. Nous choisissons maintenant pour l la conique composée de deux perpendiculaires qui sont abaissées des points A_1, A_2 à l'axe o de la parabole ϕ. Ces deux droites rencontrent la parabole ϕ en points A_1^0, A_2^0 et la conique h' en point à l'infini situé sur $(O' M)$. Or, il suit du théorème mentionné que la droite $(A_1^0 A_2^0)$, l'asymptote $(O' M)$ de l'hyperbole h' et la parallèle du point P' à $(O' N)$ se rencontrent en un point qui est symétrique au point M par rapport à l'axe o. Par conséquent le point P' est symétrique par rapport à l'axe o au point où l'asymptote $(O M)$ de la courbe h et la parabole ϕ se rencontrent. Ainsi le théorème énoncé est démontré.

2. On peut énoncer le théorème suivant: „Si une circonférence arbitraire c rencontre la conique donnée k de centre O en points $C_1 \ldots C_4$ et

si l'on mène par un sommet V de k les parallèles aux diamètres conjugués aux droites $O\,C_1 \ldots O\,C_4$, ces parallèles rencontrent la conique k en quatre points C_1', $C_2' \ldots C_4'$ qui sont situés de même sur une circonférence u."

Soit c_{12} le diamètre qui est conjugué à $C_1\,C_2$ et g_{12} celui qui est parallèle à $C_1\,C_2$. Alors les diamètres $O\,C_1$, $O\,C_2$ sont harmoniques aux diamètres c_{12}, g_{12}. Par conséquent les diamètres c_1, c_2, le premier étant conjugué à $O\,C_1$, le second à $O\,C_2$ sont aussi harmoniques aux diamètres c_{12}, g_{12}. Nous désignerons par C_{12}, G_{12} les points où se coupent la conique et les parallèles menées par le sommet V à c_{12}, g_{12}; tandisque nous désignerons par C_1', C_2' les points où se coupent la conique et les parallèles menées par V à c_1, c_2. Les points C_{12}, G_{12} sont sur k diamétralement opposés et la droite $C_1'\,C_2'$ est conjuguée au diamètre $C_{12}\,G_{12}$. De la même manière les parallèles menées par V aux diamètres qui sont conjugués à $O\,C_3$ et $O\,C_4$ rencontrent la conique k en points C_3', C_4'. La parallèle à $C_3\,C_4$ et celle au diamètre qui est conjugué à $C_3\,C_4$ rencontrent la conique k en points C_{34}, G_{34}. Ces deux derniers points sont sur k diamétralement opposés et la droite $C_3'\,C_4'$ est conjuguée au diamètre $C_{34}\,G_{34}$. Les diamètres $C_{12}\,G_{12}$ et $C_{34}\,G_{34}$ étant antiparallèles par rapport à x, les diamètres $C_1'\,C_2'$ et $C_3'\,C_4'$ sont de même antiparallèles par rapport à x. Par conséquent les points $C_1' \ldots C_4'$ sont situés sur une circonférence.

En vertu du théorème de l'art. 1 on peut remplacer la circonférence c de notre théorème par une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux axes de la conique k.

Lorsque l'hyperbole h passe par le centre O de la conique k, C_1, C_2, C_3, C_4 sont les pieds des normales menées d'un certain point P à l'hyperbole h. Le théorème consideré devient ainsi un théorème de Joachimsthal.

On peut construire alors l'hyperbole h par le faiscean des rayons au centre à P et le faisceau des diamètres de la conique k, normaux aux diamètres qui sont conjugués aux rayons du premier faisceau. Lorsque le point P parcourt le diamètre $O\,P$ de k, les hyperboles h respectives ont en point O une tangente commune t et forment un faisceau (h) projectif à la ponctuelle des points P.

Par conséquent les centres des hyberboles h forment une suite projective à la suite mentionée qui est située sur le diamètre q symétrique à t par rapport aux axes de la conique k. Les normales abaissées des points situés sur $O\,P$ à la courbe k forment sur la droite à l'infini une involution du quatrième degré projective avec l'involution (P) des points situés sur $O\,P$ et symétriques par rapport à O. Cette involution est aussi projective avec l'involution formée par les points d'intersection de la courbe k et du cercle u qui appartient à une hyperbole arbitraire de (h). Par conséquent les cercles respectifs u forment un faisceau (u) et ce sont le cercle passant par le point V concentrique avec la conique et un cercle dégénéré qui appartiennet à ce faisceau. Le cercle dégénéré se décompose en deux droites

la droite à l'infini et la tangente à la conique k dans le point d'intersection de la perpendiculaire abaissée de V sur $O\,P$.

Le passage de la conique centrique k à une parabole est évidente et n'a aucune importance particulière au point de vue de construction.

Réciproquement une circonférence arbitraire u située dans le plan de la conique k rencontre k en quatre points A_1, B_1, C_1, D_1. Menons maintenant les tangentes à k qui sont parallèles aux droites $V\,A_1, \ldots V\,D_1$ et soient $A\ A'$; B, B'; C, C'; D, D' leurs points de contact respectifs. Or, ces points sont situés quatre par quatre soit sur des hyperboles équilatères ayant les asymptotes parallèles aux axes de la conique k, soit sur des circonférences. Car trois points quelconques de ces points qui ne sont pas désignés par la même lettre (par ex. A, B, C) déterminent une hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles aux axes de la conique k. Soit D le quatrième point d'intersection de ces deux coniques. Alors les points

$$A, B, C, D'; \quad A. B, C', D; \quad A, B', C, D \text{ et } A', B, C, D$$

et puis

$$A', B', C', D; \quad A', B', C, D; \quad A', B, C', D' \text{ et } A, B', C', D'$$

sont situés sur des circonférences, tandisque les points

$$A, B, C, D; \quad A, B, C', D'; \quad A, B', C, D' \text{ et } A', B, C, D'$$

et puis

$$A', B', C', D'; \quad A', B', C, D; \quad A', B, C', D \text{ et } A, B', C', D$$

sont situés sur des hyperboles équilatères.

A chacune de ces hyperboles ainsi qu'à chacune de ces circonférences appartient en vertu de la représentation indiquée la circonférence u.

The precipitation of ferric salts with ammonium sulphide.

By

HENRY KŘEPELKA and WILIAM PODROUŽEK.

Presented January 16th 1925.

The composition of the precipitate which is obtained when solutions of ferric salts are precipitated with ammonium sulphide, is first mentioned in the first edition Berzelius's well known Text-Book of Chemistry.[1]) Berzelius states here that in this case the resulting precipitate is a mixture of ferrous sulphide and sulphur and emphasizes that ferric sulphide is produced, when the reverse process is applied i. e. when a solution of ferric salt is added drop by drop to the solution of ammonium sulphide.

If we omit the papers dealing with the proof of the existence of ferric sulphide and precipitation of ferric or ferrous sulphide by the action of hydrogen sulphide upon ferric hydroxide, the next mention of this problem of precipitation is found in the paper of Louis Gedel in 1905.[2]) Gedel confirms the statement of Berzelius and remarks that on adding ammonium sulphide drop by drop to the solution of ferric salt (to which ammonia and tartaric acid were added) ferric sulphide is formed.

In 1907 Stokes[3]) published his work upon the problem involved and derives from his experiments, that the precipitate obtained by adding ammonium sulphide to the solution of ferric salt is ferric sulphide. This wrong deduction of Stokes was accepted by many authors and appears in nearly all the Text Books of Analytical Chemistry. Stokes's whole research only proves the existence of ferric sulphide, and the fundamental analytical problem of the composition of the precipitate, which is obtained, when as in ordinary analytical processes, a solution of ammonium sulphide is poured into the solution of ferric salt, cannot be solved by his experiments. Stokes exclusively precipitates water suspensions of ferric hydroxide

[1]) Berzelius: Lehrbuch der Chemie, 1826.
[2]) L. Gedel, Diss. der techn. Hochschule Karlsruhe, München, 1905.
[3]) Stokes, Journ. Am. Chem. Soc. 1907, XXIX., 304.

with hydrogen sulphide and therefore does not work under ordinary analytical conditions.

The problem was attacked anew in 1910 by E. Jordis and E. Schweizer.[4]) They found that ferric sulphide prepared by precipitation of ferric salts contains more sulphur than is given by the ratio 2 Fe : 3 S. This surplus of sulphur was partially removed by extracting the precipitate with benzene or carbon bisulphide. The sulphur extracted often weighed more than theoretically free sulphur.

The most complete treatment of the facts involved is found in the paper of Mecklenburg and Rodt.[5]) Their experiments corroborate the results of Jordis and Schweizer mentioned above. They found, besides the surplus of uncombined sulphur, varying amounts of alkali according to the experimental conditions. From their experiments it follows that the quantity of ammonium sulphide necessary to precipitate completely the ferric salt is greater than the theoretical amount calculated for ferric sulphide. From this they draw the conclusion that the precipitate is a salt of some thioferric acid, which can be expressed by the formula: $Fe\,S.\,Na_2\,S$ aq. or $Fe\,S_2\,Na$ aq.

It may also be mentioned that similar compounds are discussed in the papers of Konschegg-Malfatti and Malfatti alone published in 1906—8—9.

In the paper of Mecklenburg and Rodt the spontaneous reduction process according to the formula: $Fe_2\,S_3 = Fe\,S + Fe\,S_2$ is also mentioned.

Experimental part.

The solution of ferric ammonium sulphate was always precipitated by a fresh solution of (white) ammonium sulphide. The precipitation, filtration and final washing of the precipitate was carried out in a stream of carbon dioxide; water, which had been freshly destilled in carbon dioxide being used for the final washing. The apparatus, which has been employed is represented in Figure No. 1.

After having been washed, the precipitate was analyzed by oxidation in a closed bottle by a mixture of potassium chlorate and hydrochloric acid. The sulphur was then determined as barium sulphate according to the method of Küster-Thiel and the iron as ferric oxide.

The ratios Fe : S were found:

1) 1 : 1·90
2) 1 : 1·78
3) 1 : 1·81
4) 1 : 1·86
5) 1 : 1·72

---

[4]) Jordis-Schweizer, Z. f. angew. Chem. 1910, 23, 578.
[5]) Mecklenburg-Rodt, Z. f. anorg. Chem. 1918, 102, 130.

The precipitate always contained greater amounts of sulphur than corresponds to the ratio 2 : 3. Attempts were made to remove this sulphur by different solvents.

The precipitate was warmed with an excess of ammonium sulphide but a pure residue, corresponding in composition to either of the known iron sulphides, was not obtained. When highly concentrated ammonium

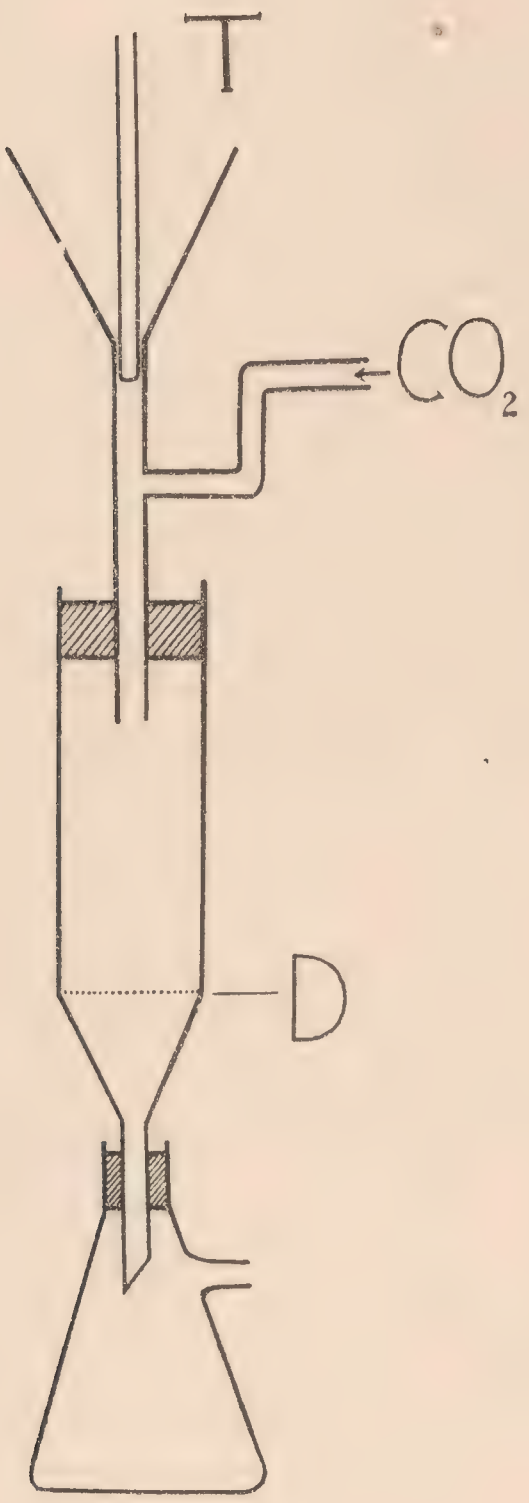


Figure No 1.

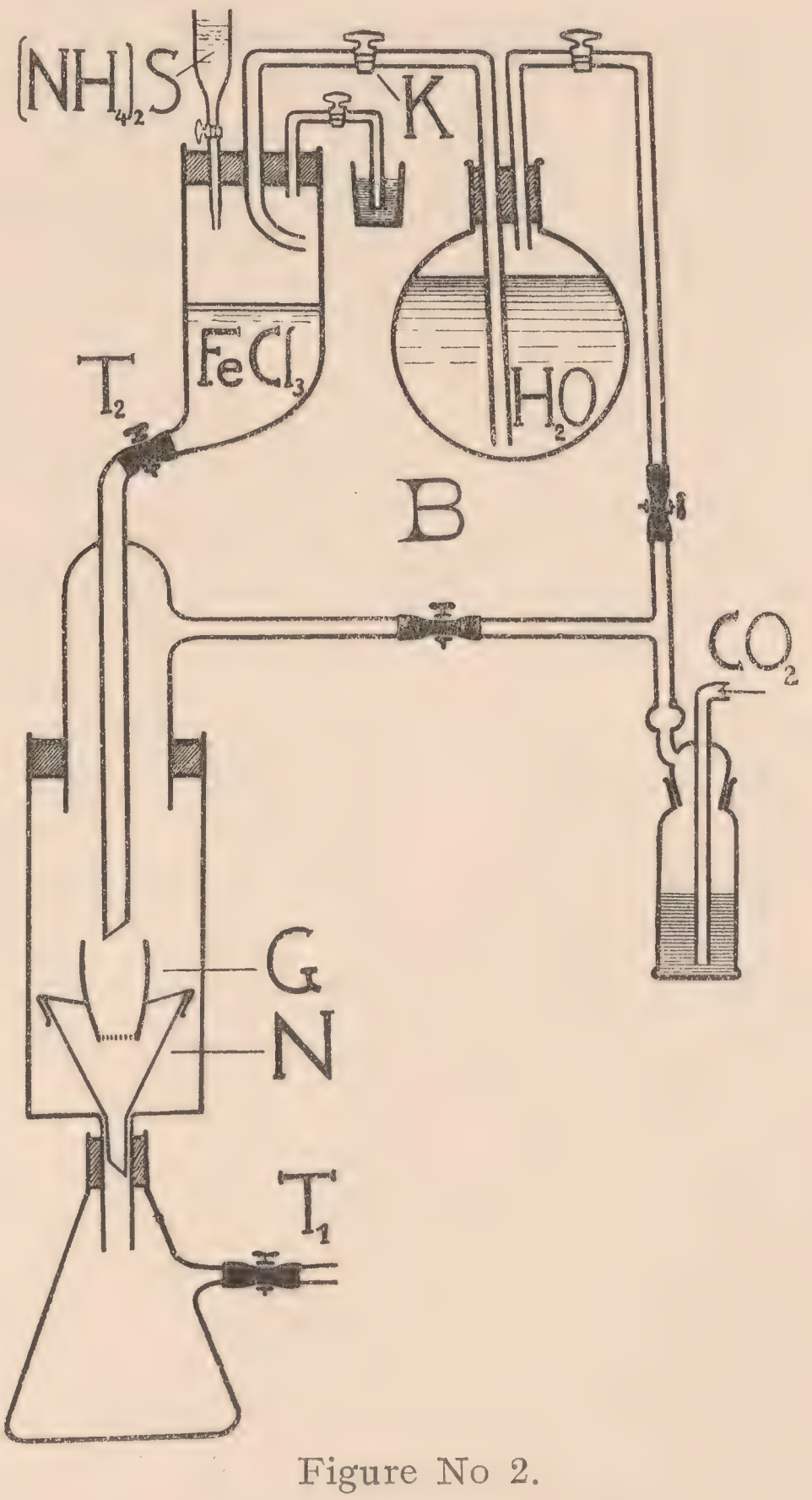


Figure No 2.

sulphide was used the ratio Fe : S remained unchanged, on the other hand dilute ammonium sulphide solutions caused hydrolytic decomposition of the precipitate, ferric hydroxide being formed.

The sulphur was then extracted by means of benzene at temperatures ranging from 20° C to 70° C. A second series of experiments was performed over the same temperature range nitrobenzene being used in place of benzene. These experiments were to corroborate those of Jordis, who extracted ferric sulphide with carbon bisulphide in a Soxhlet apparatus. The sulphide was precipitated by freshly prepared ammonium sulphide. The precipitation, filtration and washing were carried out in an atmosphere of carbon dioxide in the apparatus shown in Figure 2. The atmosphere

of carbon dioxide was obtained as follows: The gas was introduced through T_1, was passed through the apparatus, through the stopcock T_2 and was bubbling through the solution of ferric chloride displacing the air through the small tube bent into the beaker. The bubbles of carbon dioxide also served to agitate the ferric chloride during the precipitation of sulphide by means of ammonium sulphide which was added drop by drop after the air had been displaced.[6]) When all the sulphide had been precipitated, filtration was accomplished by attaching T_1 to the air pump, and introducing carbon dioxide through the wash bottle. The vacuum obtained during this operation served also to draw the distilled water used for washing the precipitate (from the flask B). The precipitate was filtered into the Gooch crucible G and washed simultaneously with water freshly distilled in CO_2 (from Vessel B) and finally with dry alcohol introduced through the burette. The sulphide thus dried was transferred quickly to a bottle, filled with carbon dioxide and benzene. After shaking the well stoppered bottle was allowed to stand 12 hours. The small traces of ferric hydroxide formed were due to the moisture not removed by alcohol. In the subsequent experiments the drying was made more effective by repeated washing with fresh dry alcohol and the precipitate extracted with benzene in a modified Soxhlet apparatus. (Figure 3.) In order to get rid of the last traces of moisture calcium oxide was placed in the distilling flask ot the apparatus.

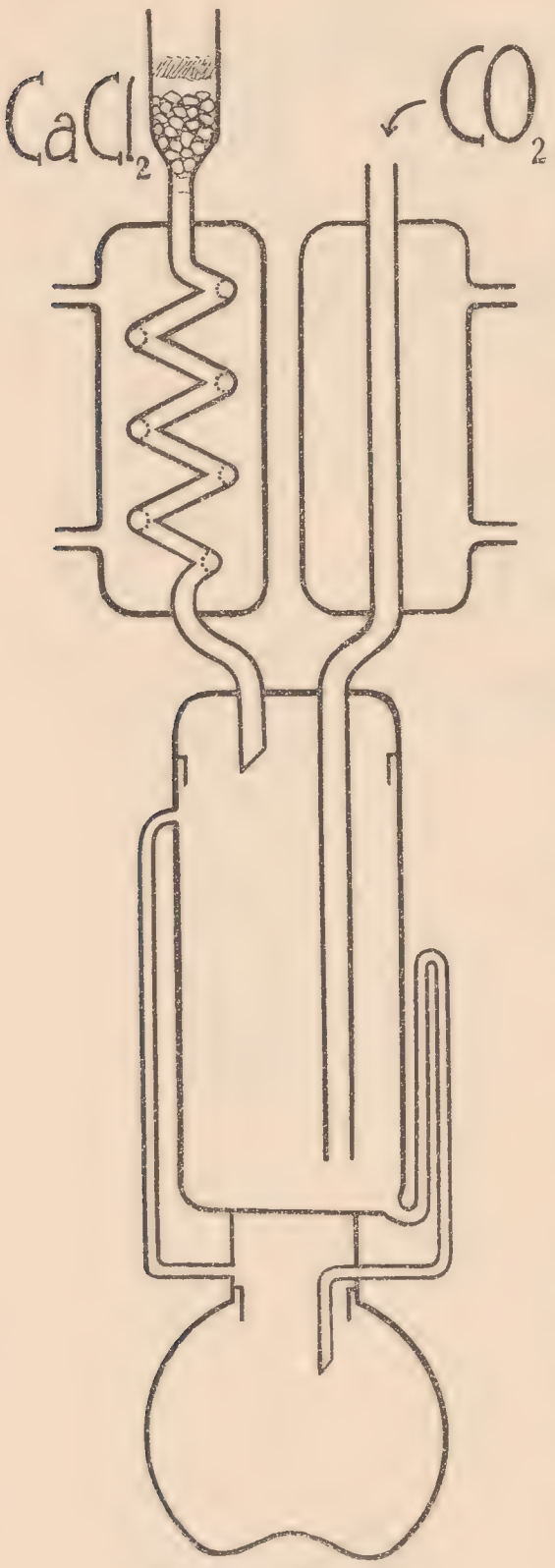


Figure No 3.

Extractions with benzene.

1.	Extraction 4 hours.....	Fe : S	1 : 0·84
2.	,, 6		1 : 0·62
3.	,, 8		1 : *

* (The extracted sulphide was pyrophoric and caught fire in air.[7])

[6]) In the first experiments complete displacement of air was determined by analysis the gas displaced from the apparatus. It was found that complete displacement of air occured in about 20 min. In subsequent experiments the CO_2 was passed for this length of time and the filtration commenced.

[7]) Jordis obtained also a pyrophoric residue.

From the ratios obtained it is evident that moisture, which might be present as water of hydration, can not be removed by the alcohol.

In the further experiments alcohol and ether (freshly distilled over metallic sodium) was used for washing and the precipitate then allowed to stand in the Soxhlet (filled with CO_2) under the surface of dry benzene for 14 days after which the sulphide was extracted. During this long interval it was possible for less soluble sulphur to have undergone a change, due to ageing, into a soluble modification.

1. Extraction of sulphide dried with alcohol and ether ..... Fe : S = 1 : 1·5
2. Extraction of sulphide dried with alcohol and ether ..... 1 : 1·49
3. Extractions of sulphide containing traces of water.
   Owing to the hydrolysis a mixture of both ferrous and ferric hydroxides was obtained.

The results obtained on the extraction of perfectly dry sulphide (Extractions 1. and 2.) are to be accounted for by a spontaneous reaction in neutral medium:

$$Fe_2 S_3 = F eS + Fe S_2.$$

Only a part of the extracted sulphide containing FeS was soluble in diluted hydrochloric acid, the insoluble residue was FeS_2, which, when analyzed, gave the ratio Fe : S = 1 : 2.

Since all these results did not give the slightes idea of the composition of the original precipitate, attempts were made to obtaine some by decomposing it by a solution of potassium cyanide. According to Wright,[8]) ferric and ferrous sulphide are soluble in a solution of potassium cyanide, potassium ferricyanide and ferrocyanide being formed.

A small quantity of precipitate obtained in the usual manner was warmed with a 10 % solution of potassium cyanide. The resulting solution contained potassium ferri, ferrocyanide, thiocyanide and cyanide. On analyzing this mixture a new and difficult analytical problem of the quantitative determination of the single components involved was encountered, which could not be solved.

Another method was therefore tried. The sulphide was decomposed by warming up with a known solution of cadmium sulphate. This decomposition was carried out in a well stoppered flask, filled with CO_2. Ferrous iron was then determined volumetrically by permanganate, ferric iron

[8]) Wright, Journ. Amer. Chem. Soc. 1883, 150.

calculated from the difference of the amount of all iron originally present, and the excess of cadmium determined gravimetrically as sulphate. The results are summarized in the following table:

Table I.

1. Fe used ..... 0·0498 *gr*
   After decomposition found by titration with
   0·1 N $KMnO_4$ ..... 0·0498 *gr*
   Cd used ..... 1·4322 *gr*
   After decomposition found ..... 1·0639 *gr*

   Difference ... 0·3683 *gr*

   The theoretical amount of Cd calculated for sulphur of Fe_2S_3 ..... 0·3585 *gr*

   Difference ... 0·0098 *gr*

2. Fe used ..... 0·0324 *gr*
   After decomposition found by titration with
   0·1 N $KMnO_4$ ..... 0·0323 *gr*
   Cd used ..... 1·4322 *gr*
   After decomposition found ..... 1·1924 *gr*

   Difference ... 0·2398 *gr*

   The theoretical amount of Cd calculated for sulphur of Fe_2S_3 ..... 0·2311 *gr*

   Difference ... 0·0087 *gr*

3. Fe used ..... 0·0732 *gr*
   After decomposition found by titration with
   0·1 N $KMnO_4$ ..... 0·0731 *gr*
   Cd used ..... 1·4322 *gr*
   After decomposition found ..... 0·9038 *gr*

   Difference ... 0·5284 *gr*

   The theoretical amount of Cd calculated for sulphur of Fe_2S_3 ..... 0·5263 *gr*

   Difference ... 0·0021 *gr*

After complete decomposition all the iron was in the divalent condition. The reaction consumed always more cadmium than corresponds to the sulphur in Fe_2S_3. This fact is very probably due to the surplus of sulphur in the original sulphide. The complete reduction of ferric ion

into the ferrous ion might be accounted for by the intramolecular reaction:[9])

$$2\,Fë + 3\,S'' = 2\,Fë + 2\,S'' + S.$$

In order to get some evidence of the quantity of surplus sulphur the decomposition described above was repeated and the separated sulphur weighed.

Table II.

S theoretically calculated	S found after decomposition
1) 0·0336 *gr*	0·0358 *gr*
2) 0·0437 *gr*	0·0514 *gr*
3) 0·0470 *gr*	0·0570 *gr*

These results corroborate well with those above. The precipitate of sulphide always contains more sulphur than the theoretical amount calculated for Fe_2S_3. This surplus accounts for the greater consumption of cadmium. The sulphide is unstable in neutral medium.

Its analysis was therefore attempted in alkaline solution. The decomposition was carried out in the presence of ammoniumsulphate by a solution of cadmium hydroxide in ammonia. In this way the iron present in the trivalent condition was precipitated without undergoing any reduction as hydroxide, while the ferrous ions remained, in the presence of NH_4, in solution, and were determined with 0·1 N $KMnO_4$.

The solution of ferric salt of known concentration was precipitated in a bottle with a fixed quantity of freshly prepared ammonium sulphide the mixture being meanwhile agitated by a stream of CO_2. Then a solution of cadmium hydroxide in pure ammonia and ammonium sulphate was added and the bottle well stoppered. After complete decomposition which occured under ordinary temperature in a few days, and on warming in a water bath in a few hours, some of the supernatant liquor was pipetted off, acidified, and titrated with 0·1 N $KMnO_4$. From the amount of Fë found the amount of iron present in the original solution was determined, the trivalent iron being determined by the difference.

It was observed that the amount of bivalent iron was essentially influenced by the velocity, with which the solution of ammonium sulphide was added drop by drop into the solution. When the concentration of

[9]) This intramolecular process is an analogy of that which is spoken of in the paper of Budnikoff-Krause. (Z. f. anorg. Chem. 1922, 122, 171.)

Fe_2S_3 enters into reaction with the surplus of $Fe_2(SO_4)_3$ according to the following equations:

$$3\,Na_2S + Fe_2(SO_4)_3 = 3\,Na_2SO_4 + 2\,FeS + S,$$
$$2\,FeS + 2\,Fe_2(SO_4)_3 = 6\,FeSO_4 + 2\,S,$$
$$\overline{3\,Na_2S + 3\,Fe_2(SO_4)_3 = 6\,FeSO_4 + 3\,S + 3\,Na_2SO_4.}$$

ferric salt ($FeCl_3$) was kept constant and the velocity of precipitation successively increased the proportion of FeS in the precipitate decreased.

Table III.

Velocity of addition of $(NH_4)_2S$	Percentage of FeS in the precipitate
Slow precipitation	
30 drops per minute	24·7 %
50 ,, ,, ,,	18·0 %
70 ,, ,, ,,	12·0 %
Precipitation by a slow stream of $(NH_4)_2S$	7·5 %
Precipitation by a stream of concentrated solution of $(NH_4)_2S$	0 %

In the subsequent experiments the velocity of precipitation was therefore kept constant i. e. slow precipitation while agitating the solution with CO_2.

In order to study the relative influence of the concentrations of the solution to be precipitated and of ammonium sulphide, solutions of ferric chloride and ferric ammonium sulphate of different concentration were precipitated by an ammonium sulphide solution of fixed strength. The different salts of trivalent iron were to show the influence of hydrolysis on the composition of the resultant precipitate. The results obtained are given in the Table IV. The data are plotted in Figure 4.

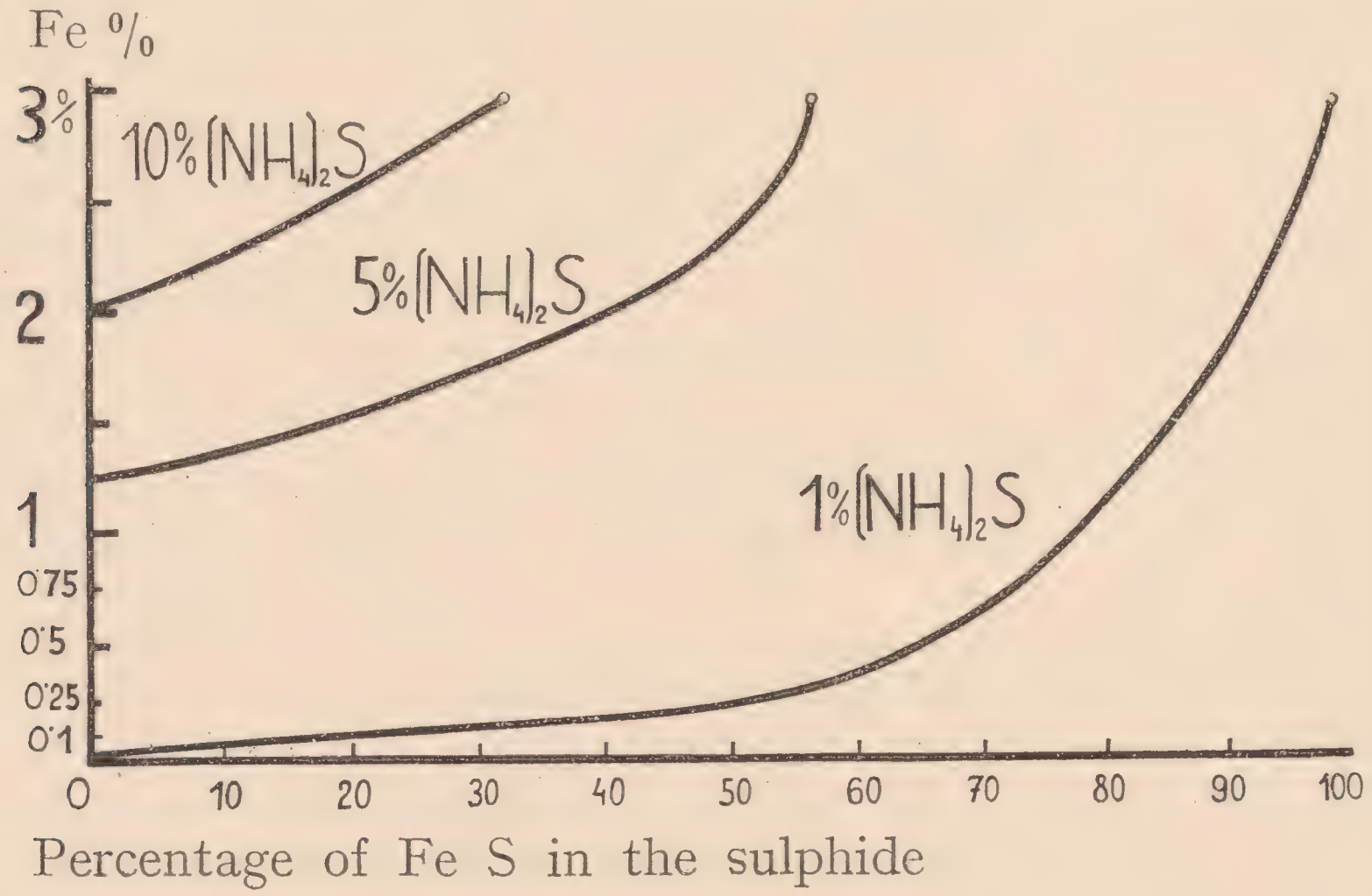


Figure No 4.

Table IV.

$FeCl_3$ Percentage of Fe	1% $(NH_4)_2S$ Percentage of FeS	5% $(NH_4)_2S$ Percentage of FeS	10% $(NH_4)_2S$ Percentage FeS
3%	100%	58·0%	32·41%
2·5%	96·81%	56·21%	17·53%
2%	92·32%	32·02%	0%
1·5%	86·0%	19·82%	0%
1%	78·12%	0%	0%
0·75%	74·0%	0%	0%
0·5%	66·12%	0%	0%
0·25%	55·21%	0%	0%
0·1%	27·9%	0%	0%

Fe NH_4 $(SO_4)_2$ Percentage of Fe	
9%	100%
3%	100%
1·7%	74·12%
1·25%	64·03%
0·76%	51%
0·75%	50·04%
0·6%	41·13%
0·5%	30·13%
0·48%	30·10%
0·3%	23·11%
0·1%	9·12%
0·05%	5%

By means of these experiments it was found possible to solve the problem involved. Only in extreme cases either a mixture of ferrous sulphide and sulphur or ferric sulphide alone was obtained, otherwise a mixture of both ferric and ferrous sulphide was precipitated. It is to be emphasized here that the old view of Berzelius, mentioned above, is right in principle and holds for extreme cases of precipitations. In other words, Berzelius was the first who anticipated the difference in principle between the precipitation of a ferric salt by ammonium sulphide (applied in analytical Chemistry) and the precipitation of ammonium sulphide by a ferric salt.

In a series of experiments solutions of ammonium sulphide were precipitated with ferric chloride. After complete decomposition of the resultant sulphide with ammonia-cadmium hydroxide no trace of ferrous ions was found in the solution.

Table V.

Influence of hydrolysis.

Solutions of ferric chloride and ferric ammonium sulphate having the same concentration of Fe were precipitated under exactly similar conditions. The data are plotted in Figure 5.

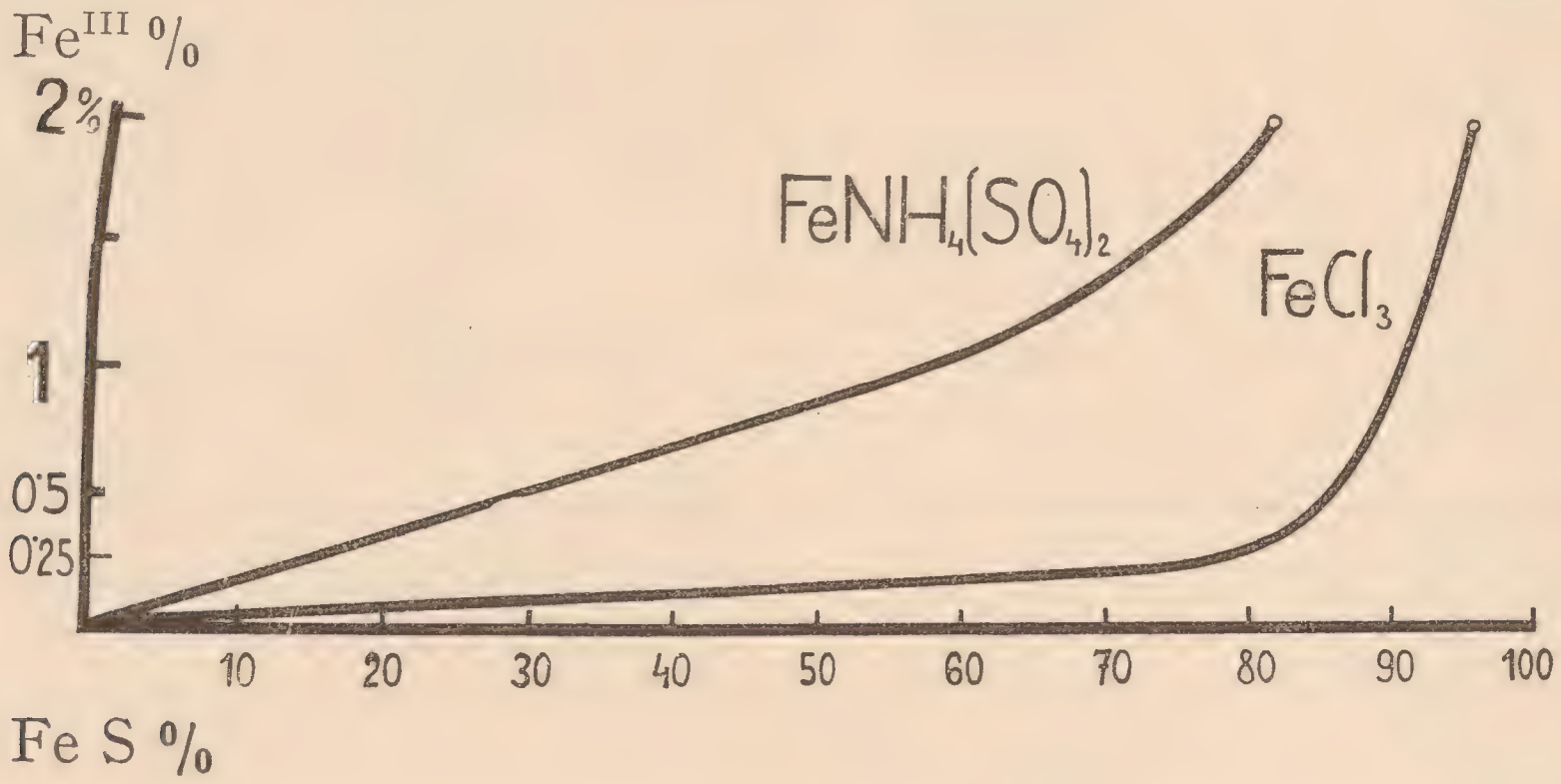


Figure No 5.

Percentage of Fe in $FeCl_3$	Percentage of FeS	Percentage of Fe NH_4 $(SO_4)_2$	Percentage of FeS
2%	97%	2%	83%
1·5%	95%	1·5%	74%
1%	90%	1%	58%
0·5%	85%	0·50%	30%
0·25%	80%	0·25%	16%

Simultaneously the acidity of both the solutions was determined and ferric chloride found to contain undoubtedly more acid than ferric ammonium sulphate as to be expected. When the acidities were made equal by adding a calculated amount of sulphuric acid to the solution of ferric ammonium sulphate (the other conditions of precipitation having been kept constant) the proportion of ferrous sulphide were equal in both the resulting precipitates.

Diagram 5 shows clearly the influence of hydrolysis on the reduction: Fë‥ → Fë. The greater the acidity of the solution the greater is the amount of iron reduced.

For completeness a neutral solution of ferric ions was also studied. Suspensions of potassium ferric fluoride[10]) were precipitated and the re-

[10]) Ferric fluoride was disolved in a solution of potassium fluoride. This was added to a solution of $FeCl_3$ untill the reaction mixture was neutral. Since the complex salt is very slightly soluble in water suspensions of it were used.

sultant precipitate analysed in the usual manner. All these experiments gave only ferric sulphide.

From the facts obtained from this experimental work it is clear that the precipitate, which is obtained on precipitating solutions of ferric salt by ammonium sulphide, is usually a mixture of ferric sulphide, ferrous sulphide, and sulphur. The relative proportions of the sulphides depend upon the acidity of the reaction medium i. e. in other words evidently upon the relative concentrations of the solutions. The more concentrated the solutions of ferric salt, the more acid — the more concentrated the ammonium sulphide solutions the more alkaline.

The oxidation potential of ferric ions is only high enough in a medium of minimal concentration of H- ions to oxidize S ions of ammonium sulphide. On very careful precipitation of a concentrated solution of ferric salt by very dilute ammonium sulphide a mixture of ferrous sulphide and sulphur is produced i. e. the reaction occurs in an acid medium and ferric ion attains an oxidation potential high enough to oxidize S″ of ammonium sulphide. On the other hand, if ferric salt be precipitated with a concentrated solution of ammonium sulphide the concentration of H- ions falls below the necessary minimum before the reaction is complete and the result is a mixture of ferric, ferrous sulphide, and sulphur. An extreme case of such a precipitation is the reverse process i. e. slow precipitation of ammonium sulphide by ferric salt solution. In this way according to Berzelius ferric sulphide is obtained.

If all the ferric salt is not completely separated from the solution the resultant precipitate is not stable and undergoes a spontaneous reaction: $Fe_2 S_3 = FeS + FeS_2$ (Mecklenburg-Rodt loc. cit.). Ferrous sulphide then reacts with the surplus of ferric ions according to Budnikoff-Krause.

It is highly probable that under ordinary analytical conditions the product of the precipitation is a mixture of both ferric and ferrous sulphides, and sulphur, in extreme cases described above either a mixture of ferrous sulphide and sulphur or ferric sulphide alone may be obtained.

In his experiments Stokes always started with colloidal ferric hydroxide (he worked in alkaline medium) and therefore obtained finally pure ferric sulphide.

The authors wish to express their thanks to Professor B. Brauner for valuable sugestions and deep interest in their work.

Summary.

The composition of the sulphide, which is precipitated from ferric salt solutions by ammonium sulphide depends upon the concentration of H-ions in the medium. Concentrated ferric salt solutions and very dilute ammonium sulphide give a mixture of ferrous sulphide and sulphur. Very concentrated solutions of ammonium sulphide and dilute ferric salt solutions lead to ferric sulphide. An analogy of this case is the slow precipitation of ammonium sulphide solutions with drops of ferric solution. Under ordinary analytical conditions a mixture of both the sulphides, and sulphur is usually formed.

Ferric sulphide is unstable in neutral medium and undergoes the reaction: $Fe_2 S_3 = Fe\ S + Fe\ S_2$.

The free sulphur of the precipitate cannot be extracted in stoichiometric amount because of the presence of water (very probable water of hydration).

The precipitate is not a salt of some thioferric acid since all its ammonia can be removed by a thorough washing, the precipitate then becomming insoluble in potassium hydroxide.

Contribution from the Chemical Institute
of Charles University, Prague.

Sur le granite de Mrákotín.

Résumé de texte tchèque.

Par

J. KOUTEK à Prague.

Avec 2 figures dans le texte et 2 tableaux.

Présenté le 20 Mars 1925.

Le granite à deux micas, dont les caractères pétrographiques et granotectoniques sont décrits dans la note que je présente ici, forme la partie Est du massif central de la „*Českomoravská vysočina*“ dans la région de Mrákotín à l'ouest de *Telč*. Cette dernière localité est le centre de l'industrie du granite de la Moravie occidentale.

Dans les environs de *Mrákotín* le massif central de la „*Českomoravská vysočina*“ se trouve en contact avec le complexe des gneiss à cordiérite de la région „moldanubique“ de M. F. E. Suess; ce contact est d'un caractère très compliqué. Les deux roches: granite et paragneiss y sont intimément mélangés.

Nous pouvons distinguer en général dans les alentours de *Mrákotín* trois complexes géologiques:

1. le complexe du gneiss à cordiérite,
2. le complexe du granite à deux micas,
3. la zone des injections magmatiques, qui atteint une largeur de 1 *km*; elle est traversée par une série d'apophyses granitiques.

Le premier complexe est formé par le gneiss à cordiérite, riche en biotite, bien schisteux. La direction de la schistosité est h 1, exceptionnellement h 3. Le plongement est sujet à des variations considérables, ce qui prouve que le complexe a été soumis à un plissement intense. Au microscope on peut distinguer dans le gneiss les éléments suivant: *plagioclase* (principalement *oligoclase*), *orthose* (partiellement développée comme *antiperthite*), *biotite, cordiérite, sillimanite, grenat, pyrite, magnétite, zircon*. La structure est granoblastique. Des petites intercalations *d'erlanfels* compacts, de

couleur gris-verdâtre, à aspect corné forment dans ce gneiss de petites intercalations et ne peuvent être observés et suivis que d'après les fragments qu'on trouve sur le sol. L'erlanfels se compose principalement de *quartz* (plus que 50%), de *feldspath* (andésine, labrador—bytownite), de *diopside*, accessoirement apparaît la *titanite* et des traces de *minéraux opaques*.

Au contact du granite avec le gneiss, ce dernier est fortement pénétré par la substance granitique, et de nombreuses apophyses granitiques de direction N-S émises par le massif, traversent le complexe des gneiss à cordié-

Fig. 1.

Esquise d'une carte géologique des environs de *Mrákotín* qui montre le parcours compliqué de la limite entre le granit et le gneiss à cordièrite; + = granit à deux micas, chraffure diagonale = gneiss à cordièrite, chraffure diagonale avec hachures = migmatites, pointillées = eboulis et limons de pente.

rite; ces apophyses sont parallèles à la limite du massif granitique; de plus, le massif envoie en quantité énorme de minces apophyses aplitiques, qui s'intercalent dans le gneiss parallèlement à sa schistosité; les apophyses aplitiques injectent le gneiss à cordiérite à des distances considérables, et la limite entre la substance éruptive et la substance sédimentaire disparaît parfois complétement sous l'influence d'une résorption partielle.

Je veux insister dans cette note surtoût sur les caractères pétrographique du massif granitique des environs de *Mrákotín* et sur les caractères granotectoniques que j'ai pu y mettre en évidence.

Le massif granitique se distingue du complexe gneissique déjà *par la morphologie* de la surface du sol, qui lui est caractéristique: de nombreux blocs arrondis sont parsemés par-ci par-la sur toute sa surface.

Quant aux caractères pétrographiques de l'ensemble du massif, ils sont assez monotones dans sa partie Est. Sur une superficie de plusieurs

km^2 on n'a pas du tout pu constater de roche de filon qui serait le produit de la segmentation du magma granitique, sauf un filon peu signifiant de pegmatite sans aucune particularité intéressante.

Description pétrographique du granite de Mrákotín.

Le granit de Mrákotín est une roche à grains moyens et de couleur claire. A l'oeil nu on peut y distinguer de nombreux grains de *feldspath,* qui montrent parfois un développement porphyroïde, *la biotite, la muscovite, le quartz,* à la loupe on peut y apercevoir au plus des grains roses *d'andalousite.*

Au microscope on a pu y constater les élements suivants: *Orthose, oligoclase, microcline, perthite, myrmékite, biotite, muscovite, quartz, andalousite, cordiérite, sillimanite, titanite, apatite, zircon, magnétite.* Comme éléments secondaires: *pennine, muscovite* (séricite).

L'orthose est développée en cristaux aplatis suivant g^1 (M) ou bien en grains sans formes cristallines. La mâcle de Carlsbad y est fréquente.

Les plagioclases sont moins fréquents que l'orthose: c'est principalement de *l'oligoclase.* Les mâcles de l'albite et de la pericline y sont fréquentes, ainsi que la structure zonée: le centre est plus basique et lamellé, la périphérie est plus acide et sans mâcle polysynthétique. *La microcline* et *la perthite* y sont assez fréquentes, ainsi que le *quartz vermiculé.*

La biotite se présente en paillettes automorphes suivant la base. Elle est de couleur brun-marron à polychroïsme intense et contient de nombreuses *auréoles polychroiques.* Elle est biaxe, l'angle des axes optiques est petit. On a pu observer parfois une association parallèle avec la muscovite. Elle se décompose en *pennine.*

La muscovite se présente en plages absolument allotriomorphes sans polychroïsme.

Quartz: quartz granitique ordinaire sans aucune particularité. Ne présente pas d'extinction roulante ou bien une extinction roulante très faible.

Andalousite: en baguettes courtes sans inclusions, avec zone verticale bien développée. Nettement polychroïque, les vibrations parallèles à a donnent une teinte rose claire, les vibrations suivant les deux directions normales à la précédente sont incolores. Elle se transforme par altération en *muscovite.*

La cordiérite n'a été observée q'exceptionellement, elle est partiellement *pinitisé.*

La sillimanite est relativement rare. Elle se présente en fines aiguilles formant des inclusions dans le quartz. *L'apatite* est dévelopée en prismes allongés, ou bien en grands cristaux délimités par le prisme pyramidé et la base; clivage net suivant (0001) et $(10\bar{1}0.)$

Le zircon en grains sans formes cristallines ne présente aucune particularité.

Titanite: ou bien en grands cristaux idiomorphes, ou bien en petits grains sans forme cristalline groupés ensemble; le polychroïsme n'a pas pu être constaté.

Minéraux opaques: *magnétite* en petite quantité. *La pyrite* n'a pas pu être constatée en coupe mince de la roche; on peut déduire sa présence de l'analyse chimique, qui a montré 0·02% de soufre.

Les minéraux les plus intéressants du granite de Mrákotín sont les mineraux riches en alumine: *andalousite, cordiérite, sillimanite,* qui sont les résultats d'un métamorphisme endogène intense qu'a subi le granite. L'analyse chimique confirme cette manière de voir.

L'enrichissement du granite en alumine doit être mis en relation avec le caractère compliqué du contact du granite avec les roches encaissantes.

La surface de contact entre le granite et le paragneiss a été agrandie par de nombreuses apophyses émises par le massif granitique. Une résorption partielle du paragnesis a eu lieu.

L'alumine a pénétré par diffusion vers le centre du massif de sorte qu'on trouve les minéraux riches en $Al^2 0^3$ bien loin du contact, même dans les parties du granite *de Mrákotín* à faciès aplitique. En même temps l'enrichissement du granite en alumine peut être mis en relation avec la résorption d'un certain nombre de petits massifs de paragneiss, qui se sont enfoncés dans la masse granitique; ce phénomène a pu être observé mainte fois dans la région.

Nodules de ségrégations basiques dans le granite de Mrákotín.

Nous trouvons assez souvent dans le granite que nous venons de décrire des nodules de ségrégations basiques de couleur foncée, extrémement riches en biotite: elles sont ordinairement de forme aplatie et n'atteignent généralement que la grandeur de quelques cm^2. Dans la plupart des cas l'examen à l'oeil nu suffit pour nous persuader qu'on a à faire avec des accumulations d'éléments ferromagnésiens, spécialement de *la biotite*; le passage à la roche normale qui englobe les nodules se produit d'une façon insensible, comme on a pu l'observer bien des fois. De plus on a pu constater que la roche normale est pauvre en biotite dans le voisinage immédiat des nodules de ségrégations basiques.

Le minéral, qui prédomine dans les nodules de ségrégations basiques est *la biotite*; ses caractères optiques sont les mêmes que dans la biotite du granite de Mrákotín que nous venons de décrire (auréoles polychroïques fréquentes). Elle est ordinairement idiomorphe (même la zone verticale est bien dévelopée). Les paillettes de mica sont disposées d'une manière très serrée. Elles contiennent en grand nombre des aiguilles de *rutile* (sagé-

nite). La biotite des parties périphériques des nodules basiques est considérablement résorbée et remplacée principalement par de petits grains de *quartz* et *de feldspaths* (voir le tableau I.). Alors c'est l'orientation optique commune qui nous prouvera que les restes sépares d'un cristal de biotite appartiennent à un seul idividu cristallin. La biotite s'altère *en pennine* ou parfois en une *chlorite fibreuse* de couleur vert d'herbe, avec faible polychroisme.

La muscovite n'est pas très rare. Par contre *les feldspaths* (orthose, plagioclases, principalement oligoclase) ne sont pas fréquents dans les nodules et sont complétement altérés. Dans des cas exceptionels on a pu observer une accumulation *de magnétite* en petits grains opaques. On trouve aussi parfois un peu *de sillimanite,* apercevable déjà à l'oeil nu.

Caractère général des nodules de ségrégation: ils se composent de même minéraux avec mêmes caractères que la masse de la roche, qui les englobe, sauf — *l'andalousite,* absente dans les nodules et *la cordiérite,* dont la présence est incertaine ; la limite entre les nodules et la roche normale est indistincte ; il est donc clair que leur origine doit être liée au granite. *Ce sont donc des ségrégations basiques protogénes du magma granitique, qui ont été partiellment resorbées après leur formation.*

Le fait qu'on n'ait pas pu constater avec certitude *ni andalousite, ni cordiérite* dans les nodules en question prouve qu'il ne s'agit pas ici d'enclaves formées par résorption de fragments de gneiss à cordiérite, car dans ce cas on devrait s'attendre à trouver dans les nodules les deux minéraux cités — surtout si on tient compte du fait qu'ils se rencontrent dans la masse de la roche, ainsi que de la pyrite, qui est très fréquente dans le gneiss à cordiérite.

Facies aplitique du granite de Mrákotín.

Près du hameau *Praskolesy* au SW *de Mrákotín,* surtout sur le coteau „*Vrchy*" (623 *m*) le granite *de Mrákotín,* aquiert un grain fin et un facies aplitique, qui passe d'une manière tout à fait insensible au facies typique que nous venons de décrire et que nous pouvons qualifier de „normal". Le granite à facies aplitique est caracterisé par un grain beaucoup plus fin que ne l'est celui du granite ordinaire, *le mica* y est moins fréquent (*la muscovite* apparaît en quantité tout à fait insignifiante). La structure est grenue avec développement panidiomorphe ou, partiellement, hypidiomorphe des éléments. Parmis les feldspaths c'est *l'orthose* qui prédomine. Elle est beaucoup plus fréquente que *les plagioclases*: (principalement oligoclase-albite et oligoclase) la quantité de ces derniers est tout à fait insignifiante en comparaison avec celle du granite à facies „normal". Au contraire *la microcline, la perthite, la myrmékite* (quartz vermiculé) y sont

fréquents. La biotite et la muscovite présentent les mêmes caractères que les micas du granite ordinaire.

Comme éléments accessoirs apparaissent: *la titanite. le zircon, l'apatite, l'andalousite;* ce dernier minéral est caractérisé par un polychroisme particulièrement beau.

Filons métallifères de Dobrá Voda.

Les filons de quartz de la région sont en relation avec l'intrusion du granite de Mrákotín. Ces filons contiennent de la galène argentifère associée à d'autres minerais sulfurés. On les trouve justement dans la zone de contact du granite avec le gneiss, c'est à dire dans la zone injectée (migmatitique) comme on a pu le révéler près du hameau *Dobrá Voda* au S de *Mrákotín*. C'est principalement au XVI^me^ et au commencement du XVIII^me^ siècle que les filons de *Dobrá Voda* avaient été activement exploités par des travaux de mines. Le hameau de *Dobrá Voda* — même, était l'un des centre des travaux miniers, un autre centre se trouvait dans la forêt „*Smrček*" au nord de *Zdenkov*, où on peut voir encore maintenant des minières abandonnées, alignées suivant la direction h 8.

Les filons ont un caractère bréchoïde prononcé, et contiennent des fragments de gneiss et de migmatite. La gangue des filons est formée principalement de *quartz laiteux* qui, contient comme minerais: *la galène argentifère, le mispickel, la pyrite, la chalkopyrite, la blende,* formant des concentrations irrégulières ou bien disséminés dans la gangue.

Un des filons affleure dans la forêt de *Smrček* près des mines abandonées. Il a une puissance de presque 2 *m*, une direction h 8 et un plongement très fort vers le sud. Les filons de *Dobrá Voda* de même que les filons de Jezdovice non loin de Třešť sont les représentants les plus méridionaux du grand cortège de filons de la région de *Německý Brod et Jihlava*.

Les filons de *Dobrá Voda* présentent une grande analogie avec les filons de Čihošť décrits par B. S t o č e s,[1]) qui ont également un remplissage à gangue quartzeuse, avec association de mispickel argentifère. Comme pour ces derniers filons, l'absence des carbonates prouve que la température des solutions minérales — hydrothermales était relativement haute, pendant la formation des filons.

Caractères chimiques du granite de Mrákotín.

L'analyse chimique du granite de *Mrákotíne* (No I) fut exécutée par M. V. V e s e l ý du Service de la carte géologique de la Tchécoslovaquie. (I.)

---

[1]) B. Stočes: Věda přírodní III., pag. 142.

II. Calcul de l'analyse en %, déduction faite H_2O, P_2O_5, S;
III. Proportions moléculaires correspondantes;
IV. Pour cent moléculaires.

	I.	II.	III.	IV.
Si O_2	73·62	74·28	1·2380	80·86
Ti O_2	0·18	0·18	0·0022	0·14
Al_2 O_3	14·06	14·19	0·1391	9·09
Fe_2 O_3	0·33	0·33	Fe O −1.39	0·0193	1·26
Fe O	1·08	1·09		
Mn O	0·02	0·02	0·0003	0·02
Ca O	1·03	1·04	0·0186	1·21
Mg O	0·40	0·40	0·0056	0·37
K_2 O	5·15	5·20	0·0553	3·61
Na_2 O	3·24	3·27	0·0527	3·44
H_2O +	0·34	Ø		
H_2 O −	0·53			
P_2 O_5	0·30			
S	0·02			
Cl	stopy			
	100·30%	100%	1·5311	100·00%

Répartition des groupes d'après la méthode d' O s a n n.

s = 81·00	a = 19·5
A = 7·05	c = 3·5
C = 1·21	f = 7·0
T = 0·83	n = 4·88
F = 2·43	k = 1·72

Formule d'Osann:

$$c_{81}\ a_{19\cdot5}\ c_{3\cdot5}\ f_7\ n_5$$
$$S\ Al\ F = 25\cdot5 : 2\cdot94 : 0\cdot92$$
$$Al\ C\ Alk = 15\cdot72 : 2\cdot09 : 12\cdot19$$
$$NK = 4\cdot88$$
$$MC = 2\cdot34$$

Le granite de Mrákotín (type de Big Timber Creek d'Osann[3])) par les valeurs des rapports S Al F et Al C Alk présente de grandes ressemblances avec le granite à deux micas du S c h u l z e R a n c h dans l'Arizona (voir Osann: Petrochemische Untersuchungen 1. Abh. d. Heidelb. Akad. d. Wiss. 2, Heidelberg 1913. Tab. III. No 39).

L'analyse chimique confirme bien les résultats de l'étude microscopique: La valeur de „k" dépasse beaucoup 1, ce qui indique que la roche contient assez de quartz libre. Une autre preuve de l'acidité considérable du granite de *Mrákotín* est fournie par la valeur relativement petite de F Aussi la prédominance de l'orthose par rapport aux plagioclases trouve son explication dans les résultats de l'analyse chimique. L'excès d'alumine dans la roche T parle d'un apport de l'aluminium, ce qui peut bien être expliqué, comme on l'a déjà vu plus haut, par une assimilation partielle du paragneiss.

Résultats de la mesure granotectonique produite d'après la méthode de Cloos.

On a pu produire avec succès la mesure des fissures dans le granite d'après la méthode „granotectonique", grâce à de nombreuses carrières dans le granite de la région de *Mrákotín.* Il s'agissait ici surtout d'aprécier les différentes fissures, produites ou secondés par la pression orogénique à laquelle le massif granitique était soumis après sa consolidation.

La mesure a été éxécutée d'après les méthodes nouvelles de M. C l o o s.[4]) C'est également cet auteur que je veux suivre dans la désignation des différents éléments granotectoniques principaux, à savoir:

---

[3]) Rosenbusch-Osann- Elemente d. Gesteinslehre 1922, pag. 266.

[4]) H. C l o o s: Geologie der Schollen in schlesischen Tiefengesteinen. Abh. d. Pr. Geol. L.-A. N. F. Hf 81, Berlin 1920.

H. C l o o s: Der Mechanismus tiefvulkanicher Vorgänge, Sammlung Vieweg, Hf. 57 Braunschweig 1921.

H. C l o o s: Tektonik u. Magma. Untersuchungen zur Geologie d. Tiefen, B d. I. Abh. d. Preus. Geol. L. A. N. F. 89, Berlin 1922, I., 1.

H. C l o o s: Der Gebirgsbau Schlesiens u. die Stellung seiner Bodenschätze, Berlin 1922.

Fig. 1. Cristaux d'andalousite dans le granite de Mrákotín.
(Grossissement 47×.)

Fig. 2. Biotite resorbée dans une nodule de ségregation basique. (Granite de Mrákotín.)
Cliché de Mme Dr. L. Slavíková. (Grossissement 47×.)

Fig. 1. Vue général sur la partie SE de carrières de Mrákotín, dite „V jasankách.“

Fig. 2. Monolithe de granite de Mrákotín, 19 *m* de longeur déstiné pour le château de Prague.

Cliché de l'auteur.

„*Q*“ = fissures de direction parallèle à la direction de la pression orientée; sous l'influence de cette pression et le retrait produit par la consolidation du granite, ces fissures restent ouvertes.

„*S*“ = fissures de direction normale par rapport à la direction de la préssion, c. à-d. parallèles à la direction de la disjonction facile de la roche.

„*L*“ = fissures horizontales ou presque horizontales.

Le lecteur pourra trouver une explication détaillée de la méthode granotectonique, dans les travaux originaux de M. Cloos; faute de place nous ne pouvons nous arrêter plus longuement sur ces questions dans cette note.

Remarques au tableau (voir pag. 10).

Ad 1. Les fissures „*Q*“ sont très eloignées les unes des autres, ce qui permet d'extraire des monolithes de granite de dimension énorme, atteignant parfois la longueur presque de 20 *m* (monolithe pour le château de Prague).

Ad 2. La surface des fissures „*Q*“ est extrèmement grande, mais présente des courbures irrégulières.

Ad 3. On peut observer dans la carrière des massifs énormes de gneiss à cordiérite, formant des enclaves dans le granite; ces massifs se sont enfoncés dans la masse granitique lorsque elle était encore à l'état liquide. Leur disposition suit à peu près la direction h 3, qui est sensiblement normale à la direction des fissures „Q“ (parallèles à la direction de la pression). Les fissures apparaissent d'une manière peu nette dans la carrière.

Ad 4. De grands cristaux porphyroides (parfois 4 *cm* longs) d'orthose sont fréquents, mais on n'a pas pu constater que ces cristaux aient une orientation régulière qui serait en relation avec la pression.

Les concentrations basiques sont relativement rares et révèlent plutôt une disposition horizontale qu'une orientation dans la direction normale à la direction de la pression latérale. Les fissures imparfaitement développées ne révèlent aucune orientation réguliere et prouvent que la pression latérale n'a pas eu d'influence.

Ad 6. Cette carrière est caractérisée par l'absence des fissures „*Q*“. Seulement en quelques rares endroits on a pu observer de courtes petites fissures dirigées h 8. Au contraire les fissures „*S*“ sont bien dévelopées et nettement indiquées. Tout de même il n'est pas difficile de distinguer les fissures „*Q*“, des fissures „*S*“, en s'apuyant sur l'orientation de la disjonction facile. On peut observer dans cette carrière des nodules elliptiques riches en biotite; ces nodules sont aplatis dans une direction qui est parallèle aux surfaces de la disjonction facile.

L'orientation des fissures caractéristiques dans le granit de Mrákotín.

No:	Localité	Fissures „Q"		Fissures „S"		Fissures diagonales		Disjonction		Fissures „L"	
		direct.	plongem.	direct.	plongem.	direct.	plongem.	direct.	plongem.	direct.	plongem.
1	Carrière de Jasanky où on a extré le monolithe pour le château de Prague	h 8	88° NE	h 2½	90° ou pendage vers l'est	*a*) h 10⅓ *b*) h 5½	75° SW 60° NW	h 2½	80° SE	h 8	0—20° SW
2	Partie supérieure de la même carrière	h 7 8 8½	90° ou bien pendage très fort vers NE	h 2½	80° SE					Leur direction oscille, tendence à un plongement SW	
3	Ancienne carrière derière le batiment de l'administration de la compagnie „Mrákotínské kamenolomy, S. A."	h 7—8	90°—70° SW	h 1—2	90°						
4	Nouvelle carrière au dessus de la forgerie (au SW de la carrière à monolithe)	h 8	90°	h 2½	75 SE	*a*) h 11 *b*) h 4	86 E ?	h 3½	90°		
5	Partie ouest de niveau supérieur des „Carrières réunies" S. A. (Spojené kamenolomy)	8½—9	86° SW —90°	h 2	80° NW —90°						
6	Carrière de la commune de Mrákotín au SE de la ville	Absence des fissures de ce genre, seulement en quelques endroits fissures *Q* de petite extension de direction h 8		h 2⅔ —3	90° ou bien plong. très fort vers NW			h 2⅔	80—85 NW	Leur direction oscille; tendence à un plongement vers le SW	

Une dislocation longitudinale importante traverse la carrière. La surface de la dislocation a une direction h 2 et une inclinaison très forte vers le NW, presque verticale. Suivant cette dislocation le granite se trouve en contact tectonique avec le paragneiss injecté (fig. 2). Cette dislocation appartient probablement au système d'accidents tectoniques qui ont une direction parallèle à la ligne actuelle du partage des eaux de la „Českomoravská vysočina", dont les parcours est fortement influencé par des accident tectoniques, ce qui avait été déjà prouvé par M. Hinterlechner.[4])

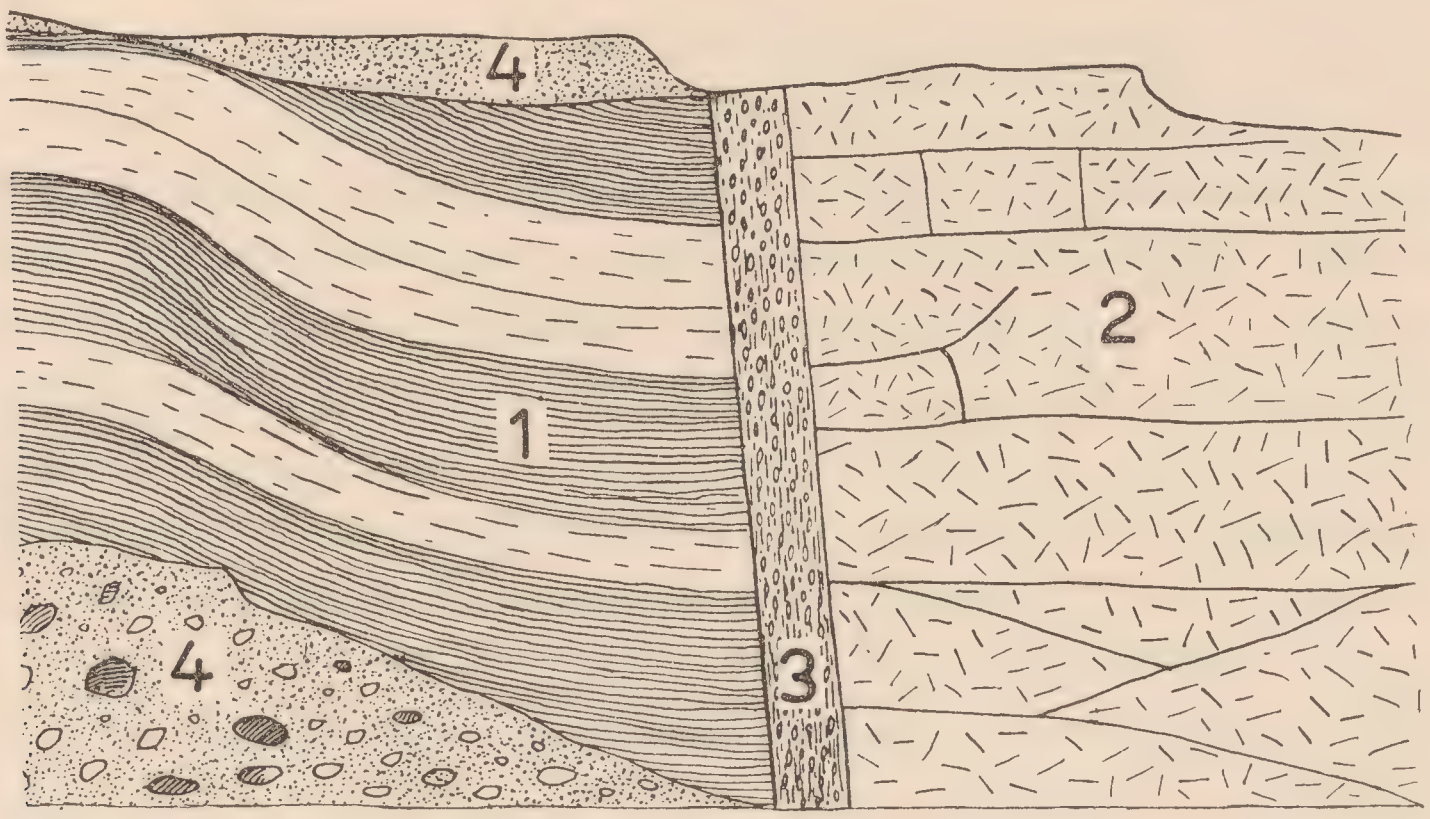


Fig. 2.
Dislocation longitudinale affleurant dans la carrière de la commune de Mrákotín.
1. Paragneiss injecté, 2. Granite à deux micas, 3. Brêche tectonique 4. Eboulis.

Relation entre les fissures dans le granite, les dislocations transversales et les filons de Dobrá Voda.

Le levé d'une esquise de la carte géologique detaillée des alentours de Mrákotín a mis en evidence deux dislocations transversales de direction h 7 ½, comme le montre partiellement la figure ci-jointe (No 1.). Ces dislocations déterminent de dentelures de la limite entre le granite et la zone des migmatites, parfois elles coupes les apophyses granitiques; leur direction corespond ou ne diffère que d'une ½ h de:

1. la direction du parcours des fissures „*Q*" dans les carrières de Mrákotín. (Voir tableau.)
2. de la direction des filons métallifères à gangue quartzeuse *de Dobrá Voda.*

---

[4]) K. Hinterlechner: Ueber Schollenbewegungen am südöstlichen Rande der böhm. Masse, Verh. d. k. k. geol. R.-A. Wien. 1914 p. 64.

Il est vraiment tout à fait remarquable que les fissures „Q“, les filons de quartz et les dislocations transversales ont la même direction. Il nous vient tout de suite à l'idée qu'une seule cause leur a donné naissance. Il en est ainsi certainement des deux premiers phénomènes. Moins sure, quoique très probable, est leur liaison avec les dislocations transversales.

Suivant C l o o s les fissures „Q“ apparaissent sous l'influence d'une traction résultant de la décomposition de la pression qui lui est normale. Ces fissures ce sont ouvertes lorsque cette traction a surpassé la résistance du granite.

Il est probable que les fissures dans le granite pourraient s'ouvrir simplement lors du retrait produit par la consolidation du massif granitique, sans que la pression orogénique eu intervenue. *Tout de même c'est elle qui a déterminé leur position relative et leur orientation dans l'espace.*

Les *filons* ou respectivement les fractures qui ont été incrustées par voie aqueuse ne sont, en ce qui concerne leur génèse et leur caractère, autre chose que les fissures „*Q*“, traversant, il est vrai, dans ce cas les migmatites et non le granite. Le caractère bréchoide déjà mentionné du remplissage des filons parle d'une fissuration intense de l'écorce terrestre déterminée par la traction. Elles sont tout de même de plus grande dimension en comparaison avec les fissures „*Q*“ dans le granite. Le remplissage des fissures par les minerais prouve, qu'elles se sont ouvertes avant que le foyer magmatiqus du granite de Mrákotín se soit complément éteint, car l'ascension des eaux hydrothermales doit être considérée comme le dernier stade des phénomènex volcaniques liés aux intrusions granitiques.

Il est plus difficile de démontrer le fait, cependant très probable, que les *dislocations transversales* sont liées à la même catégorie de fissures (c'est à dire aux fissures apparues immédiatement après l'intrusion du granite de Mrákotín). La difficulté principale dans la résolution de cette question est l'impossibilité de déterminer l'âge relatif des dislocations transversales ; en tout cas elles se sont formées après l'intrusion du granite. Tout de même il est très probable, que les trois phénomènes: fissures „*Q*“, filons de Dobrá voda et dislocations transversales sont des phénomènes du même ordre, et de la même origine et se sont formés sous l'influence de la même traction transversale agissant dans la direction normale à la pression orogénique.

Mais tandis que les fissures „*Q*“ sont de simples minces diaclases non remplies par les substances minérales, les filons sont les mêmes fissures „*Q*“ mais plus importantes et remplis par la gangue et les minerais, les dislocations transversales correspondent probablement aussi à des fissures de la même catégorie, suivant lesquelles se sont produits les mouvement horizontaux, ou bien les affaissements.

Dès lors, il me parait légitime de conclure, que ces phénomènes ont une même origine et sont dus à une pression de direction h 8 (ou bien

à une traction normale à cette pression), à laquelle le granite de Mrákotín avait été soumis immédiatement après son instrusion.

Récapitulation des résultats d'observations granotectoniques dans la partie E du massif granitique de la „Českomoravská vysočina" (allentours de Mrákotín).

Jettons un coup d'oeil restrospectif sur les résultats d'observations granotectoniques faites dans le massif granitique de Mrákotín. Pendant la consolidation du granite une pression hydrostatique réguliére prédominait sur une pression latérale, ce qui est prouvé par l'absence d'une orientation régulière des élements du granite, ainsi que des cristaux de feldspath à développement porphyroïde et de la plupart des nodules de segrégation basique. L'irrégularité de la fissuration du granite observée en plusieurs endroits nous amène à la même conclusion (partie inférieue des „Carrières réunies"). Tout de même quelques traces de l'influence, qoique faible, de la pression latérale existent certainement. Nous en voyons les symptômes dans les faits suivants:

1. position orientée des enclaves de gneis à cordiérite dans la carrière derrière le bâtiment de l'administration de la compagnie „*Mrákotínské kamenolomy*",

2. orientation réguliére de la disjonction facile du granite,

3. orientation des fissures apparues après la consolidation du granite; celles-ci ne sont pas trop fréquentes, parfois même, comme p. ex. dans la carrière à l'E de Mrákotín, elles manquent tout à fait; mais parfois elles sont très bien développées et très grandes. Cette particularité de la disposition des fissures „*Q*" donne la possibilité d'extraire des monolithes énormes de granite. L'orientation des différents „éléments granotectoniques" prouve l'existence d'une pression tangentielle qui agissait sur la masse granitique durant et immédiatement après sa consolidation; dans les alentours de Mrákotín cette pression avait la direction h 8 (ESE—WNW), qui est normale à la direction de la schistosité des schistes cristallins dans la région de Mrákotín, et aussi à l'axe du massif central de la „*Česko-moravská vysočina*". L'uniformité de la direction de cette pression, de la direction des dislocations transversales et des filons de Dobrá Voda est vraiment tout à fait remarquable; elle prouve que tous ces phénomènes se trouvent en relation étroite.

La direction de la pression apparait d'une manière nette de la disposition des différents „éléments granotectoniques"; cette pression est le dernier retentissement du plissement hercynien, à la fin duquel (suivant nos connaissances actuelles sur la structure géologique de la „*Českomoravská vysočina*") s'est produite l'instrusion du granite.

Institut géologique de l'École
Polytechnique tchèque à Prague

Sur les antinomies de la théorie des ensembles.

Par

Dr. J. M. HORÁK.

Présenté le 22 mai 1925.

Les considérations sur les antinomies bien connues de la théorie des ensembles, exposées dans la note présente, font, il me semble, bien voir que ces antinomies peuvent être résolues, c'est-à-dire enlevées sans avoir besoin de principes spéciaux. Je laisse de côté la question de la nécessité d'une fondation plus exacte des mathématiques (p. e. par la méthode axiomatique); de même, je ne veux pas décider entre les deux points de vue récents: celui des formalistes et celui des intuitionistes (suivant la terminologie de M. Brouwer); je crois seulement que le résultat de mes considérations montre que la définition de l'ensemble indiquée par Cantor n'implique pas de contradictions et qu'en vertu de ces raisonnements, la conception formalistique reprend son ancienne sûreté et son exactitude logique, dont on commençait à douter.

Voici la succession d'idées de mon mémoire.

1. Soit donnée une proposition $E(x)$, préalablement définie, sur un objet x et supposons qu'il existe un objet x, au moins, tel que nous puissions décider, si, pour cet objet x, la proposition $E(x)$ est vraie ou fausse. (Cf. Zermelo, Math. An. 65. p. 263, „definite Aussage"). La définition de l'ensemble de Cantor nous permet de considérer un ensemble „de tous les objets x, pour lesquels la proposition $E(x)$ est vraie". Or, il est clair que la notion de „tous" ne peut comprendre que les objets définis ou définissables, car on ne peut rien affirmer sur un objet qui n'est pas défini. (Les objets directement donnés sont aussi définis ou, du moins, définissables.) C'est une supposition sous-entendue sur la notion de „tous" et il faut l'exprimer clairement; au lieu de „ensemble de tous les objets etc." je dirai d'une façon plus claire „ensemble de tous les objets, *jusqu'à ce moment définis ou définissables**), pour lesquels la proposition E est vraie" et je désignerai cet ensemble par la lettre D.

*) Pour abréger, j'écrirai: „j. d.".

Personne ne regardera cette conséquence comme un principe nouveau; ce n'est qu'un énoncé clair d'une supposition logique sur la notion de „tous".

Cela posé, définissons au moyen de l'ensemble D un objet N et supposons que l'on ait prouvé, sur cet objet N défini au moyen de D, qu'il satisfait à la proposition E, c'est-à-dire, que $E(N)$ est vrai. Qu'en résulte-t-il? La seule hypothèse que $E(N)$ soit vrai, ne permet pas d'affirmer que l'objet N appartienne à l'ensemble D, car les deux cas suivants peuvent se présenter:

1°. L'objet N ne peut pas être défini sans l'existence de l'ensemble D, il ne devient définissable que par la construction de l'ensemble D. Cela veut dire que l'objet N n'est pas compris parmi les objets „j. d.". Par suite, ce n'est pas un élément de l'ensemble D.

2°. Il est encore possible de définir l'objet N d'une autre manière, indépendante de l'ensemble D. Dans ce cas, l'objet N est un des objets „j. d." et doit, par conséquent, être considéré comme élément de l'ensemble D (on en trouvera plus loin un exemple).

Il est clair que l'on aura l'un ou l'autre de ces cas, car il existe une définition de l'objet N indépendante de l'ensemble, ou il n'en existe pas; on en décidera par une étude spéciale dans chaque cas particulier.

Dans d'autres cas analogues, on procède d'une manière identique. Ainsi: par l'ensemble „de tous les objets définissables d'une certaine manière donnée", on doit entendre l'ensemble „de tous les objets *jusqu'à ce moment* définissables d'une certaine manière donnée". De même, on doit considérer l'ensemble „de tous les objets *jusqu'à ce moment* construisables à l'aide d'une ou plusieures opérations données" etc.

Dans les pages suivantes, je montre que, dans le cas des antinomies, il s'agit d'une conclusion fausse, telle que $E(N) \longrightarrow N \,\varepsilon\, D$ (où $\longrightarrow$ signifie la conséquence logique et ε veut dire: „est élément de") ce qui équivaut, comme on l'a vu plus haut, à la conclusion suivante:

$E(N) \longrightarrow N$ est parmi les objets „j. d." pour lesquels E est valable.

Ce jugement évidemment faux est, comme nous le verrons, le point critique de toutes les antinomies considérées.

2. MM. K. Grelling et L. Nelson proposent en tout 6 antinomies diverses, concernant directement ou indirectement la théorie des ensembles. (Voir: Grelling-Nelson, Bemerkungen zu d. Paradoxien etc., Abhdl. d. Fries'schen Schule, N. F. II. Bd. 3. H. 1906). Ils montrent que tous ces paradoxes (excepté celui de l'ensemble de toutes les choses) peuvent être formulés d'une manière unique comme il suit (après une légère modification):

„Sei **M** eine Menge von Mengen und Φ eine zu **M** äquivalente Menge. Wir wollen die Zuordnung, durch welche die Elemente von Φ denen von **M** zugeordnet sind, mit φ bezeichnen. Da die Elemente von **M** selbst

Mengen sind, so sind folgende Fälle möglich. Wenn M ein Element von **M** ist, so ist $\varphi(M)$ entweder Element von M, dann wollen wir $\varphi(M)$ in die Teilmenge X von Φ rechnen, oder $\varphi(M)$ ist nicht Element von M, dann rechnen wir es in die zu X komplementäre Teilmenge Y von Φ. Wenn nun Y selbst Element von **M** ist, so existiert in Φ ein Element $\varphi(Y)$. Angenommen nun, $\varphi(Y)$ sei Element von Y, dann wäre es Element von X, nach der Definition von X, was mit der Annahme in Widerspruch steht. Angenommen aber, $\varphi(Y)$ sei nicht Element von Y, dann wäre es Element von Y, nach der Definition von Y, was wiederum der Annahme widerspricht."

Nous désignons cette forme générale de raisonnement par la lettre P.

Remarque. La relation φ fait correspondre à chaque élément M de l'ensemble **M** un certain élément $\varphi(M)$. En vertu de la définition des ensembles X et Y, on a pour tous les éléments de **M** et pour ceux-ci seulement:

$$\varphi(M)\ \bar{\varepsilon}\ Y \longrightarrow \varphi(M)\ \varepsilon\ X \text{ et réciproquement } \varphi(M)\ \varepsilon\ X \longrightarrow \varphi(M)\ \bar{\varepsilon}\ Y,$$
$$\varphi(M)\ \bar{\varepsilon}\ X \longrightarrow \varphi(M)\ \varepsilon\ Y \quad ,, \qquad\qquad ,, \qquad \varphi(M)\ \varepsilon\ Y \longrightarrow \varphi(M)\ \bar{\varepsilon}\ X$$

($\bar{\varepsilon}$ signifiant la négation de ε, c'est-à-dire „n'est pas élément de").

Cette fonction φ pourrait aussi être définie pour un objet A non contenu dans **M**; on aurait dans ce cas:

$$(\varphi(A)\ \bar{\varepsilon}\ X)\ .\ (\varphi(A)\ \bar{\varepsilon}\ Y)$$

(le point entre les deux membres désignant la simultanéité logique).

3. Cela posé, considérons un ensemble Y' jouissant des propriétés suivantes:

a) Y' est élément de l'ensemble **M**.

b) Tous les éléments de Y' correspondent au moyen de φ à certains ensembles de **M** d'une manière réciproque et univoque.

Si un tel ensemble Y' n'existait pas, l'ensemble Y qui possède la propriété b) en vertu de sa définition, ne pourrait certainement pas avoir aussi la propriété a).

Supposons donc l'existence d'un tel ensemble Y'. Y' étant élément de l'ensemble **M**, on peut lui faire correspondre un objet $\varphi(Y')$ au moyen de φ; les deux cas suivants peuvent se présenter:

1° Y' contient l'objet $\varphi(Y')$ comme élément,

2° Y' ne contient pas l'objet $\varphi(Y')$.

Nous dirons qu'un ensemble jouit de la propriété c), quand il contient les éléments qui ne font pas partie de l'ensemble correspondant et ceux-là seulement. Cette convention faite, nous pouvons affirmer que Y' ne peut pas avoir la propriété c): car, dans le premier cas, il contient l'élément qui lui correspond à lui même, et dans le second cas, il ne contient pas l'élément correspondant à lui même.

De tout cela, il résulte que l'ensemble Y, jouissant des propriétés b) et c), n'a certainement pas la propriété a).

Les considérations précédentes montrent, de quelle manière on peut définir, au moyen de l'ensemble **M**, un ensemble nouveau Y qui n'est pas contenu dans **M**. En posant $\mathbf{M} = D$, on a donc en résumé:

M désignant l'ensemble de tous les ensembles (j. d.) pour lesquels la proposition E est valable, l'ensemble Y, défini d'une manière connue au moyen de **M**, ne fait pas partie de **M**, même dans le cas où l'on peut démontrer que $E(Y)$ est vrai.

4. De là, on voit qu'il peut, en général, exister un objet N (en reprenant la notation du nro 1), pour lequel $E(N)$ est vrai et qui ne soit pas élément de l'ensemble D de tous les objets j. d. vérifiant la proposition E.

Je veux encore ajouter un exemple qui doit montrer que le cas contraire est aussi possible. Étant donné un ensemble R de nombres réels tel que: $R = \left\{1, \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \ldots \sqrt{\frac{k-1}{k}}, \ldots\right\}$, considérons la limite supérieure de cet ensemble.*) Si nous considérons au lieu de chaque nombre l'ensemble de nombres rationnels qui le définit, la limite supérieure de R est un ensemble défini au moyen de l'ensemble R. D'autre part, il est clair que cette limite est un ensemble de nombres rationnels qui définit le nombre 1; donc cet ensemble défini au moyen de R est contenu dans R comme élément. De même, il est évident que cet ensemble, définissant le nombre 1, peut être défini d'une manière indépendante de R, résultat bien d'accord avec ceux du nro 1.

5. Continuons nos réflexions sur les antinomies. La marche d'idées que l'on a suivie dans tous les cas est suivante: Il s'agit de l'ensemble **M** de tous les ensembles j. d. pour lesquels la proposition E est vraie. On construit l'ensemble Y qui satisfait même à la proposition E. De là, et seulement de là, on conclut que cet ensemble est élément de **M**, ce qui conduit à la contradiction connue.

Les premières pages de cette note font voir que c'est une conclusion illégitime; le numéro 3 prouve, il me semble, que cette conclusion est fausse; les antinomies sont, en général, résolues. Je vais éclaircir les réflexions précédentes par quelques exemples.

I. MM. Grelling et Nelson (voir l. c. au nro 2) ont désigné par P_1 le paradoxe de Russel sur l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux mêmes comme élément. On peut mettre P_1 sous la forme générale P, si l'on prend pour φ la correspondence indetique, **M** désignant l'ensemble de tous les ensembles (j. d.). Il en résulte que Y est l'ensemble de tous les ensembles (j. d.) qui ne se contiennent pas eux mêmes comme élément. La fin du nro 3

---

*) Existence de cette limite serait admise même par M. Weyl, car R est supposé dénombrable. (Cf. Weyl, Das Kontinuum.) D'ailleurs, pour nos conclusions, cette supposition n'est pas essentielle.

montre que Y n'est pas élément de $\mathbf{M}$; $\varphi(Y)$ étant défini, on a donc, en utilisant la remarque du nro 2:

$$(\varphi(Y)\ \bar{\varepsilon}\ Y)\ .\ (\varphi(Y)\ \bar{\varepsilon}\ X),$$

c'est-à-dire, Y ne se contient pas lui même.

L'ensemble de tous les ensembles (j. d.) qui ne se contiennent pas eux mêmes, ne se contient pas non plus lui même comme élément.

Il est évident que cet énoncé ne conduit pas à une contradiction. L'antinomie a son origine dans la conclusion fausse, affirmant que l'ensemble Y est un des ensembles j. d.

II. On peut mettre le paradoxe P_4 (voir l. c. nro 2) sous la forme générale P; $\varphi(M)$ désignera ici la notion commune à tous les éléments de l'ensemble M et à ceux-là seulement, $\mathbf{M}$ désignant l'ensemble de tous les ensembles j. d. L'ensemble Y est donc l'ensemble de tous les prédicats j. d. qu'on ne peut pas énoncer sur eux mêmes; de sa part, il définit le prédicat: „imprédicable". En vertu du nro 3 et de la remarque du nro 2 on doit avoir

$$(\varphi(Y)\ \bar{\varepsilon}\ Y)\ .\ (\varphi(Y)\ \bar{\varepsilon}\ X);$$

ce qui peut s'énoncer: le prédicat „imprédicable" n'est pas compris dans l'ensemble des prédicats prédicables ou imprédicables. C'est donc un prédicat nouveau, auquel on ne doit appliquer aucun des deux prédicats: prédicable et imprédicable.

Dans ce cas encore, la contradiction provient de la conclusion fausse, affirmant que le prédicat „imprédicable" est contenu parmi les prédicats j. d.

On obtient aussi une solution analogue pour les antinomies P_5 et P_6 proposées par MM. Grelling et Nelson (voir nro. 2).

III. Considérons l'ensemble de tous les nombres ordinaux (j. d.). Si nous admettons que la démonstration de l'existence d'un type ordinal, appartenant à chaque ensemble bien ordonné, est valable (nous sommes, je crois, bien en droit de l'admettre) aussi pour ensemble considéré, le type ordinal de celui-ci définit un certain nombre ordinal.

Or, de ce fait même, que c'est l'ensemble de tous les nombres ordinaux (j. d.), on ne peut pas conclure que le nombre ordinal appartenant à cet ensemble même soit contenu dans cet ensemble (comme élément). Mais on peut démontrer le contraire comme il suit:

Désignons par $\mathbf{M}$ l'ensemble dont tous les éléments sont des ensembles (de nombres ordinaux) de tous les types ordinaux j. d. Par la relation φ, faisons correspondre, à chaque type, son nombre ordinal qui, comme on sait, n'est pas contenu dans cet ensemble. Or, par la construction de l'ensemble Y, on arrive à l'ensemble de tous les nombres ordinaux. Le résultat du nro 3 fait voir que le type Y n'appartient pas à $\mathbf{M}$, ce qui signifie, en vertu de la correspondance univoque et réciproque entre les éléments

des ensembles **M** et Y, que le nombre ordinal correspondant au type Y n'est pas contenu dans Y, autrement dit: l'ensemble de tous les nombres ordinaux j. d. définit un nombre ordinal nouveau.

Nous désignons ce nombre succédant immédiatement à tous les nombres ordinaux (transfinis) j. d. et les nombres qui le suivent par le mot „supratransfini".

Pour éclairer la discussion que l'on vient de faire, on doit se rappeler le premier nombre transfini ω qui est le nombre ordinal de l'ensemble de tous les nombres ordinaux finis, de même que le premier nombre supratransfini est le nombre ordinal de l'ensemble de tous les nombres transfinis.

Quand nous disons: à l'ensemble W de tous les nombres ordinaux j. d., c'est-à-dire de tous les nombres ordinaux transfinis, appartient un nombre ordinal transfini, nous pouvons dire tout aussi légitimement: à l'ensemble w de tous les nombres ordinaux finis appartient un nombre ordinal fini. Par conséquent, l'ensemble w (dont le nombre ordinal ω a été introduit par Cantor) serait également paradoxal, comme on le croyait jusqu'à présent sur l'ensemble W; et contrairement, si l'on se sert des nombres supratransfinis qui ne sont pas contenus dans W, l'ensemble W apparait dépourvu de paradoxe comme l'ensemble dénombrable de tous les entiers dans la théorie de Cantor.

On peut démontrer tout de suite l'énoncé suivant:

La puissance d'un ensemble supratransfini ne change pas si on lui adjoint un ensemble transfini quelconque.

La démonstration est immédiate. La puissance d'un ensemble supratransfini est

$$\geq \aleph_0 + \aleph_1 + \ldots + \aleph_\alpha + \ldots .$$

Quand on lui adjoint un ensemble dont la puissance est $\aleph_\alpha$, la puissance du nouvel ensemble supratransfini ne change plus, car on a

$$\aleph_\alpha + \aleph_\alpha = \aleph_\alpha .$$

6. Pour finir, je voudrais ajouter encore quelques mots sur une antinomie connue sous le nom d'antinomie de Richard (Acta Math. 30., 1906; je me sers d'une forme plus simple, voir p. e. Poincaré, Dernières penseés, IV. ou Fränkel, Mengenlehre, II. éd. 1923).

Considérons tous les nombres entiers que l'on peut définir à l'aide de moins de 100 mots français. Le nombre de ces nombres étant fini, il existe aussi des nombres que l'on ne peut pas définir à l'aide de moins de 100 mots; ces derniers forment l'ensemble de tous les entiers qui ne sont pas définissables en moins de 100 mots. Il y a dans cet ensemble un nombre plus petit que tous les autres. Mais „le plus petit nombre que l'on ne peut pas définir à l'aide de moins de 100 mots" peut bien être défini,

comme on le voit, en un nombre moindre de 100 mots. Nous voilà retombés dans un paradoxe, qui n'est qu'apparent.

Car si l'on indique clairement la supposition logique sous entendue dans la notion de „tous", l'antinomie n'existe plus. L'ensemble en question n'est rien d'autre que — précisément dit — l'ensemble „de tous les entiers qui ne sont pas jusqu'à ce moment définissables en moins de 100 mots" (voir nro 1). Or, la construction des deux ensembles considérés d' entiers peut nous offrir une définition nouvelle pour des nombres déjà définis, une définition qui ne devrait pas être prononcée sans la définition des ensembles en question. C'est, en effet, ce qu'il arrive dans le cas considéré, même pour tous les nombres entiers, et, en particulier, pour l'entier le plus petit qui n'a pas été, jusqu'à ce moment, définissable à l'aide de moins de 100 mots.

L'ensemble qui vient d'être considéré est un exemple nouveau d'un ensemble qui contient un objet défini au moyen de cet ensemble même, tandis que les antinomies, dont nous nous avons occupés plus haut, nous fournissent des exemples des objets qui n'appartiennent pas dans l'ensemble, moyennant duquel ils ont été définis.

Une courte démonstration de la formule de Kummer.

Par

JOS. KAUCKÝ.

(Présenté le 22 mai 1925.)

1. n et k étant les nombres positifs entiers, on a d'abord par un simple calcul

$$\int_0^1 log\,\Gamma(x+n)\begin{matrix}sin\\cos\end{matrix}2\pi k x\,dx = \int_0^n log\,x\begin{matrix}sin\\cos\end{matrix}2\pi k x\,dx + \int_0^1 log\,\Gamma(x)\begin{matrix}sin\\cos\end{matrix}2\pi k x\,dx. \tag{1}$$

Pour continuer, écrivons la formule de Stirling sous la forme suivante

$$log\,\Gamma(x+n) = log\sqrt{2\pi} + \left(x+n-\frac{1}{2}\right)log\,n - n + \varepsilon(x,n),$$

ε étant très petit, lorsque n est très grand. En tenant compte de la formule précédente, on obtient donc

$$\int_0^1 log\,\Gamma(x+n)\,sin\,2\pi k x\,dx = -\frac{log\,n}{2\pi k} + \int_0^1 \varepsilon(x,n)\,sin\,2\pi k x\,dx \tag{2}$$

$$\int_0^1 log\,\Gamma(x+n)\,cos\,2\pi k x\,dx = \int_0^{} \varepsilon(x,n)\,cos\,2\pi k x\,dx. \tag{3}$$

Enfin, par l'intégration par parties on a aisément

$$-\int_\alpha^n log\,x\,sin\,2\pi k x\,dx = \frac{log\,n}{2\pi k} - \frac{1}{2\pi k}\left[\int_{2\pi k\alpha}^{2\pi kn}\frac{cos\,x}{x}\,dx + log\,\alpha\,cos\,2\pi k\alpha\right] \tag{4}$$

$$-\int_0^n \log x \cos 2\pi k x \, dx = \frac{1}{2\pi k}\int_0^n \frac{\sin 2\pi k x}{x}\, dx. \qquad (5)$$

2. Cela posé, supposons que $n \to \infty$. Les intégrales au second membre de l'équation (2) et (3) tendent vers zéro ; pour ce qui concerne les intégrales dans les équations (4) et (5), rappelons les formules bien connues de l'analyse

$$\int_0^\infty \frac{\sin b x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} b$$

$$-\lim_{\alpha \to 0}\left[\int_{x\alpha}^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt + \log \alpha\right] = E + \log x,$$

E étant la constante d'Euler.

Nous avons ainsi démontré que

$$\int_0^1 \log \Gamma(x) \sin 2\pi k x \, dx = \frac{1}{2\pi k}(E + \log 2\pi k)$$

$$\int_0^1 \log \Gamma(x) \cos 2\pi k x \, dx = \frac{1}{4k}.$$

On a donc à l'intérieur de l'intervalle $o < x < 1$, où la fonction $\log \Gamma(x)$ satisfait aux conditions de Dirichlet,

$$\log \Gamma(x) = A + \sum_{k=1}^\infty \left[\frac{\cos 2\pi k x}{2k} + (E + \log 2\pi k)\frac{\sin 2\pi k x}{\pi k}\right].$$

On peut réduire le second membre à l'aide des formules

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\cos 2\pi k x}{2k} = -\frac{1}{2}\log(2 \sin \pi x), \quad \sum_{k=1}^\infty \frac{\sin 2\pi k x}{\pi k} = \frac{1}{2} - x$$

et calculer la valeur de A en mettant $x = \frac{1}{2}$.

Sur l'influence de l'atmosphère sur les variations diurnes de la declinaison magnétique.

Par

J. LIZNAR.

(Présenté le 12 juin 1925.)

Dans cet article l'auteur revient à son idée, qu'il avait déjà énoncée en 1893 dans son mémoire „Zur Kenntnis der täglichen Periode des Erdmagnetismus", à savoir que les variations diurnes du magnétisme terrestre sont en rélation étroite avec l'état de l'atmosphère. Il veut alors démontrer l'existence de cette rélation pour la déclinaison, ce qui suffit pour qu'on puisse reconnaître sa validité même pour tous les autres éléments du magnétisme terrestre.

L'état de l'atmosphère est caracterisé par la nébulosité du ciel et on y emploie une échelle de 10 termes où 0 signifie le ciel bleu et 10 le ciel tout à fait couvert de nuages. Les numéros 1, 2, . . ., d'autre part, sont réservés pour les cas où un dixième, deux dixième, etc. du ciel sont couverts de nuages.

Les matériaux d'étude consistent, d'une part, dans des enrégistrements météorologiques de la nébulosité pour les années 1879—1889, publiées pour Vienne dans le „Jahrbuch der Zentralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus", d'autre part dans une série d'écarts entre les valeurs de la déclinaison pour chaque heure et entre la valeur moyenne diurne de ceux-ci. Ces écarts ont été déduits des enrégistrements photographiques de l'institut de Vienne. Pour la comparaison de ces deux phénomènes on ne s'est pas servi que des jours *a*) à une nébulosité de 8 à 10, *b*) à une nébulosité de 0 à 2. Pour chaque mois de la période considérée on a calculé les moyennes des écarts horaires, dont nous avons parlé, mais seulement pour les jours de la catégorie *a*) resp. *b*) et, de celles-ci, les moyennes de tous les mois du même nom de la toute période 1879—1889. Sur le tableau se trouvent seulement les résultats pour les mois suivants: janvier (hiver), mars (printemps) et juin (été). L'auteur a considéré comme impossible le calcul direct des moyennes des écarts horaires pour tous les jours de tous les mois

du mème nom et de toute la période considérée. A savoir, les variations diurnes du magnétisme terrestre ne dépendent pas seulement de l'état de l'atmosphère, mais aussi par ex. de l'état de l'activité solaire c. à d. de l'existence des taches solaires. Dans les moyennes évaluées directement pour toute la période, l'influence de l'activité solaire se manifesterait d'une façon plus frappante que dans les moyennes mensuelles individuelles, où le nombre de jours caractérisés par une influence évidente des taches solaires était toujours tellement petit qu'il n'était pas nécessaire de les exclure.

Si nous suivons avec attention la marche des écarts horaires pendent les jours d'une petite nébulosité d'une part, et pendent les jours d'une grande nébulosité d'autre part, nous voyons, qu'ils sont tout à fait analogues. Cependent, ils diffèrent les unes des autres par la grandeur des valeurs extrèmes. Les maximums qui ont lieu peu de temps après le midi (1-2 h. p. m.) sont pour les jours d'une grande nébulosité plus grands que pour les jours à une nébulosité petite. Par contre, les minimums de l'avant-midi pour ces jours-là sont plus bas que pour ces jours-ci. Ceci est également évident de la série des différences z-j (z . . . les jours à une grande nébulosité, j . . . à une petite nébulosité).

L'auteur ne veut énoncer aucune hypothése sur les causes qui produisent ses différences dans l'allure diurne de la déclinaison. Mais la dépendence ici prouvée entre les variations diurnes du magnétisme terrestre et l'état de l'atmosphère peut justement servir comme auxiliaire pour la recherche de ces causes.

Sur un groupe d'erreurs et sa correspondance avec la méthode des moindres carrés

Par

V. LÁSKA.

Présenté le 22 Mai 1925.

La méthode des moindres carrés est fondée principalement sur l'énoncé axiomatique

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{[\delta_\varkappa]}{n} \doteq 0 \\ n \doteq \infty \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} \varkappa \\ \lambda \end{matrix}\right\} = 1, 2, \ldots n, \ \varkappa \gtrless \lambda \tag{1}$$

qui est suivi de la condition

$$\frac{[\delta_\varkappa]\,[\delta_\lambda] - [\delta_\varkappa \delta_\lambda]}{n^2} \doteq 0 \tag{2}$$

comme supposition auxiliaire, nécessaire à calculer l'approximation de l'erreur moyenne quadratique. La méthode des moindres carrés suppose alors que pour un nombre quelconque d'erreurs ces deux postulats sont satisfaits et elle est valable avec une approximation d'autant plus grande le mieux ces postulats sont remplis. C'est par cela que nous sommes venus à un ensemble composé des deux collectifs qui ne doivent pas être coexistentes. Pour démontrer tout cela nous pouvons partir d'un groupe d'erreurs d'observation qui satisfait aux conditions

$$[\delta_\varkappa] = 0, \qquad \{\delta_\varkappa \delta_\lambda\} = 0 \qquad \left.\begin{matrix} \varkappa \\ \lambda \end{matrix}\right\} = 1, 2, \ldots n, \varkappa \gtrless \lambda \tag{3}$$

où le symbole en parenthèse est donné par la rélation

$$\{a\, b\} = [a]\,[b] - [ab] \tag{4}$$

L'impossibilité de la coexistence des collectifs (3) résulte de l'équation identique

$$[\delta_\varkappa]^2 = [\delta_\varkappa{}^2] + \{\delta_\varkappa \delta_\lambda\}$$

d'où pour

$$[\delta_\varkappa] = 0, \qquad \{\delta_\varkappa \delta_\lambda\} = 0$$

nous obtenons

$$[\delta_x{}^2] = 0.$$

Mais ce n'est possible que dans le cas où

$$\delta_x = 0$$

et le nombre d'observations est fini. Pour le passage au nombre infini des observations — ce qui est nécessaire dans la théorie des moindres carrés — il faut, pour chaque cas individuel, des considérations particulières.

Parce que l'ensemble (3) est un groupe fondamental pour la méthode des moindres carrés, il en résulte immédiatement que la méthode des moindres carrés ne peut être appliquée que dans le cas où — per approximationem — la deuxième puissance de l'erreur réelle δ^2 est une grandeur que l'on peut négliger à l'égard de la grandeur δ comme un nombre qui est sous la limite de la mésurabilité. Dans la méthode des moindres carrés nous remplaçons cependant

$$\{\delta_x\, \delta_\lambda\}$$

par sa valeur approximative $[\Delta^2]$ et le postulat

$$\{\delta_x\, \delta_\lambda\} = 0$$

par un postulat approximatif

$$[\Delta^2] = min., \tag{5}$$

mais cela se fait a priori et par une manière à peine généralement admissible, parce que chaque collectif représente une théorie propre de sorte que nous obtiendrions pour chacune une autre formule d'approximation de la valeur cherchée. Les collectifs de l'ensemble (3) donnent surtout deux valeurs

$$x_0 = \frac{[x_x]}{n}, \qquad x_1 = x_0 \pm \sqrt{x^2{}_0 - \frac{\{x_x\, x_\lambda\}}{n\,(n-1)}} \tag{6}$$

qui sont égales seulement dans le cas où en même temps

$$x_0 = \sqrt{\frac{\{x_x\, x_\lambda\}}{n\,(n-1)}}. \tag{7}$$

Cela nous ammène à la condition

$$(n-1)\,[x_x{}^2] - n\,[x_x]\,[x_\lambda] + n\,[x_x\, x_\lambda] = 0$$

qui est pour $x_x = x_\lambda$, ce qui répond au postulat sur l'égalité des erreurs à zéro, de la forme

$$[x^2{}_x] - n\,[x_x]^2 = 0 \tag{8}$$

Le moins les observations particulières sont différentes et le plus les erreurs réelles sont petites, d'autant mieux est satisfaite l'équation (8), sous la

supposition qu'il s'agit des erreurs accidentales comme c'est toujours dans la théorie autant que dans la pratique.

Autrement, l'énoncé suivant est valable:

Si la condition (8) *est remplie approximativement, nous obtenons pour la valeur cherchée deux approximations*

$$x_0 = \frac{[x_\varkappa]}{n}, \qquad x' = \sqrt{\frac{[x^2_\varkappa]}{n}},$$

où toujours

$$x' > x.$$

Laquelle de ces deux valeurs nous présente mieux la valeur cherchée, cela dépend de la nature des erreurs. Si l'on peut supposer que les erreurs réelles sont de la nature des erreurs „probables", comme elles sont définies par la théorie classique des probabilités, la première valeur est plus probable au sens courant du mot. Mais si la grandeur des erreurs est proportionnelle à la grandeur des valeurs mésurées, alors la deuxième approximation est plus justifiée. Ce cas se présente par ex. dans le mésurage des diamètres de cercles donnés. La courbe de répartition des erreurs observées n'est pas symétrique, mais elle assigne une asymétrie unilatéralle.

Nos considérations demeurent valables pour la valeur moyenne quelleconque, car si

$$F(x_1, x_2, \ldots . x_n)$$

est une fonction symétrique et dans l'intervalle des valeurs observées uniforme et continue, puis, sous la supposition que dans le même intervalle existe aussi la valeur cherchée, l'équation approximative

$$x \doteq F(x_1, x_2, \ldots x_n) \doteq \frac{[x_\lambda]}{n} + \alpha \frac{\{\delta_\varkappa \delta_\lambda\}}{n} \qquad (9)$$

(où α est un nombre fini) est valable d'autant plus que l'intervalle des valeurs observées est plus petit. En même temps nous voyons que moindre est

$$\{\delta_\varkappa \delta_\lambda\},$$

d'autant moindre est aussi la différence

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n) - \frac{[x]}{n}$$

c. à d. l'écart entre l'arbitraire moyenne ci-dessus définie et la moyenne arithmétique.

La moyenne arithmétique est ainsi la grandeur à laquelle se rapprochent toutes les valeurs moyennes quand le δ devient plus petit, pourvu que le nombre des observations soit d'une telle grandeur qu'il couvre, au moins approximativement, l'intervalle déterminé par des valeurs obser-

vées, de sorte que la courbe de répartition puisse devenir symétrique et pourvu que soit rempli le postulat

$$\frac{\{\delta_n \delta_\lambda\}}{n} \doteq 0 \qquad n \doteq \infty.$$

Autant que les valeurs observées sont presque de la même grandeur, ou, plus précisément, autant que les erreurs sont faibles, la différence des deux moyennes

$$\frac{[x_n]}{n} \text{ et } \sqrt{\frac{[x_n{}^2]}{n}}$$

reste aussi faible; autrement, quand les erreurs sont comparables en grandeur avec la valeur cherchée, la méthode des moindres carrés perd sa justification, sans que ce fait, confirmé par la pratique multiple, résulte d'une manière quelleconque de la théorie du calcul des probabilités. Nos considérations en donnent la cause.

Il en résulte en même temps ceci: Si les valeurs observées des erreurs réelles forment un collectif caractérisé par la courbe symétrique de répartition et mesurable par l'algorithme de la théorie classique, alors on doit nécessairement se servir de la méthode des moindres carrés au sens courant du mot. L'expérience nous montre que ce cas se présente toujours dans la métronomie géometrique des longueurs et des angles.

Mais si la courbe de répartition est asymétrique de sorte qu'aux valeurs observées plus grandes est coordonné aussi un nombre plus grand d'observations, puis la valeur cherchée se trouve le plus probablement entre les valeurs

$$\frac{[x_n]}{n} \text{ et } \sqrt{\frac{[x_n{}^2]}{n}}$$

et elle est d'autant plus approchée à la deuxième valeur que le maximum de la courbe de répartition se trouve plus du côté des valeurs croissantes. Dans le cas opposé, où la courbe de répartition est asymétrique dans la direction opposée, la valeur cherchée se trouve aussi à gauche de la moyenne arithmétique et se rapproche d'autant plus de la moyenne géometrique

$$\sqrt[n]{x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_\eta}$$

que le maximum de la courbe se rapproche de l'axe de coordonnées. Dans la photométrie, où d'avance on peut s'attendre, d'après la loi de Fechner, à quelque chose semblable, la moyenne arithmétique est abandonnée depuis longtemps. A cette affirmation, nous pouvons parvenir directement en remplaçant les valeurs observées dans les considérations de la théorie classique des erreurs par leurs logarithmes.

Ces considérations ne sont d'une importance que dans le cas où la courbe de répartition des valeurs observées ne diffère pas beaucoup de la courbe de répartition des erreurs réelles. C'est toujours le cas quand les valeurs des erreurs sont suffisamment petites comparées aux valeurs observées.

Dans le cas de la fonction linéaire de deux valeurs cherchées

$$\lambda_\varkappa \equiv a_\varkappa x + b_\varkappa y + c_\varkappa = 0, \quad \varkappa = 1, 2, \ldots . n$$

ce qui est très fréquent, la méthode des moindres carrés détermine les valeurs dites „les plus probables" par les équations normales

$$\begin{aligned} [a\,a]\,X_1 + [a\,b]\,Y_1 + [a\,c] &= 0 \\ [a\,b]\,X_1 + [b\,b]\,Y_1 + [b\,c] &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Nous obtenons ces équations en attachant, conformément au postulat

$$[(a\,x + b\,y + c)^2] = min.,$$

aux équations du type $\lambda\varkappa$ a priori des poids, dont l'admissibilité résulte seulement du postulat (5) et n'est point évidente. Du groupe (3) nous obtenons au lieu des équations normales de la théorie classique des erreurs un système correspondant aux conditions

$$\begin{aligned} &[a_\varkappa]\,X_2 + [b_\varkappa]\,Y_2 + [c_\varkappa] = 0 \\ &\{a_\varkappa\ a_\lambda\}\,X_2^2 + 2\{a_\varkappa\ b_\lambda\}\,X_2\,Y_2 + \{b_\varkappa\ b_\lambda\}\,Y_2^2 \\ &+ 2\{a_\varkappa\ c_\lambda\}\,X_2 + 2\{b_\varkappa\ c_\lambda\}\,Y_2 + \{c_\varkappa\ c_\lambda\} = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Pour ce système est valable tout ce qui était dit des équations (3). La première de ces équations nous présente dans l'interprétation géométrique une droite, la deuxième une conique, dont le centre est donné par les équations

$$\begin{aligned} \{a_\varkappa\ a_\lambda\}\,X_3 + \{a_\varkappa\ b_\lambda\}\,Y_3 + \{a_\varkappa\ c_\lambda\} &= 0 \\ \{a_\varkappa\ b_\lambda\}\,X_3 + \{b_\varkappa\ b_\lambda\}\,Y_3 + \{b_\varkappa\ c_\lambda\} &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Si la droite (11) passe par le centre de la conique, alors

$$[a_\varkappa]\,X_3 + [b_\varkappa]\,Y_3 + [c_\varkappa] = 0 \tag{13}$$

La condition en est que

$$\begin{vmatrix} \{a_\varkappa\ a_\lambda\} & \{a_\varkappa\ b_\lambda\} & \{a_\varkappa\ c_\lambda\} \\ \{a_\varkappa\ b_\lambda\} & \{b_\varkappa\ b_\lambda\} & \{b_\varkappa\ c_\lambda\} \\ [a_\varkappa] & [b_\lambda] & [c_\varkappa] \end{vmatrix} = 0$$

En multipliant l'équation (13) successivement par

$$[a_\varkappa],\ [b_\varkappa],\ [c_\varkappa]$$

et en ajoutant les produits à la deuxième des équations (11), nous obtenons

$$\begin{aligned} [a\,a]\,X_3 + [a\,b]\,Y_3 + [a\,c] &= 0 \\ [a\,b]\,X_3 + [b\,b]\,Y_3 + [b\,c] &= 0 \end{aligned}$$

ce qui, toutefois, veut dire que

$$X_3 = X_1 \ , \ Y_3 = Y_1,$$

ou que le point déterminé par les équations normales se confond avec le centre de la conique. Nous avons ainsi l'énoncé suivant:

Si la droite (11) passe par le centre de la conique, le point d'intersection des droites données par les équations normales coincide avec ce centre. Comme cette situation n'a lieu que si le principe de la méthode des moindres carrés, c. a d. le postulat

$$[\lambda^2] = min.,$$

est satisfait, elle représente géométriquement la condition de l'existence du collectif

$$[\lambda] = 0.$$

L'existence du collectif

$$\{\lambda_x \ \lambda_\lambda\} = 0$$

nous donne par rapport à l'équation quadratique (11) deux paires de valeurs X et Y, qui peuvent être soit réelles soit imaginaires. Le point de bissection du segment qui joint ces deux points est toujours réel. Sa distance du point d'intersection des droites données par les équations normales peut alors servir de mesure conventionnelle, pour déterminer jusqu' à quel point les deux collectifs fondamentaux sont satisfaits par le système des valeurs observées donné.

Nous pouvons obtenir une autre mesure, mais moins bonne, par l'expression

$$\frac{[a]\ X_1 + [b]\ Y_1 + [c]}{\sqrt{[a]^2 + [b]^2}}$$

dont le sens géométrique est évident.

Il en résulte ainsi toute une suite de rélations géometriques interessantes, étroitement liées à la méthode des moindres carrés, lesquelles seront traitées, avec un exemple pratique, dans un mémoire particulier.

Sur les groupes G_8, G_{16} et G_{32} de transformations planes quadratiques et sur les systèmes linéaires de courbes d'ordre $4n$ et $8n$ se reproduisant par ces groupes.

Par

B. MACHYTKA.

Présenté le 22 juin 1925.

Dans ma note „Certains groupes d'involutions planes de Jonquière“[1]) je me suis occupé de l'étude du groupe $\mathfrak{G}_{16}$ d'involutions quadratiques et cubiques, qui est parfaitement défini par un groupe de cinq points arbitrairement choisis dans le plan. Ce groupe est remarquable par cela qu'il reproduit ∞^r de courbes d'ordre $6n$ qui ont cinq points multiples de l'ordre $2n$ communs, et qui forment un système linéaire Σ_r^{6n} dont la dimension est $r = \frac{n(n+3)}{2}$.

Dans ce travail, j'ai déjà indiqué qu'il existe une certaine analogie entre $\mathfrak{G}_{16}$ et le groupe G_8, bien connu, d'involutions quadratiques, qui reproduit ∞^2 de quartiques elliptiques planes d'un certain réseau Σ_2^{4}.[2]) Cette analogie est d'autant plus remarquable, que même le groupe G_8 reproduit, comme je vais montrer dans le présent travail, ∞^r de courbes d'ordre $4n$ qui ont deux points multiples d'ordre $2n$ communs et qui forment un système linéaire Σ_r^{4n}, où $r = \frac{n(n+3)}{2}$. Cette analogie est la conséquence du fait que les quatre coniques directices des inversions quadratiques du groupe G_8 jouent le même rôle comme les cinq cubiques directrices des inversions cubiques du groupe $\mathfrak{G}_{16}$, parce qu'elles mènent aux covariantes identiques de ces groupes.

---

[1]) Publications de la faculté des sciences de l'Université Charles. Prague, 1925, No. 27.

[2]) E. Ciani: Le quartiche piane invertibili. Gior. di matematiche, vol. LVII, 1917. B. Bydžovský: Kvadratické transformace obecné rovinné křivky bikvadratické rodu 1. Rozpravy Akademie tř. II. R. XXIX., No. 17. (1920).

Le but de ce travail est donc de donner la théorie et la construction complète, dans le plan, du groupe G_8 et d'autres groupes G_{16} et G_{32} de transformations quadratiques, à l'existence et la composition desquels M. B. Bydžovský est arrivé par une autre manière.[3]) Je vais montrer, premièrement, que le groupe G_{32} reproduit ∞^r de courbes d'ordre $8n$ qui ont deux points multiples d'ordre $4n$ communs et forment un système linéaire Σ_r^{8n}, où $r = \frac{n(n+3)}{2}$, alors, pour $n = 1$, ∞^2 de courbes du 8ième degré d'un certain réseau Σ_2^8; deuxièmement, que chaque groupe G_{16} (le groupe G_{32} contient trois sous-groupes G_{16}) reproduit une seule cubique et ∞^ϱ de courbes d'ordre $4n$ qui ont deux points multiples d'ordre $2n$ communs et forment un certain système linéaire Σ_ϱ^{4n}, où la dimension $\varrho = \frac{n^2}{4} + n$, si le nombre n est pair, et $\varrho = \frac{n^2-1}{4} + n$ si n est impair.

I. Le groupe G_8 et les systèmes linéaires de courbes d'ordre $4n$ se reproduisant par ce groupe.

1. Un groupe de cinq points α, β, γ_1, γ_2, γ_3, choisis arbitrairement dans le plan, détermine un groupe G_4 de transformations quadratiques qui se compose, évidemment en plus de l'identité, de trois involutions quadratiques de la 1ière classe T_i $(\alpha, \beta, \gamma_i)$, $i = 1, 2, 3$, dont les triangles principaux $(\alpha, \beta, \gamma_i)$ ont deux sommets α, β communs, tandis que les troisièmes sommets γ_h, γ_k des transformations T_h et T_k forment un couple de points dans la troisième involution restante T_i.

J'ai trouvé des propriétés caractéristiques suivantes du groupe G_4: [4])

„Les transformations du groupe G_4 reproduisent les cubiques K_γ^3 d'un certain faisceau Σ_1^3, dont la base se compose de cinq points donnés $(\alpha, \beta, \gamma_i)$ et de quatre points σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, c'est à dire de quatre points de coïncidence de l'involution quadratique $T(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ qui est déterminée par les points principaux (γ_i) et par le couple de points correspondants α, β. Les cubiques K_γ^3 du faisceau Σ_1^3 sont remarquables par ce que les points (σ) forment sur ces courbes un quadruple de points conjugués possédant le même point tangentiel γ, c'est à dire le point d'intersection de la droite $\overline{\alpha\beta}$ avec la cubique K_γ^3, qui varie avec la courbe. Les transformations du groupe G_4 engendrent sur les cubiques K_γ^3 trois correspondances birationnelles de la deuxième espèce, donc toutes les trois corre-

---

[3]) B. Bydžovský: Sur les transformations quadratiques reproduisant une quartique elliptique plane. Comptes Rendus du Congrès international des mathématiciens, Strasbourg, 1920. Remarque sur les quartiques planes spéciales. Časopis mathematiky a fysiky, LIII, (1923), No 1. Sur l'application du principe de la projection à la théorie des correspondances géométriques. Časopis math. a fysiky, LII., 1922, No 1.

[4]) Certains groupes d'involutions planes de Jonquière. Publications de la faculté des sciences de l'Université Charles. Prague, 1925, No. 27.

spondances binaire-cycliques $E_{(2)}$, de sorte que les quadruples de points conjugués des cubiques K_γ^3 forment les groupes de points du groupe G_4. Le groupe G_4 reproduit alors le quadruple (σ) qui a le triangle polaire $\underline{\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3}$; les points σ_m, σ_n de ce quadruple, qui sont situés sur la droite $\gamma_h\,\sigma_m\,\sigma_n \equiv p_{h,\,mn}$, forment un couple de points correspondants de la transformation T_h, de sorte que la droite $p_{h,\,mn}$, c'est à dire la droite de coïncidence de la transformation T_h, contient deux points de coïncidence de cette transformation T_h, qui forment un couple de points correpondants dans les autres transformations restantes T_k, T_l."

2. Désignons par $S_1^{(1)}$, $S_2^{(1)}$ les points de coïncidence de l'involution T_1 qui sont situés sur la droite $p_{1,14}$, et par $S_3^{(1)}$, $S_4^{(1)}$ ceux qui sont situés sur $p_{1,23}$; désignons de la même façon par $S_1^{(2)}$, $S_2^{(2)}$ resp. $S_3^{(2)}$, $S_4^{(2)}$ les points de coïncidence de l'involution T_2 qui sont situés sur $p_{2,13}$ resp. $p_{2,24}$ et par analogie par $S_1^{(3)}$, $S_2^{(3)}$ resp. $S_3^{(3)}$, $S_4^{(3)}$ ceux de l'involution T_3, qui se trouvent sur $p_{3,34}$ resp. $p_{3,12}$. Il y aura:

$$(S_1^{(1)}\,S_2^{(1)}\,\sigma_1\,\sigma_4) = -1 = (S_3^{(1)}\,S_4^{(1)}\,\sigma_2\,\sigma_3) = (S_1^{(2)}\,S_2^{(2)}\,\sigma_1\,\sigma_3) = \ldots$$

Désignons ensuite par K_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ la conique, qui passe par les points α, β et qui a pour triangle polaire celui, que nous obtiendrons en supprimant le sommet σ_i dans le quadruple (σ). Alors sur chaque conique K sont situés les groupes de huit points suivants:

1)
$$\begin{aligned}
&K_1\,(\alpha,\,\beta;\ S_3^{(1)},\ S_4^{(1)};\ S_3^{(2)},\ S_4^{(2)};\ S_1^{(3)},\ S_2^{(3)}),\\
&K_2\,(\alpha,\,\beta;\ S_1^{(1)},\ S_2^{(1)};\ S_1^{(2)},\ S_2^{(2)};\ S_1^{(3)},\ S_2^{(3)}),\\
&K_3\,(\alpha,\,\beta;\ S_1^{(1)},\ S_2^{(1)};\ S_3^{(2)},\ S_4^{(2)};\ S_3^{(3)},\ S_4^{(3)}),\\
&K_4\,(\alpha,\,\beta;\ S_3^{(1)},\ S_4^{(1)};\ S_1^{(2)},\ S_2^{(2)};\ S_3^{(3)},\ S_4^{(3)}).
\end{aligned}$$

De là nous trouvons aisément que les transformations du groupe G_4 reproduisent ces quatre coniques K_i.

Observons maintenant de plus près une de ces coniques, p. ex. la conique K_1. Sur cette conique K_1 la transformation T_1 engendre l'involution $g_2^1\,(\sigma_4)$ qui a le centre σ_4 et les points doubles $S_3^{(1)}$, $S_4^{(1)}$; d'une façon analogue la transformation T_2 engendre sur cette courbe l'involution $g_2^1\,(\sigma_3)$ qui a les points doubles $S_3^{(2)}$, $S_4^{(2)}$, et finalement la transformation T_3 engendre l'involution $g_2^1\,(\sigma_2)$ qui a les points doubles $S_1^{(3)}$, $S_2^{(3)}$. De là il s'ensuit aisément que le point σ_1 est le pôle de la droite $\overline{\alpha\,\beta}$ par rapport à la conique K_1.

Au point P, arbitrairement choisi sur la conique K_1, correspondent par les transformations T_1, T_2, T_3 respectivement les points P_1, P_2, P_3; le quadruple de points (P) est situé sur la conique K_1 et, puisque ces transformations forment le groupe G_4, nous avons:

$$\sigma_4 \equiv (\overline{P\,P_1}\,.\,\overline{P_2\,P_3}),\ \sigma_3 \equiv (\overline{P\,P_2}\,.\,\overline{P_1\,P_3}),\ \sigma_2 \equiv (\overline{P\,P_3}\,.\,\overline{P_1\,P_2}),$$

comme nous voulons écrire le fait que σ_4 est le point d'intersection des droites $\overline{P\,P_1}$ et $\overline{P_2\,P_3}$, etc. Mais par le quadruple de points (P) passe aussi

une certaine cubique K_γ^3 du faisceau $\Sigma_1{}^3$, sur laquelle ce groupe de points forme le quadruple de points conjugués qui a le triangle polaire $\sigma_2\,\sigma_3\,\sigma_4$. D'après le théorème bien connu, qui se rattache aux cubiques planes, nous voyons, que les points du quadruple (P) possèdent le même point tangentiel σ_1 qui complète le groupe de trois points σ_2, σ_3, σ_4 au quadruple de points conjugués. La conique K_1 est alors le lieu géométrique de points de contact des tangentes menées par le point σ_1 aux cubiques K_γ^3 du faisceau $\Sigma_1{}^3$. Il s'ensuit que chaque cubique K_γ^3 du faisceau se reproduit par l'inversion quadratique $J_i\,(\sigma_i, K_i)$ qui a le centre σ_i, la conique directrice K_i et le triangle principal $(\sigma_i\,\alpha\,\beta)$.

Une cubique générale plane C^3 peut être reproduite par ∞^2 d'inversions quadratiques. Le centre σ d'une telle inversion peut être choisi arbitrairement sur la courbe C^3 et la conique directrice appartient alors au faisceau des coniques dont la base (A) se compose de quatre points conjugués de la cubique C^3 qui ont le même point tangentiel σ. Le lieu des points de contact α, β des tangentes menées d'un point fixe σ aux coniques du faisceau (A) est, en effet, une cubique C^3 admettant (A) comme un quadruple de points conjugués qui ont le même point tangentiel σ. Les couples des points α, β forment sur la courbe C^3 l'involution centrale $g_2{}^1$, dont le centre est le point tangentiel du point σ, c. à d. le deuxième point tangentiel du quadruple (A). Par conséquent, les triples de points qui sont donnés, sur la courbe C^3, à l'aide des fonctions elliptiques par la relation $2\,\sigma \equiv \alpha + \beta$ (modd. per), déterminent, comme points principaux, toutes les inversions quadratiques qui reproduisent la cubique C^3.

Les quatre inversions quadratiques $J_i\,(\sigma_i, K_i)$ satisfont complètement ces conditions à l'égard de toutes les courbes K_γ^3; — la droite $\overline{\alpha\,\beta}$ coupe chaque cubique K_γ^3 au point γ qui est toujours sur cette courbe le point tangentiel du point σ_i.

Si nous adjoignons maintenant l'inversion quadratique $J_1\,(\sigma_1, K_1)$ au groupe G_4, ce groupe s'élargit au groupe G_8 des involutions quadratiques qui contient trois involutions de la classe $1^{\text{ière}}$ T_l et quatre inversions quadratiques $J_i\,(\sigma_i, K_i)$. Or, si la droite $\sigma_h\,\sigma_k$ passe par le point γ_l, on trouve facilement la relation

$$2) \qquad T_l\;J_h \equiv J_k \equiv J_h\;T_l.$$

Nous avons ainsi le théorème:

„*Les cubiques K_γ^3 du faisceau $\Sigma_1{}^3$ se reproduisent par le groupe commutatif G_8 d'involutions quadratiques, qui contient trois involutions de la classe $1^{\text{ière}}$ $T_l\,(\alpha, \beta, \gamma_l)$ et quatre inversions quadratiques $J_i\,(\sigma_i, K_i)$. Le groupe G_8 comprend outre le sous-groupe fondamental central G_4 les autres six sous-groupes du $4^{\text{ième}}$ degré Q_4, dont chacune se compose de deux inversions J_h, J_k et d'une involution de la classe $1^{\text{ière}}$ T_l.*“

Les transformations du groupe G_8 reproduisent chaque conique K_h en engendrant sur cette courbe trois involutions centrales $g_2{}^1\,(\sigma_k)$, où $k \gtrless h$,

de sorte que l'inversion J_k et la transformation T_l (voir 2) engendrent la même involution $g_2^1\,(\sigma_k)$.

Au point M, arbitrairement choisi dans le plan, correspondent par les transformations du groupe G_8 les points M, M_1, M_2, M_3, M^0, M_1^0, M_2^0, M_3^0, qui sont situés sur la même cubique K_γ^3 du faisceau Σ_1^3. Ce groupe de 8 points se compose de deux quadruples de points conjugués (M) et (M^0) qui forment avec le quadruple (σ) trois quadruples de points conjugués connexes. On obtient le quadruple de points (M^0) en projetant le quadruple (M) sur la cubique K_γ^3 (M) d'un point quelconque du quadruple (σ). Les points tangentiels γ, μ, μ^0 des quadruples (σ), (M), (M^0) sur $K_\gamma^3\,(M)$ sont situés toujours sur une droite. Si le point M se trouve sur la conique K_i, nous avons $\mu \equiv \mu^0 \equiv \sigma_i$; le quadruple appartenant $(M) \equiv (M^0)$ est invariable au groupe G_8. Si le point M se trouve sur deux coniques K_h, K_k, le quadruple (M) se réduit dans une paire de points de coïncidence de l'involution T_l mentionnée plus haut.

Observons maintenant de plus près les quatre coniques K_i.

Chaque groupe de trois coniques K_h, K_k, K_m du groupe (K) détermine un réseau composé par des coniques invariantes par rapport à cette inversion J_n du groupe G_8 qui a la conique directrice K_n, c. à d. la conique restante du groupe (K). Le „Jacobien" de ce réseau (K_h, K_k, K_m) se compose de la conique K_n et de la droite $p \equiv \overline{\alpha\,\beta}$.

Deux coniques K_h, K_k déterminent un faisceau qui se compose de coniques invariantes par rapport aux inversions J_m et J_n et par suite aussi par rapport à la transformation $J_m \,.\, J_n \equiv T_l$. Chaque sous-groupe Q_4 (T_l, J_m, J_n) reproduit alors les coniques du faisceau (K_h, K_k), tandis que les autres transformations du groupe G_8 engendrent, dans ce faisceau, l'involution quadratique ayant comme éléments doubles les coniques K_h et K_k.

Les transformations du groupe G_8 reproduisent alors les courbes réductibles du faisceau

$$3) \qquad f_h^2 - \lambda\, f_k^2 = \emptyset,$$

où $f_h = \emptyset$ désigne l'équation homogène de la conique K_h du groupe (K).

Considérons maintenant deux de ces faisceaux, p. ex. les faisceaux

$$4) \qquad f_1^2 - \lambda\, f_2^2 = \emptyset \quad \text{et} \quad f_1^2 - \mu\, f_3^2 = \emptyset.$$

Les homographies perspectives

$$5) \qquad a\,\lambda\,\mu + b\,\mu + c\,\lambda = \emptyset$$

de ces deux faisceaux nous mènent au réseau Σ_2^4 des courbes du $4^{\text{ième}}$ degré

$$6) \qquad a\, f_1^2 + b\, f_2^2 + c\, f_3^2 = \emptyset$$

qui ont deux points doubles α, β communs et qui se reproduisent par les transformations du groupe G_8.

Par deux points P, Q, arbitrairement choisis dans le plan, c. à d. par deux groupes de 8 points $[P]$ et $[Q]$ du groupe G_8, parcourt une seule

courbe du réseau. Ayant égard à la circonstance, que deux quartiques planes qui ont deux points doubles α, β communs, se coupent seulement dans 8 autres points, on voit que deux faisceaux quelconques du groupe 3) nous mènent nécessairement au même réseau $\Sigma_2{}^4$ donné par la relation 6). On obtient ainsi le théorème:

„*Les transformations du groupe* G_8 *reproduisent* ∞^2 *des quartiques elliptiques planes qui ont deux points doubles* α, β *communs et qui forment le réseau* $\Sigma_2{}^4$ *exprimé par la relation 6). Le réseau contient quatre coniques doubles* $f_i{}^2 = \emptyset$, $(i = 1, 2, 3, 4)$[5]) *et sept faisceaux composés de courbes réductibles; ce sont: six faisceaux 3) composés des paires de coniques et un faisceau* $\Sigma_1{}^3$ *de cubiques* K_γ^3 *lié avec la droite* $\overline{\alpha\,\beta}$. *Le „Jacobien" de ce réseau* $\Sigma_2{}^4$ *se compose de quatre coniques* K_i *et de la droite* $\overline{\alpha\,\beta}$."

Dans le faisceau $f_h{}^2 - \lambda\, f_k{}^2 = \emptyset$, dont la base se compose des points α, β et de deux points de coïncidence de l'involution T_l, se trouve évidemment la courbe composée de quatre droites p_l, q_l, u_l, r_l, c. à d. de quatre droites de coïncidence de l'involution T_l.

Alors le réseau $\Sigma_2{}^4$ *peut être exprimé par la relation*

$$7) \qquad c_1\,\varphi_1 + c_2\,\varphi_2 + c_3\,\varphi_3 = \emptyset,$$

où $\varphi_i = \emptyset$ *désigne l'équation de la courbe* $(p_i\,q_i\,u_i\,r_i)$ *composée de quatre droites de coïncidence de l'involution* T_i *passant par les points* α *resp.* β.

Il est évident, que par le procédé que nous avons suivi, on arrive à d'autres courbes invariantes par rapport au groupe G_8, généralement à des courbes K^{4n} du degré $4n$ qui ont dans α, β les points multiples d'ordre $2n$.

Une courbe générale K^{4n}, invariante par rapport au groupe G_8, qui a dans α, β les points multiples d'ordre $2n$, crée parmi les courbes de deux faisceaux

$$f_2{}^2 - \xi\, f_1{}^2 = \emptyset, \qquad f_3{}^2 - \mu\, f_1{}^2 = \emptyset$$

une correspondance algébrique $[n, n]$.

Une courbe variable, arbitrairement choisie dans le premier faisceau, coupe la courbe K^{4n} en tout en $8n$ points d'intersection variables, qui forment nécessairement n groupes de huit points du groupe G_8; par chacun de ces groupes de points parcourt une seule courbe du deuxième faisceau, et vice versa. Ainsi nous sommes arrivés à une correspondance $[n, n]$. Cependant cette correspondance n'est pas générale, parce que à la courbe $f_1{}^2 = \emptyset$, qui est commune aux deux faisceaux, et qui n'est comptée que dans un faisceau, correspond au deuxième faisceau la même courbe $f_1{}^2 = \emptyset$, comptée n-fois, dans son ordre de multiplicité. On peut alors exprimer cette correspondance par la relation

---

[5]) Alors il existe toujours trois constantes a_1, a_2, a_3 telles, que l'on a

$$f_4{}^2 \equiv a_1 f_1{}^2 + a_2 f_2{}^2 + a_3 f_3{}^2.$$

$$\sum_{i,\,k=0}^{n} c_{ik}\,\xi^i\,\eta^k = \emptyset, \quad \text{où} \quad i+k \leqq n,$$

qui contient $\frac{n\,(n+3)}{2}$ des constantes essentielles.

On arrive ainsi à une courbe K^{4n} définie par l'équation

$$\Sigma\, c_{ik} f_1^{2\,(n-i-k)}\, f_2^{2\,i}\, f_3^{2\,k} = \emptyset, \quad \text{où} \quad i+k \leqq n,$$

c. à d. par l'équation homogène du degré n par rapport à f_1^2, f_2^2, f_3^2.

On obtient ainsi le théorème:

„*Les transformations du groupe* G_8 *reproduisent généralement* ∞^r *des courbes d'ordre* $4n$, *qui ont deux points multiples de l'ordre* $2n$ *communs, — ce sont les points* α, β, *— et qui forment un système linéaire* Σ_r^{4n}, *où la dimension* $r = \frac{n\,(n+3)}{2}$. *Ce système* Σ_r^{4n} *est défini par l'équation*

$$F\,(f_1^2, f_2^2, f_3^2) = \emptyset, \quad \text{où} \quad \psi\,(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \emptyset,$$

où F *resp.* ψ *désigne une forme ternaire de l'ordre* n *par rapport à* f_1^2, f_2^2, f_3^2 *resp.* φ_1, φ_2, φ_3.“

II. Les groupes G_{16}.

1. Etudions maintenant le problème de trouver d'autres involutions quadratiques qui, adjointes au groupe G_8, élargissent celui-ci de nouveau au groupe de fransformations quadratiques.

Tout d'abord il est évident qu'une telle involution quadratique — que ce soit l'involution de la première classe ou l'inversion — qui doit avoir α et β comme les points principaux, ne peut reproduire toutes les cubiques K_γ^3 du faisceau Σ_1^3, mais l'une d'elles seulement, et sur celle-ci ne peut engendrer que l'involution centrique.

Quand il s'agit de l'involution quadratique de la première classe, ses points principaux sont conjugués sur la cubique respective K_γ^3 de sorte que sur cette courbe les paramètres elliptiques des points α, β satisfont la relation

1) $$2\,\alpha \equiv 2\,\beta\,.\ [\text{modd. per.}]$$

S'il s'agit de l'inversion quadratique, alors son centre est p. ex. le point α et les points principaux restants β, β' doivent satisfaire la condition

2) $$2\,\alpha \equiv \beta + \beta'.$$

Les points α, β, γ_i sur chaque cubique K_γ^3 du faisceau Σ_1^3 satisfont la relation

$$\alpha + \beta + \gamma_i \equiv \frac{w}{2},$$

où w signifie une période principale, de sorte que la cubique, dont il s'agit, est caractérisée, eu égard à la condition 1), par la relation

3) $$2\,\alpha + \gamma_i \equiv \emptyset.$$

Le faisceau Σ_1^3 contient donc seulement trois cubiques $K_{\gamma'}^3$, $K_{\gamma''}^3$, $K_{\gamma'''}^3$, auxquelles dans nos recherches nous pouvons nous restreindre. Sur chacune d'elles les points α et β sont conjugués, ayant commun le point tangentiel γ_1 resp. γ_2 resp. γ_3, selon s'il s'agit de la cubique $K_{\gamma'}^3$ resp. $K_{\gamma''}^3$ resp. $K_{\gamma'''}^3$.

2. Etudions maintenant la première de ces courbes $K_{\gamma'}^3$ qui coupe la droite $\overline{\alpha\,\beta}$ au point γ' qui est conjugué avec les points γ_1, γ_2, γ_3. Projetons maintenant le quadruple de points conjugués γ', γ_1, γ_2, γ_3 du point β sur $K_{\gamma'}^3$ au quadruple de points conjugués α, β, γ_2', γ_3' qui sont formés sur cette courbe dans le même ordre par les transformations du sous-groupe G_4. Appelons de tels quadruples conjugués, pour la brièveté, „quadruples isologiques“. Si nous projetons du point α sur $K_{\gamma'}^3$ le quadruple γ_1, γ', γ_3, γ_2, qui est isologique avec le premier, nous obtenons nécessairement le même quadruple α, β, γ_2', γ_3', car la droite $\overline{\alpha\,\gamma_1}$ est tangente à la courbe $K_{\gamma'}^3$ en α. Il y a donc:

4) $$\gamma_2' \equiv (\overline{\beta\,\gamma_2} \,.\, \overline{\alpha\,\gamma_3}), \qquad \gamma_3' \equiv (\overline{\beta\,\gamma_3} \,.\, \overline{\alpha\,\gamma_2}) \text{ (voir la figure).}$$

Les points de contact α, β, γ_2', γ_3' des tangentes menées du point γ_1 à la courbe $K_{\gamma'}^3$ forment un quadruple de points conjugués, dont le triangle polaire a des sommets qui complètent le point γ_1 au quadruple de points conjugués de la cubique $K_{\gamma'}^3$. Ce triangle a donc nécessairement, en dehors des sommets γ_2 et γ_3, aussi le sommet γ'. Ainsi nous avons obtenu la construction de ce point:

5) $$\gamma' \equiv (\overline{\alpha\,\beta} \,.\, \overline{\gamma_2'\,\gamma_3'}).$$

Par là nous avons déterminé toutes les autres involutions quadratiques qui ont les points principaux α, β et reproduisent la cubique $K_{\gamma'}^3$. Ce sont tout d'abord les involutions de la classe première T_2' $(\alpha, \beta, \gamma_2')$ et T_3' $(\alpha, \beta\,\gamma_3')$, dont la première engendre sur la courbe $K_{\gamma'}^3$ l'involution centrale g_2^1 (γ_3') et contient les paires de points correspondants suivants: γ_1, γ_3'; α, γ_2; β, γ_3; γ', γ_2'. La deuxième T_3' engendre sur $K_{\gamma'}^3$ l'involution centrale g_2^1 (γ_2') et contient donc les paires de points: γ_1, γ_2'; α, γ_3; β, γ_2; γ', γ_3'. *Puis c'est l'inversion quadratique I_α' au centre α* et dont les autres points principaux β, β' doivent satisfaire la condition 2). Il s'ensuit des relations 1) et 2) que $\beta' \equiv \beta$. Les deux autres points principaux de cette inversion sont infiniment voisins sur $K_{\gamma'}^3$ et la droite $\overline{\beta\,\beta'}$, c. à d. la droite principale correspondant au centre α, est la tangente de la courbe $K_{\gamma'}^3$ au point β et parcourt donc par le point γ_1. Au point β correspond la droite $\overline{\alpha\,\beta}$. *La conique directrice de cette inversion est donc composée de deux droites p_1, q_1 parcourant le point β.* On trouve aisément que ce sont des droites de coïncidence de l'involution T_1. En échangeant dans les recherches précédentes les points α et β, on obtient *une autre inversion I_β' qui a le centre β et dont la conique directrice est composée de deux droites de coïncidence u_1, r_1 de la transformation T_1 parcourant le point α; au centre β correspond dans cette inversion la droite $\overline{\alpha\,\gamma_1}$, c. à d. la tangente de la courbe $K_{\gamma'}^3$ au point α.*

On a donc trouvé en tout quatre nouvelles involutions quadratiques qui reproduisent la cubique $K_{\gamma'}^3$ et ont les points principaux α et β. Ce sont deux involutions de la classe première T_2' $(\alpha, \beta, \gamma_2')$ et T_3' $(\alpha, \beta, \gamma_3')$ et deux inversions quadratiques I_α' et I_β'. Ces quatre involutions forment évidemment avec le sous-groupe central G_4 un nouveau groupe commutatif R_8'.

Les transformations T_2', T_3', I_α', I_β' engendrent sur $K_{\gamma'}^3$ des involutions centrales, dont les centres γ_3', γ_2', α, β forment sur la courbe le quadruple de points conjugués. Le produit de deux quelconques de ces quatre transformations donne une transformation quadratique qui a les points principaux α et β et engendre sur $K_{\gamma'}^3$ la correspondance involutoire de la deuxième espèce $E_{(2)}$, alors une involution quadratique T_i du groupe G_4.

Le groupe R_8' contient 7 sous-groupes du 4e degré; ce sont: G_4; $1, T_1, T_2', T_3'$; $1, T_1, I_\alpha', I_\beta'$; $1, T_2, I_\alpha', T_3'$; $1, T_2, I_\beta', T_2'$; $1, T_3, I_\alpha', T_2'$; $1, T_3, I_\beta', T_3'$. *Deux transformations quelconques du groupe R_8' mènent à l'un de ces sous-groupes.*

3. Désignons par le symbole V' l'ensemble de transformations I_α', I_β', T_2', T_3'. On trouve aisément que les transformations de l'ensemble V' élargissent le groupe G_8 en groupe G_{16}' des transformations quadratiques qui reproduisent la cubique $K_{\gamma'}^3$.

Nous trouverons qu'il en est ainsi après avoir établi la relation entre les inversions quadratiques J_i du groupe G_8 et les transformations de l'ensemble V'.

Les inversions J_i engendrent sur $K_{\gamma'}^3$ des involutions centrales dont les centres forment le quadruple de points conjugués (σ); les transformations V' engendrent de même sur la courbe les involutions centrales dont les centres α, β, γ_3', γ_2' forment le quadruple de points conjugués qui ont le même point tangentiel γ_1; — désignons ce quadruple brièvement (α). S_i A_m signifie la transformation quelconque de l'ensemble V' qui engendre sur la courbe $K_{\gamma'}^3$ l'involution g_2^1 (α_m), où α_m est le point respectif du groupe (α), alors le produit $A_m \,.\, J_i$ donne une transformation quadratique avec les points principaux α, β, qui reproduit la cubique $K_{\gamma'}^3$ en engendrant sur celle-ci la correspondance de la deuxième espèce

$$E\,(u, u'') \equiv g_2^1\,(\alpha_m) \,.\, g_2^1\,(\sigma_i) \equiv E\,(\sigma_i, \alpha_m),$$

car d'après les relations

$$u + u' + \alpha_m \equiv 0, \qquad u' + u'' + \sigma_i \equiv \emptyset,$$

il s'ensuit

$$u - u'' \equiv \sigma_i - \alpha_m.$$

La transformation T_1 transforme le point σ_i en σ_h, où le point σ_h doit satisfaire à la relation

$$\sigma_i + \sigma_h + \gamma_1 \equiv \emptyset.$$

Parce que nous avons en outre la relation

$$2\,\alpha_m + \gamma_1 \equiv \emptyset,$$

il s'ensuit nécessairement

$$\sigma_i - \alpha_m \equiv \alpha_m - \sigma_h,$$

c. à d. la correspondance $E(\sigma_i, \alpha_m)$ est cyclique au 4ième degré de telle sorte que sa deuxième puissance donne la correspondance $E_{(2)}$ qui est engendrée sur $K^3_{\gamma'}$ par l'involution T_1.

Le produit donné par le symbole $(V' J_i)$ *donne alors toujours les transformations quadratiques cycliques au 4ième degré qui reproduisent la cubique* $K^3_{\gamma'}$ *en engendrant sur celle-ci les correspondances univoques cycliques* $E_{(4)}$. *Le carré* $(V' J_i)^2$ *donne toujours l'involution* T_1.

Ainsi nous trouvons aisément deux transformations quadratiques cycliques au 4ième degré essentiellement différentes et leurs inversions.

Avant de déterminer les points principaux de ces transformations, projetons le groupe des points σ_4, σ_1, σ_2, σ_3 du point β sur $K^3_{\gamma'}$ en groupe σ_4', σ_1', σ_2', σ_3'. Ainsi nous obtenons sur cette courbe trois quadruples de points conjugués, connexes et isologiques avec leurs points tangentiels respectifs; ce sont (voir la figure):

6) $\quad (\alpha, \beta, \gamma_2', \gamma_3')\ \gamma_1; \quad (\sigma_4, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\ \gamma'; \quad (\sigma_4', \sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\ \varrho'.$

Parce que trois points de la cubique $K^3_{\gamma'}$ situés dans une droite ont leurs points tangentiels aussi dans une droite, il s'ensuit que ϱ' est le point d'intersection de la droite $\overline{\gamma_1 \gamma'}$ avec $K^3_{\gamma'}$. Mais les points γ', γ_1, γ_2, γ_3 forment sur la courbe $K^3_{\gamma'}$ le quadruple de points conjugués; il y a alors

6′) $$\varrho' \equiv (\overline{\gamma' \gamma_1} \cdot \overline{\gamma_2 \gamma_3}).$$

La configuration des quadruples de points conjugués, connexes et isologique 6) est remarquable par ce que ces 12 points sont situés sur 16 droites dont chacune parcourt par trois points de différents groupes. Si nous désignons par i, h, k, l quatre nombres différents du groupe 4, 1, 2, 3, mais rangés de sorte que les triples de points

7) $$\overline{\sigma_i \sigma_h \gamma_1}, \quad \overline{\sigma_i \sigma_k \gamma_2}, \quad \overline{\sigma_i \sigma_l \gamma_3}$$

sont toujours situés dans les droites, alors les triples de points

8) $$\overline{\beta \sigma_i \sigma_i'}, \quad \overline{\alpha \sigma_i \sigma_h'}, \quad \overline{\gamma_2' \sigma_i \sigma_l'}, \quad \overline{\gamma_3' \sigma_i \sigma_k'}$$

se trouvent aussi sur les droites.

Ayant égard à la configuration ci-dessus et à la circonstance que dans l'inversion J_i les points σ_i', σ_h' correspondent aux points β' et α', c. à d. aux points qui sont sur $K^3_{\gamma'}$ infiniment voisins aux points β, α, alors nous déterminons les points principaux de la transformation donnée par le produit $J_i I_{\alpha'}$ par les relations suivantes:

$\alpha \ldots J_i \ldots \overline{\alpha \sigma_i} \ldots I_{\alpha'} \ldots \overline{\alpha \sigma_i \sigma_h'}$	$\alpha \ldots I_{\alpha'} \ldots \overline{\beta \gamma_1} \ldots J_i \ldots \overline{\alpha \sigma_h \sigma_i'}$
$\beta \ldots J_i \ldots \overline{\beta \sigma_i} \ldots I_{\alpha'} \ldots \overline{\beta \sigma_h \sigma_h'}$	$\beta' \ldots I_{\alpha'} \ldots \overline{\alpha \beta'} \ldots J_i \ldots \overline{\beta \sigma_i \sigma_i'}$
$\sigma_i' \ldots J_i \ldots \overline{\beta'} \ldots I_{\alpha'} \ldots \overline{\alpha \beta}$	$\sigma_h' \ldots I_{\alpha'} \ldots \overline{\sigma_i} \ldots J_i \ldots \overline{\alpha \beta}$
$\sigma_i \ldots J_i \ldots \overline{\alpha \beta} \ldots I_{\alpha'} \ldots \beta$	$\beta \ldots I_{\alpha'} \ldots \overline{\alpha \beta} \ldots J_i \ldots \sigma_i$

Alors le produit $J_i\, I_\alpha'$ *donne une transformation quadratique cyclique au 4ième degré, qui a dans le premier plan les points principaux* α, β, σ_i', *et dans le second les points* β, α, σ_h'. *Ainsi on obtient généralement la relation*

$$9) \qquad J_i\, I_\alpha' \equiv I_\alpha'\, J_h \equiv \mathfrak{T}_{ih} \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \sigma_i' \\ \beta, & \alpha, & \sigma_h' \end{pmatrix} \equiv \mathfrak{T}_{hi}^{-1}.$$

La transformation $\mathfrak{T}_{ih}$ *reproduit la cubique* K_γ^3 *en engendrant sur celle-ci la correspondance* $E_{(4)}$ *qui a les cycles:* $\sigma_i\, \beta\, \sigma_h\, \alpha$; $\sigma_l\, \gamma_2'\, \sigma_k\, \gamma_3'$; etc., comme il s'ensuit de ce qui vient d'être prouvé.

Ainsi nous avons obtenu deux transformations quadratiques $\mathfrak{T}_{14}$ *et* $\mathfrak{T}_{23}$ *cycliques au 4ième degré et leurs inversions* $\mathfrak{T}_{41}$ *et* $\mathfrak{T}_{32}$.

En remplaçant dans les recherches précédentes l'inversion I_α' par I_β', ou T_2', ou T_3', on obtient les mêmes transformations, mais dans un ordre différent. Ayant égard à ce, que $I_\beta' \equiv T_1\, I_\alpha'$, $T_2' \equiv T_3\, I_\alpha'$, et $T_3' \equiv T_2\, I_\alpha'$, on trouve aisément les relations:

$$10) \qquad J_i\, I_\beta' \equiv I_\beta'\, J_h \equiv \mathfrak{T}_{hi},$$
$$11) \qquad J_i\, T_2' \equiv T_2'\, J_h \equiv \mathfrak{T}_{lk},$$
$$12) \qquad J_i\, T_3' \equiv T_3'\, J_h \equiv \mathfrak{T}_{kl},$$

où les indices sont déterminés par la configuration 7).

Nous avons ainsi trouvé le groupe du 16ième degré G_{16}' *de transformations quadratiques*[6]) *qui reproduisent la cubique* $K_{\gamma'}^3$; *ce groupe contient les transformations du sous-groupe* G_8 *et les autres transformations*

$$I_\alpha',\ I_\beta',\ T_2',\ T_3',\ \mathfrak{T}_{14},\ \mathfrak{T}_{41},\ \mathfrak{T}_{23},\ \mathfrak{T}_{32},$$

c. à d. cinq involutions quadratiques de la 1ière classe, six inversions quadratiques et quatre transformations quadratiques cycliques au 4ième degré. Le groupe G_{16}' *contient, outre les sous-groupes commutatifs* G_8 *et* R_8', *d'autres cinq sous-groupes du 8ième degré; ce sont:*

$$\begin{aligned}
U_8'\colon &\quad 1,\ T_1,\ T_2,\ T_3;\ \mathfrak{T}_{14},\ \mathfrak{T}_{41},\ \mathfrak{T}_{23},\ \mathfrak{T}_{32};\\
Q_8'\colon &\quad 1,\ T_1,\ I_\alpha',\ I_\beta';\ J_1,\ J_4,\ \mathfrak{T}_{14},\ \mathfrak{T}_{41};\\
&\quad 1,\ T_1,\ I_\alpha',\ I_\beta';\ J_2,\ J_3,\ \mathfrak{T}_{23},\ \mathfrak{T}_{32};\\
W_8'\colon &\quad 1,\ T_1,\ T_2',\ T_3';\ J_1,\ J_4,\ \mathfrak{T}_{23},\ \mathfrak{T}_{32};\\
&\quad 1,\ T_1,\ T_2',\ T_3';\ J_2,\ J_3,\ \mathfrak{T}_{14},\ \mathfrak{T}_{41};
\end{aligned}$$

tous ces sous-groupes sont invariants.

4. Etudions maintenant les groupes de points sur la cubique $K_{\gamma'}^3$. Nous avons déjà trouvé trois quadruples de points conjugués isologiques et connexes avec leurs points tangentiels: $(\alpha)\, \gamma_1$; $(\sigma)\, \gamma'$; $(\sigma')\, \varrho'$ (voir 6), où le point ϱ' est un sommet du triangle polaire du quadruple de points

---

[6]) B. Bydžovský: Sur les transformations quadratiques reproduisant une quartique elliptique plane. Comptes Rendus du Congrès international des mathématiciens. Strasbourg, 1920.

conjugués $(\gamma', \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \equiv (\gamma')$ (voir 6′). De là il s'ensuit que le point tangentiel ϱ_1' du quadruple (γ') est le point d'intersection des droites $\overline{\sigma_4' \sigma_1'}$ et $\overline{\sigma_2' \sigma_3'}$, c. à d.

$$\varrho_1' \equiv (\overline{\sigma_4' \sigma_1'} \cdot \overline{\sigma_2' \sigma_3'}).$$

Les transformations du groupe G_{16}' engendrent sur la cubique $K_{\gamma'}^3$ l'involution g_{16}^1; à chaque point M, arbitrairement choisi sur cette courbe, correspond dans cette involution le groupe de seize points $\{(M), (M_0) (M') (M_0')\}$ qui se compose de quatre quadruples de points conjugués du sous-groupe G_4 et qu'on peut partager en deux groupes de huit points $[(M), (M_0)]$ et $[(M'), (M_0')]$ du groupe G_8, en deux groupes de huit points $[(M), (M')]$ et $[(M_0), (M_0')]$ du sous-groupe R_8' et en deux groupes de huit points $[(M), (M_0')]$ et $[(M_0), (M')]$ du sous-groupe U_8'.

Désignons par μ, μ_0, μ', μ_0' les points tangentiels de ces quatre quadruples de points conjugués. Les quadruples (M), (M_0), (σ) sont connexes, — leurs points tangentiels μ, μ_0, γ' sont alors toujours situés sur une droite. Pour la même raison les triples des points suivants se trouvent aussi sur les droites: $\overline{\gamma' \mu' \mu_0'}$; $\overline{\gamma_1 \mu \mu'}$; $\overline{\gamma_1 \mu_0 \mu_0'}$. Les points μ, μ_0' et μ_0, μ' sont donc conjugués en formant les paires de points de la correspondance involutoire de la deuxième espèce $E(\mu, \mu_0') \equiv E(\mu_0, \mu') \equiv E(\gamma', \gamma_1)$ qui est formée sur $K_{\gamma'}^3$ par T_1.

Cherchons maintenant les groupes de points de l'involution g_{16}^1 qui se composent seulement de huit points. Cela arrive seulement, si $(M) \equiv (M_0)$, ou si $(M) \equiv (M')$. Les points de coïncidence des transformations du groupe G_{16}' mènent évidemment à ces groupes de points.

Le premier cas, où $(M) \equiv (M_0)$, arrive, si $\mu \equiv \mu_0$; cela arrive seulement, si μ est le point double de l'involution $g_2^1(\gamma')$, c. à d. un des points du groupe (σ). Si p. ex. $\mu \equiv \mu_0 \equiv \sigma_i$, alors le quadruple respectif $({}^iM)$ est coupé sur $K_{\gamma'}^3$ par la conique directrice K_i de l'inversion J_i. On a alors $\mu' \equiv \sigma_h$ (voir la configuration 7), de sorte que le quadruple $(M') \equiv (M_0') \equiv ({}^hM)$ est coupé sur $K_{\gamma'}^3$ par la conique K_h.

Le deuxième cas arrive, si $\mu \equiv \mu'$, ce qui arrive seulement si μ est le point double de l'involution $g_2^1(\gamma_1)$, c. à d. l'un des points du groupe (α). Si $\mu \equiv \mu' \equiv \alpha$, alors $\mu_0 \equiv \mu_0' \equiv \beta$; le quadruple $(M) \equiv (M') \equiv (\varphi)$ se compose de points de coïncidence de l'inversion I_α' et le quadruple $(M_0) \equiv (M_0') \equiv (\psi)$ de ceux de l'inversion I_β'. Le groupe de huit points $[(\varphi), (\psi)]$ est coupé sur $K_{\gamma'}^3$ par les droites de coïncidence p_1, q_1, u_1, r_1 de la transformation T_1. Si $\mu \equiv \mu' \equiv \gamma_2'$, alors $\mu_0 \equiv \mu_0' \equiv \gamma_3'$; le quadruple $(M) \equiv (M') \equiv (\xi)$ se compose de points de coïncidence de la transformation T_3' et le quadruple $(M_0) \equiv (M_0') \equiv (\eta)$ de ceux de T_2'.

En désignant par p_i, q_i les droites de coïncidence de la transformation T_i du groupe G_4 qui passent par le point β, et par u_i, r_i celles qui passent par le point α, on trouve aisément, que le quadruple de points conjugués (ξ) est coupé sur $K_{\gamma'}^3$ non seulement par les droites u_2, r_2, mais

aussi par p_3, q_3; de façon analogue le quadruple (η) est déterminé par les points d'intersection des droites u_3, r_3 avec p_2, q_2.

L'involution g_{16}^{1}, *engendrée sur* $K_{\gamma'}^{3}$ *par le groupe* G_{16}', *contient donc seulement quatre groupes de points composés de huit points. Ce sont: les groupes* $[(^1M), (^4M)]$ et $[(^2M), (^3M)]$ *coupés sur* $K_{\gamma'}^{3}$ *par les coniques* K_1, K_4 *et* K_2, K_3; *puis le groupe* $[(\varphi), (\psi)]$, *composé de points de coïncidence des inversions* I_α' *et* I_β', *qui est coupé sur* $K_{\gamma'}^{3}$ *par les droites de coïncidence* p_1, q_1 *et* u_1, r_1 *de l'involution* T_1. *Enfin c'est le groupe* $[(\xi), (\eta)]$ *composé de points de coïncidence des involutions* T_3' *et* T_2' *qui est déterminé par les points d'intersection des droites de coïncidence* u_2, r_2 *et* p_2, q_2 *de la transformation* T_2 *avec les droites de coïncidence* p_3, q_3 *resp.* u_3, r_3 *de l'involution* T_3.

5. *En remplaçant dans les recherches précédentes la cubique* $K_{\gamma'}^{3}$ *par* $K_{\gamma''}^{3}$ *resp.* $K_{\gamma'''}^{3}$ *on arrive à deux autres groupes* G_{16}'' *resp.* G_{16}''' *de transformations quadratiques qui ont la même composition.*

La cubique $K_{\gamma''}^{3}$ est déterminée dans le faisceau Σ_1^{3} par ce, que les points α, β sont conjugués sur cette courbe ayant le même point tangentiel γ_2. De la même manière nous trouvons sur $K_{\gamma''}^{3}$ les quadruples suivants de points conjugués isologiques avec leurs points tangentiels (voir la figure):

$$(\alpha, \gamma_1'', \beta, \gamma_3'')\,\gamma_2;\quad (\sigma_4, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\,\gamma'';\quad (\sigma_4'', \sigma_1'', \sigma_2'', \sigma_3'')\,\varrho'';\quad (\gamma'', \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\,\varrho_2'',$$

où

$$\begin{aligned}
\gamma_1'' &\equiv (\overline{\beta\,\gamma_1}\,.\,\overline{\alpha\,\gamma_3}), & \gamma_3'' &\equiv (\overline{\beta\,\gamma_3}\,.\,\overline{\alpha\,\gamma_1}), & \gamma'' &\equiv (\overline{\alpha\,\beta}\,.\,\overline{\gamma_1''\,\gamma_3''}),\\
\sigma_4'' &\equiv (\overline{\beta\,\sigma_4}\,.\,\overline{\alpha\,\sigma_2}), & \sigma_1'' &\equiv (\overline{\beta\,\sigma_1}\,.\,\overline{\alpha\,\sigma_3}), & \varrho'' &\equiv (\overline{\gamma''\,\gamma_2}\,.\,\overline{\gamma_1\,\gamma_3}),\\
\sigma_2'' &\equiv (\overline{\beta\,\sigma_2}\,.\,\overline{\alpha\,\sigma_4}), & \sigma_3'' &\equiv (\overline{\beta\,\sigma_3}\,.\,\overline{\alpha\,\sigma_1}), & \varrho_2'' &\equiv (\overline{\sigma_4''\,\sigma_2''}\,.\,\overline{\sigma_1''\,\sigma_3''}).
\end{aligned}$$

Le groupe G_{16}'' *qui reproduit la cubique* $K_{\gamma''}^{3}$ *se compose du sous-groupe* G_8 *et d'autres transformations quadratiques*:

$$I_\alpha'',\ I_\beta'',\ T_1'',\ T_3'',\ \mathfrak{T}_{24},\ \mathfrak{T}_{42},\ \mathfrak{T}_{13},\ \mathfrak{T}_{31}.$$

L'inversion quadratique I_α'' a le centre α et la conique directrice composée de deux droites de coïncidence p_2, q_2 de la transformation T_2 qui passent par β; au centre α correspond la droite principale $\overline{\beta\,\gamma_2}$, c. à d. la tangente de la cubique $K_{\gamma''}^{3}$ au point β. De même l'inversion I_β'' a le centre β, auquel correspond la droite $\overline{\alpha\,\gamma_2}$, et la conique directrice composée des droites u_2, r_2. Les involutions quadratiques de la classe première $T_1''\,(\alpha, \beta, \gamma_1'')$ et $T_3''\,(\alpha, \beta, \gamma_3'')$ reproduisent $K_{\gamma''}^{3}$ en engendrant sur celle-ci les involutions centrales $g_2^{1}\,(\gamma_3'')$ resp. $g_2^{1}\,(\gamma_1'')$. Les transformations quadratiques cycliques au 4ième degré $\mathfrak{T}_{ik}\begin{pmatrix}\alpha, \beta, \sigma_i''\\ \beta, \alpha, \sigma_k''\end{pmatrix}$ et $\mathfrak{T}_{hl}$ sont données par les produits:

$$\begin{aligned}
J_i\,I_\alpha'' &\equiv I_\alpha''\,J_k \equiv \mathfrak{T}_{ik} \equiv \mathfrak{T}_{ki}^{-1}, & J_i\,T_1'' &\equiv T_1''\,J_k \equiv \mathfrak{T}_{lh},\\
J_i\,I_\beta'' &\equiv I_\beta''\,J_k \equiv \mathfrak{T}_{ki}, & J_i\,T_3'' &\equiv T_3''\,J_k \equiv \mathfrak{T}_{hl},
\end{aligned}$$

où les indices sont déterminés par la configuration 7).

Les carrés $\mathfrak{T}_{ik}^2$ et $\mathfrak{T}_{hl}^2$ donnent toujours l'involution T_2.

La cubique $K_{\gamma'''}^3$ touche de la même façon les droites $\overline{\gamma_3\,\alpha}$ et $\overline{\gamma_3\,\beta}$ en α et β en possédant les quadruples de points conjugués et leurs points tangentiels suivants (voir la figure):

$$(\alpha,\ \gamma_1''',\ \gamma_2''',\ \beta)\ \gamma_3;\qquad (\sigma_4,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3)\ \gamma''';\qquad (\sigma_4'''\ \ \sigma_1''',\ \sigma_2''',\ \sigma_3''')\ \varrho''';$$
$$(\gamma''',\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3)\ \varrho_3''',$$

où

$$\gamma_1''' \equiv (\overline{\beta\,\gamma_1}\,.\,\overline{\alpha\,\gamma_2}),\qquad \gamma_2''' \equiv (\overline{\beta\,\gamma_2}\,.\,\overline{\alpha\,\gamma_1}),\qquad \gamma''' \equiv (\overline{\alpha\,\beta}\,.\,\overline{\gamma_1'''\,\gamma_2'''}),$$
$$\sigma_4''' \equiv (\overline{\beta\,\sigma_4}\,.\,\overline{\alpha\,\sigma_3}),\qquad \sigma_1''' \equiv (\overline{\beta\,\sigma_1}\,.\,\overline{\alpha\,\sigma_2}),\qquad \varrho''' \equiv (\overline{\gamma'''\,\gamma_3}\,.\,\overline{\gamma_1\,\gamma_2}),$$
$$\sigma_3''' \equiv (\overline{\beta\,\sigma_3}\,.\,\overline{\alpha\,\sigma_4}),\qquad \sigma_2''' \equiv (\overline{\beta\,\sigma_2}\,.\,\overline{\alpha\,\sigma_1}),\qquad \varrho_3''' \equiv (\overline{\sigma_4'''\,\sigma_3'''}\,.\,\overline{\sigma_1'''\,\sigma_2'''}).$$

Le groupe G_{16}''' qui reproduit la cubique $K_{\gamma'''}^3$ se compose du sous-groupe G_8 et des transformations quadratiques:

$$I_\alpha''',\ I_\beta''',\ T_1''',\ T_2''',\ \mathfrak{T}_{43},\ \mathfrak{T}_{34},\ \mathfrak{T}_{12},\ \mathfrak{T}_{21}.$$

Les inversions I_α''' et I_β''' ont les centres α resp. β, auxquels correspondent les droites principales $\overline{\beta\,\gamma_3}$ resp. $\overline{\alpha\,\gamma_3}$, et les coniques directrices $(p_3,\ q_3)$ resp. $(u_3,\ r_3)$. Les involutions de la classe 1ière $T_1'''\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma_1''')$ et $T_2'''\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma_2''')$ reproduisent $K_{\gamma'''}^3$ en engendrant sur celle-ci les involutions centrales $g_2^1\,(\gamma_2''')$ resp. $g_2^1\,(\gamma_1''')$. Les transformations quadratiques cycliques au 4ième degré $\mathfrak{T}_{il}\begin{pmatrix}\alpha,\ \beta,\ \sigma_i'''\\ \beta,\ \alpha,\ \sigma_l'''\end{pmatrix}$ et $\mathfrak{T}_{hk}$ sont données par les produits:

$$J_i\,I_\alpha''' \equiv I_\alpha'''\,J_l \equiv \mathfrak{T}_{il} \equiv \mathfrak{T}_{li}^{-1},\qquad J_i\,T_1''' \equiv T_1'''\,J_l \equiv \mathfrak{T}_{kh},$$
$$J_i\,I_\beta''' \equiv I_\beta'''\,J_l \equiv \mathfrak{T}_{li},\qquad J_i\,T_2''' \equiv T_2'''\,J_l \equiv \mathfrak{T}_{hk}.$$

Les carrés $\mathfrak{T}_{il}^2$ et $\mathfrak{T}_{hk}^2$ donnent toujours l'involution T_3.

III. Le groupe G_{32}.

Désignons par N', N'', N''' les ensembles des transformations par lesquels le groupe G_8 s'élargit au groupe G_{16}', resp. G_{16}'', resp. G_{16}'''. Il est facile à démontrer que *l'ensemble des transformations*

$$G_8,\ N',\ N'',\ N'''$$

forme de même un groupe G_{32} de transformations quadratiques.

Pour démontrer qu'il en est ainsi, adjoignons au groupe G_{16}' la transformation I_α''; nous trouvons que le produit $(G_{16}'\,.\,I_\alpha'')$ donne des transformations qui sont contenues dans $(N'',\ N''')$ de sorte, que nous pouvons écrire

$$(G_{16}'\,.\,I_\alpha'') \equiv (N'',\ N''').$$

L'existence du groupe G_{16}'' nous donne, tout d'abord, la relation

$$(G_8\,.\,I_\alpha'') \equiv N'';$$

il reste à démontrer, qu'il y a

$$(N' \,.\, I_\alpha'') \equiv N''',$$

par quoi l'existence du groupe G_{32} sera prouvée.

Avant tout il est évident, que nous pourrons écrire

$$I_\alpha' \,.\, I_\alpha'' \equiv I_\alpha'''.$$

En usant cette relation, nous obtiendrons:

$$\begin{aligned} I_\beta' \,.\, I_\alpha'' &\equiv T_1 \,.\, I_\alpha' \,.\, I_\alpha'' \equiv T_1 I_\alpha''' \equiv T_2''', \\ T_2' \,.\, I_\alpha'' &\equiv T_3 \,.\, I_\alpha' \,.\, I_\alpha'' \equiv T_3 I_\alpha''' \equiv I_\beta''', \\ T_3' \,.\, I_\alpha'' &\equiv T_2 \,.\, I_\alpha' \,.\, I_\alpha'' \equiv T_2 I_\alpha''' \equiv T_1'''. \end{aligned}$$

Or, en nous reportant à la configuration 7), nous obtiendrons la relation

$$\mathfrak{T}_{ih} \,.\, I_\alpha'' \equiv J_i I_\alpha' \,.\, I_\alpha'' \equiv J_i I_\alpha''' \equiv \mathfrak{T}_{il},$$

c. à d. dans une forme développée (voir la figure)

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{14} \,.\, I_\alpha'' &\equiv \mathfrak{T}_{12}, \quad \mathfrak{T}_{23} \,.\, I_\alpha'' \equiv \mathfrak{T}_{21}, \\ \mathfrak{T}_{41} \,.\, I_\alpha'' &\equiv \mathfrak{T}_{43}, \quad \mathfrak{T}_{32} \,.\, I_\alpha'' \equiv \mathfrak{T}_{34}. \end{aligned}$$

L'existence du groupe G_{32} est donc démontrée.

Le groupe G_{32} est isomorphe au groupe bien connu des trente-deux homographies reproduisant une quartique gauche de première espèce.[7])

IV. Les systèmes linéaires de courbes invariantes par rapport au groupe G_{16} et G_{32}.

1. Au point P, arbitrairement choisi dans le plan, correspond, par les transformations du groupe G_{16}', le groupe de seize points $\{P\}$ qui se compose de deux groupes de huit points $[P]$ et $[P']$ du groupe G_8, où le point P' correspond au point P par une transformation de l'ensemble N', p. ex. par l'inversion I_α'.

Etudions maintenant les cas particuliers, où le groupe de seize points $\{P\}$ se réduit aux groupes inférieurs.

Si P est le point de coïncidence de l'involution T_1, p. ex. $P \equiv S_1^1$, alors $P' \equiv P$ et le groupe $\{P\}$ se réduit seulement au couple de points S_1^1, S_2^1. Mais au contraire l'inversion I_α' transforme la paire de points $[S_1^2, S_2^2]$ dans la paire $[S_3^2, S_4^2]$. Alors les paires de points $[S_1^1, S_2^1]$, $[S_3^1, S_4^1]$ et les quadruples de points $[S_1^i, S_2^i, S_3^i, S_4^i]$ $(i = 2, 3)$ sont invariantes par rapport au groupe G_{16}'. Il s'ensuit que l'inversion I_α' et par conséquent toutes les transformations de l'ensemble N', transforment la conique K_1 en K_4 et K_2 en K_3.

---

[7]) B. Bydžovský: Sur les transformations quadratiques . . . Comptes Rendus du Congrès international des mathématiciens, Strasbourg 1920.

Si le point P est donc situé sur K_i, alors le groupe $[P]$ se compose de quatre points de la conique K_i et le groupe $[P']$ forme de même le quadruple de points de la conique K_k; alors le groupe $\{P\}$ est composé de huit points.

Si P est situé sur l'une des quatre droites p_1, q_1, u_1, r_1, alors $[P'] \equiv [P]$ et le groupe $\{P\}$ est composé de deux quadruples de points du groupe G_4, dont l'un est situé sur (p_1, q_1) et l'autre sur $(u_1 r_1)$.

Enfin c'est le groupe de huit points $[(\xi), (\eta)]$, qui est situé sur $K_{\gamma'}^3$ et dont nous avons parlé ci-dessus, qui est invariant par rapport au groupe G_{16}'.

2. Cherchons maintenant les quartiques elliptiques planes qui se reproduisent par le groupe G_{16}'.

Par un point P, arbitrairement choisi dans le plan, parcourt évidemment seulement une courbe du réseau $\boldsymbol{\Sigma}_2^4$, qui est invariante par rapport au groupe G_{16}'; c'est celle, qui passe par les points P et P'. L'exception fait le cas, où $[P'] \equiv [P]$.

Alors, les transformations du groupe G_{16}' reproduisent le faisceau de quartiques planes, dont la base se compose de points doubles $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ et du groupe de huit points $\{(\xi), (\eta)\}$. En effet, chaque courbe du faisceau $\boldsymbol{\Sigma}_1^4 [(\xi), (\eta)]$ est invariante par rapport à l'inversion I_{α}', en coupant les droites (p_1, q_1) dans les points de coïncidence de cette transformation, et par conséquent par rapport aux transformations de l'ensemble N'.

Si le point P est situé sur la conique (p_1, q_1), nous avons dans le faisceau $\boldsymbol{\Sigma}_1^4 [P]$ deux courbes invariantes par rapport au G_{16}'; c'est la courbe composée de quatre droites (p_1, q_1, u_1, r_1) et une quartique qui passe par le groupe de points $\{(\xi), (\eta)\}$ et qui touche la droite $\overline{\alpha P}$ en P.

Si $P \equiv S_1^1$, puis il s'agit du faisceau $\boldsymbol{\Sigma}_1^4 [S_1^1, S_2^1]$ composé des paires de coniques $f_2^2 - \lambda f_3^2 = \emptyset$. L'inversion I_{α}', et par conséquent les transformations de l'ensemble N', forment dans ce faisceau l'involution qui a comme éléments doubles la courbe $(p_1 q_1 u_1 r_1)$ et la courbe qui passe par le groupe de points $\{(\xi), (\eta)\}$ et qui se compose de deux coniques (L_1', L_2').

Dans le faisceau $\boldsymbol{\Sigma}_1^4 [S_1^1, S_2^1]$ resp. $\boldsymbol{\Sigma}_1^4 [S_3^1, S_4^1]$, c. à d. dans le faisceau $f_2^2 - \lambda f_3^2 = \emptyset$ resp. $f_4^2 - \lambda f_1^2 = \emptyset$, se trouvent deux courbes réductibles invariantes par rapport au groupe G_{16}': la courbe composée de quatre droites (p_1, q_1, u_1, r_1) et la courbe composée de deux coniques $[L_1', L_2']$ resp. $[L_3', L_4']$. Chacune de ces quatre coniques (L_i') $i = 1, 2, 3, 4$, passe par le groupe de huit points: par les points $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$, par deux points de coïncidence de l'involution T_1 dont la droite de jonction passe par le point $\boldsymbol{\gamma}_1$, par deux points de coïncidence de l'involution T_2' dont la droite de jonction passe par $\boldsymbol{\gamma}_2'$ et finalement par ceux de l'involution T_3', dont la droite de jonction passe par $\boldsymbol{\gamma}_3'$. L'ensemble des coniques (L_i') joue dans la théorie du sous-groupe $[1, T_1, T_2', T_3']$ le même rôle que les coniques (K_i) dans celle du groupe G_4.

Au contraire dans le faisceau $\Sigma_1^4 [S^i_1, S^i_2]$ $i = 2, 3$, se trouve seulement une courbe invariante par rapport au G'_{16}; c'est celle qui se trouve aussi dans les faisceaux $\Sigma_1^4 [S^i_3, S^i_4]$ et $\Sigma_1^4 [(\xi), (\eta)]$, c. à. d. la courbe composée des droites (p_i, q_i, u_i, r_i).

Nous avons ainsi le théorème:

„*Les transformations du groupe G'_{16} reproduisent ∞^1 des quartiques elliptiques planes C^4 qui forment le faisceau*

$$1) \qquad \varphi_3 - \lambda \varphi_2 = \emptyset,$$

et, en outre, trois autres quartiques réductibles: (p_1, q_1, u_1, r_1), (K_1, K_4) et (K_2, K_3). Ce faisceau contient en tout cinq courbes réductibles; ce sont: les courbes $\varphi_2 = \emptyset$, $\varphi_3 = \emptyset$ composées de droites, deux courbes composées des paires de coniques (L_1', L_2'), (L_3', L_4'), et enfin la courbe composée de la cubique $K^3_{\gamma'}$ liée avec la droite $\overline{\alpha\beta}$. Les autres courbes du faisceau sont elliptiques, mais non générales. L'existence du sous-groupe $[1, I_\alpha', I_\beta', T_1]$ nous montre, que chacune de ces courbes C^4 est caractérisée par cette propriété géométrique qu'elle est engendrée par deux involutions projectives de droites ou par la projection d'une quartique elliptique gauche par un point de sa surface de Voss.[8]) *On peut alors construire ∞^1 des quadrilatères de Steiner, qui sont inscrits dans chaque courbe C^4 ayant α et β comme points fondamentaux.*“

3. Trouvons maintenant dans les systèmes linéaires $\Sigma^{4n}_{\frac{n(n+3)}{2}}$ de courbes invariantes par rapport au groupe G_8 telles, qui se reproduisent par les transformations du groupe G'_{16}.

On voit, tout d'abord, que l'inversion I_α', et par conséquent aussi les transformations de l'ensemble N', forment dans le faisceau $\varphi_3 - \mu \varphi_1 = \emptyset$ l'involution qui a comme éléments doubles les courbes $\varphi_3 = \emptyset$ et $\varphi_1 = \emptyset$. Les transformations du groupe G'_{16} reproduisent alors les courbes réductibles du 8ième degré

$$2) \qquad \varphi_3^2 - \mu \varphi_1^2 = \emptyset.$$

Mais les équations 1) et 2) des courbes invariantes par rapport au groupe G'_{16} nous montrent, que les quotients $\frac{\varphi_2}{\varphi_3}$ et $\frac{\varphi_1^2}{\varphi_3^2}$ sont des covariantes identiques par rapport au groupe G'_{16}.

Les transformations du groupe G'_{16} reproduisent donc les courbes C^{4n} d'ordre $4n$ qui sont données par l'équation générale

$$3) \qquad F(X^2, Y) = \emptyset$$

d'ordre n par rapport à X, Y, où $X \equiv \frac{\varphi_1}{\varphi_3}$ et $Y \equiv \frac{\varphi_2}{\varphi_3}$. Cette équation définit, dans le plan (X, Y) les courbes générales d'ordre n qui sont

[8]) B. Bydžovský: Remarque sur les quartiques planes spéciales. Časopis mathematiky a fysiky. LIII., 1923, No. 1.

symétriques par rapport à l'axe Y. Il est évident, que, si le nombre n est impair, ces courbes passent par le point infiniment éloigné de l'axe X, et par conséquent, les courbes C^{4n} passent, dans ce cas, par le groupe de huit points $\varphi_2 = \emptyset$, $\varphi_3 = \emptyset$, c. à d. par le groupe de points $[(\xi), (\eta)]$. Si, au contraire, le nombre n est pair, alors les courbes C^{4n} ne passent pas généralement par ce groupe de points; celles qui néanmoins passent par là, ont dans ces points au moins les points doubles. L'équation 3) contient ϱ constantes essentielles, où $\varrho = \frac{n^2-1}{4} + n$, si n est impair, et $\varrho = \frac{n^2}{4} + n$, si n est pair.

Il est évident qu'on peut arriver à l'équation 3) aussi par un procédé géométrique, en usant, parmi les courbes de deux faisceaux 1) et 2), une correspondance algébrique $[n, m]$ donnée par la relation

$$\sum_{i,k=0}^{i=n,\,k=m} c_{ik}\,\lambda^i\,\mu^k = \emptyset, \qquad i + 2k \geqq 2m,$$

où $m = \frac{n-1}{2}$, si n est impair, et $m = \frac{n}{2}$, si n est pair.

Ainsi nous sommes arrivés au théorème:

„*Les transformations du groupe G'_{16} reproduisent, généralement, ∞^{ϱ} des courbes d'ordre $4n$, qui ont α et β comme points multiples d'ordre $2n$ et forment un système linéaire Σ_{ϱ}^{4n} donné par l'équation*

$$F(\varphi_1^2, \varphi_2, \varphi_3) = \emptyset, \tag{4}$$

où F désigne une forme ternaire de l'ordre n par rapport à φ_1, φ_2, φ_3, contenant seulement les puissances paires de φ_1. Si n est un nombre impair alors le système Σ_{ϱ}^{4n} est de dimension $\varrho = \frac{n^2-1}{4} + n$, et toutes les courbes du système passent par le groupe de huit points $[(\xi), (\eta)]$. Si n est un nombre pair, alors la dimension $\varrho = \frac{n^2}{4} + n$. Les courbes du système ne passent pas généralement par ce groupe de points; celles qui néanmoins passent par là, ont dans ces points au moins les points doubles.“

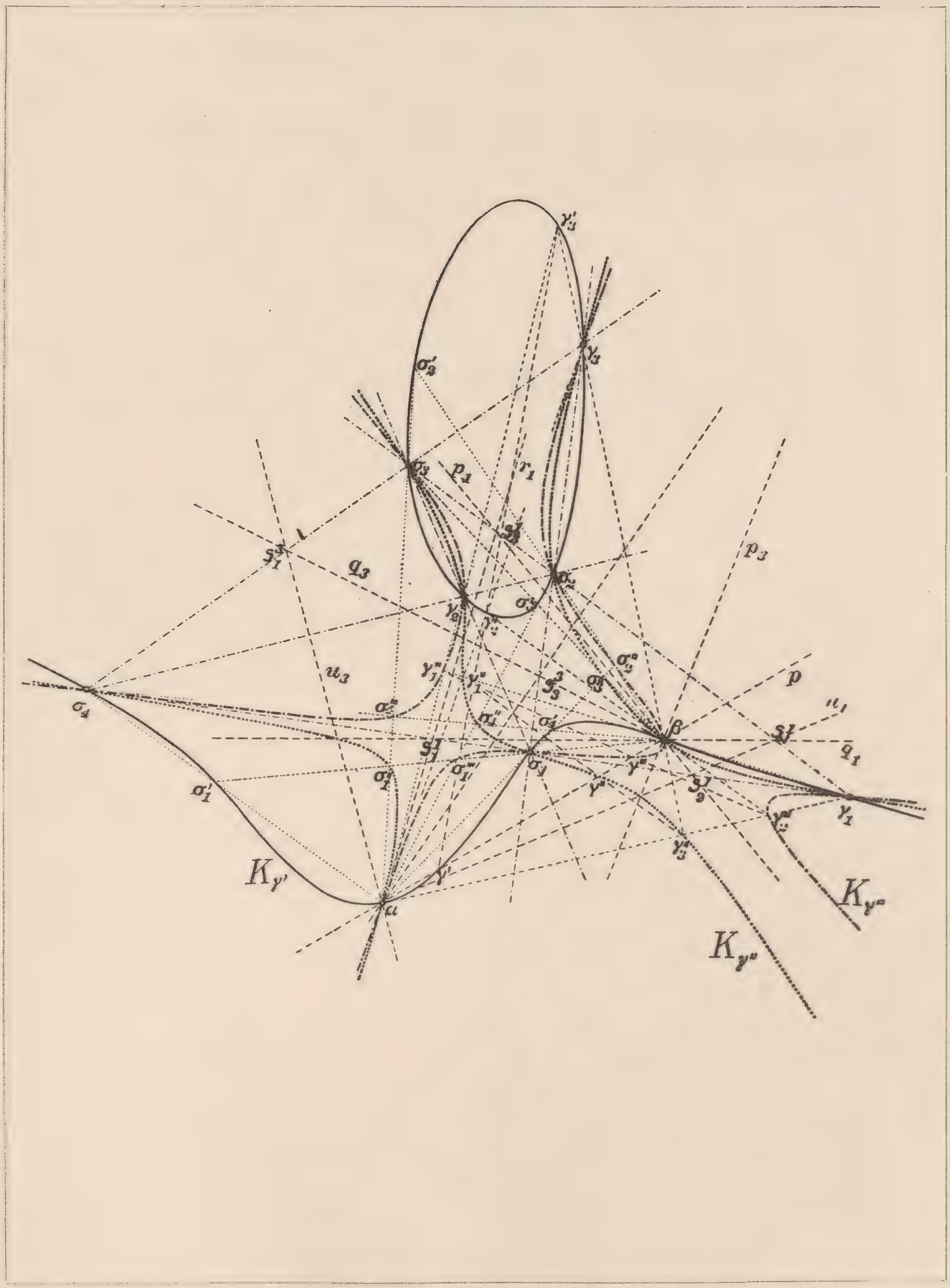
4. Enfin il reste de trouver les courbes invariantes par rapport au groupe G_{32}. Des résultats que nous avons obtenus, il est évident que les courbes données par l'équation 4) sont reproduites par le groupe G_{32} (— alors aussi par les sous-groupes G''_{16} et G'''_{16} —) si cette équation contient seulement des puissances paires des formes φ_1, φ_2, φ_3. Le groupe G_{32} ne reproduit que des courbes irréductibles du degré $8n$.

Du reste, on arrive à ce résultat directement.

On voit tout d'abord, que les quadruples de points $(S^i_1, S^i_2, S^i_3, S^i_4)$ et les groupes de huit points, dans lesquels se coupent deux courbes du groupe $\varphi_i = \emptyset$, $(i = 1, 2, 3)$, sont invariants par rapport au G_{32}.

Le groupe G_{32} reproduit évidemment chacune des courbes réductibles $\varphi_i = \emptyset$, mais pas une quartique elliptique plane.

B. MACHYTKA: **Sur les groupes G_8, G_{16} et G_{32} de transformations planes quadratiques et sur les systèmes linéaires de courbes d'ordre $4n$ et $8n$ se reproduisant par ces groupes.**



Les trois faisceaux

$$\varphi_i^2 - \lambda\, \varphi_h^2 = \emptyset, \quad i, h = 1, 2, 3,$$

composés des courbes réductibles invariantes par rapport au G_{32}, *nous mènent aux covariantes identiques* $\frac{\varphi_1^2}{\varphi_3^2}$ *et* $\frac{\varphi_2^2}{\varphi_3^2}$ *du groupe* G_{32}. De là, il est évident, que par le procédé, que nous avons déjà suivi, nous sommes arrivés au résultat:

„*Les transformations du groupe* G_{32} *reproduisent, généralement,* ∞^r *des courbes d'ordre* $8n$, *qui ont en* α *et* β *les points multiples d'ordre* $4n$ *et forment un système linéaire* Σ_r^{8n}, *où la dimension* $r = \frac{n(n+3)}{2}$. *Ce système est défini par l'équation*

$$F(\varphi_1^2, \varphi_2^2, \varphi_3^2) = \emptyset,$$

où F *désigne une forme ternaire de l'ordre* n *par rapport à* $\varphi_1^2, \varphi_2^2, \varphi_3^2$.

Alors, pour $n = 1$, *le groupe* G_{32} *reproduit les courbes du* $8^{\text{ième}}$ *degré qui ont* α *et* β *comme points multiples d'ordre* 4 *et qui forment le réseau*

$$a\,\varphi_1^2 + b\,\varphi_2^2 + c\,\varphi_3^2 = \emptyset\,.$$

Le „Jacobien" de ce réseau se compose de quatre coniques (K), *de douze droites* $\varphi_i = \emptyset$ *et de la droite* $\overline{\alpha\beta}$.

Le réseau contient trois faisceaux composés des courbes réductibles et dans chacun de ces faisceaux se trouve une courbe composée de quatre coniques $(L^i_1, L^i_2, L^i_3, L^i_4)$, $i = 1, 2, 3$. *La courbe composée de quatre coniques* (K), *qui se reproduit aussi par le groupe* G_{32}, *n'est pas contenue dans le réseau* Σ_2^8."

Contribution aux constructions cubiques et biquadratiques

Par

J. SOBOTKA.

Présenté le 6 février 1925.

1. La résolution géométrique des problèmes cubiques et des problèmes biquadratiques exige la construction des points d'intersection de deux coniques k_1, k_2. Smith[1]) et Kortum[2]) ont été les premiers à faire voir comment on peut construire ces points d'intersection à l'aide de la règle et du compas, quand est donnée, par tous ses points, une conique k fixe.

En ce cas, on peut construire, tout d'abord, le triangle polaire $P\,Q\,R$, commun aux deux coniques k_1, k_2; ses sommets une fois connus, la construction des points d'intersection cherchés n'exige que la résolution de problèmes quadratiques bien connus. Donc, l'essentiel de la résolution géométrique des problèmes cubiques ou biquadratiques consiste en la construction du triangle polaire commun $P\,Q\,R$ de deux coniques k_1, k_2. Pour ce but, on construit la circonférence u circonscrite à ce triangle et, de plus, une conique v homothétique, ou semblable au moins, à la conique donnée k, circonscrite de même à ce triangle et qui passe par un point convenablement choisi sur u, ce qu'on peut faire de manières différentes; c'est ce qu'ont fait voir de nombreux auteurs dans la résolution de problèmes de cette sorte.

Dans le travail actuel, je veux signaler une manière de construction, dans laquelle on fait un emploi systématique, en dehors de la circonférence u de différentes hyperboles équilatères w, circonscrites au triangle $P\,Q\,R$.

2. Considérons, d'abord, un cas particulier, celui où une des coniques k_1, k_2 est une circonférence au centre réel S; désignons cette circonférence par r; si, cependant, elle est imaginaire, désignons par r_i la circonférence réelle qui la remplace. Par s soit désigné, en ce cas, l'autre conique. Cette conique peut être imaginaire, elle aussi, possédant cependant une involution réelle de diamètres conjugués et représentée par

---

[1]) Mémoire sur quelques problèmes cub. et biquadr.

[2]) Ueber geom. Aufg. 3. u. 4. Gr.

une ellipse s_i ayant la même involution de diamètres conjugués, sans que la construction subisse un changement essentiel.

On sait que les points conjugués aux points de la ponctuelle p par rapport au faisceau $(r\ s)$ remplissent une conique circonscrite au triangle $P\ Q\ R$. Soit p d'abord la droite p_∞ à l'infini ; cette conique w_1 est alors le lieu des centres de toutes les coniques du faisceau $(r\ s)$, elle passe, par suite, par le centre S, par le centre O de la conique s, et c'est une hyperbole équilatère, dont les asymptotes sont parallèles aux axes de la conique s ; c'est, en somme, l'hyperbole d'Apollonius de la conique s par rapport au point S. Soit S_1 son centre et soient a_1, b_1 ses asymptotes. En second lieu, choisissons pour la droite p la polaire d du point S par rapport à la conique s et soit P le pôle de cette droite par rapport à r. Si P_0 est le pied de la perpendiculaire abaissée du point S sur d, on a, ϱ désignant le rayon de la circonférence r ou r_i,

$$\overline{P_0\,S}\,.\,\overline{P\,S} = \varrho^2, \text{ ou bien } \overline{P_0\,S}\,.\,\overline{P\,S} = -\,\varrho^2.$$

Les points conjugués, dans le faisceau $(s\ r)$, aux points de d remplissent une conique w passant par les points P et S, laquelle est encore une hyperbole équilatère. Car les droites e_1, e_2 par le point S, conjuguées normales par rapport à s, sont encore conjuguées normales par rapport à r. Si ces droites coupent d aux points D_1, D_2, au point D_1 correspond le point à l'infini sur e_2 et au point D_2 le point à l'infini sur e_1. La conique w est engendrée par des faisceaux homographiques aux sommets P et S. À la droite $P\,S$ du premier faisceau correspond, dans le deuxième, la droite $S\,O$; par suite, $O\,S$ est la tangente de l'hyperbole w au point S. À la droite perpendiculaire à $O\,S$ dans le premier faisceau correspond, dans le deuxième, la parallèle à d, de sorte que leur point d'intersection 1 est encore situé sur w. Par-là on connait les points P, S, 1 de w, sa tangente en S et ses directions asymptotiques, ce qui est plus que suffisant pour la déterminer. Soit S' son centre et a', b' ses asymptotes.

Les courbes w_1, w ont le point S commun et se coupent, par suite, encore aux points P, Q, R ; elles déterminent le faisceau $[w_1, w]$, dont les éléments sont tous des hyperboles équilatères. Les centres de ces hyperboles remplissent une circonférence f. Le centre I du segment joignant les points $(a_1\,.\,a')$, $(b_1\,.\,b')$ est conjugué, dans le faisceau $[w_1, w]$, au point à l'infini de la droite contenant ce segment, comme, d'une part, cette droite et $S_1\,I$ sont antiparallèles par rapport aux asymptotes a_1, b_1, d'autre part, cette même droite et $S'\,I$ sont antiparallèles par rapport aux asymptotes a', b'. Pour une raison analogue, le centre II du segment joignant les points $(a_1\,.\,b')$, $(b_1\,.\,a')$ est conjugué au point à l'infini de la droite contenant ce segment. Les deux segments considérés sont perpendiculaires. Les deux droites a'', b'' qui les contiennent sont les asymptotes d'une hyperbole w'' du faisceau $[w_1\ w]$ au centre S'', car les droites conjuguées, par rapport à toutes les hyperboles du faisceau, au point à l'infini situé,

respectivement, sur a'' ou b'', se coupent, respectivement, en un seul point I ou II. Si l'on forme, par suite, un triangle de trois droites, dont l'une appartient au couple $a_1\, b_1$, la deuxième au couple $a'\, b'$ et la troisième au couple $a''\, b''$, le lieu des centres de toutes les hyperboles en $[w_1\, w]$ est le cercle des neuf points f de ce triangle.

Cela a lieu pour deux hyperboles w_1, w quelconques du faisceau $[w_1\, w]$. Soit w un élément arbitraire du faisceau et a, b ses asymptotes, S_0 son centre; cherchons à déterminer le centre de l'hyperbole $\overline{w}$ du faisceau dont les axes sont parallèles aux asymptotes a, b. Au point A_∞ à l'infini sur a est conjugué le point situé sur a, cette droite étant considérée comme la polaire du point A_∞ par rapport à w, et situé en même temps sur la circonférence f. Par conséquent, c'est le second point d'intersection A_0 de la droite a avec f. Par ce point passe l'axe de l'hyperbole $\overline{w}$ perpendiculaire à a. Une considération analogue par rapport à b donne ce résultat que le centre $\overline{S}$ de l'hyperbole $\overline{w}$ est le point diamétral à S_0 sur f. Il en suit que deux points quelconques diamétraux sur f sont les centres de deux hyperboles du faisceau $[w_1, w]$ telles que les axes de l'une sont parallèles aux asymptotes de l'autre. Si l'on coupe une conique l quelconque par une hyperbole équilatère h, dont les asymptotes sont parallèles à ses axes, trois quelconques des points d'intersection de ces deux coniques et le point diamétral au quatrième sur l sont situés sur une circonférence.[1]) Il en suit que le cercle u homothétique à f, pour le point S comme centre d'homothétie, le rapport d'homothétie étant 2 : 1, est circonscrit au triangle $P\, Q\, R$. Car si l'on choisit, dans le faisceau $[w_1\, w]$, deux hyperboles quelconques, dont les centres S_0, $\overline{S}$ sont diamétraux sur f, elles sont dans la position relative donnée par les courbes l et h; par conséquent, le point symétrique à S par rapport à S_0, aussi bien que le point symétrique à S par rapport à $\overline{S}$, sont situés sur la circonférence u. Il en suit la construction suivante du cercle u:

„Déterminons les asymptotes a_1, b_1 et a', b' des hyperboles w_1, w conjuguées à la droite à l'infini et à la polaire du point S par rapport à la courbe s; par les points $(a_1 \,.\, b_1)$, $(a' \,.\, b')$ ainsi que par le point de rencontre de la droite joignant les points $(a \,.\, a')$, $(b \,.\, b')$ et de la droite joignant les points $(a \,.\, b')$, $(a' \,.\, b)$, faisons passer la circonférence f; la circonférence u est homothétique à f pour le rapport de similitude 1 : 2, le point S étant le centre d'homothétie."

3. J. Šolín a donné, dans les Mémoires de la Société Royale des Sciences de Bohême, une belle construction des axes d'un cône quadratique, étant donnée sa courbe directrice s et le sommet (S). Mais c'est à Smith qu'il faut attribuer la priorité de cette construction; celui-ci la donne, en effet dans cette forme, dans son travail précité, moins connu chez nous que le mémoire précité de Kortum.

---

[1]) Cf. la note précédente de l'auteur dans ce Bulletin.

Nos considérations conduisent à la construction suivante, si l'on choisit le plan de la trace s comme plan de projection orthogonale et si l'on désigne la projection du point (S) par S. Alors la circonférence de distance r_i du point (S) est la représentation réelle de la trace du cône dans le plan de projection, par lequel le cercle absolu est projeté du point (S). Par-là est donnée, dans ce qui précède, la construction du cercle u qui joint les traces P, Q, R des axes cherchés, ces traces formant le triangle polaire commun au cercle imaginaire r représenté par la courbe r_i et à la conique s. Soit, de plus, $\overline{S}$ le point diamétral sur f au point S_1; alors $\overline{S}$ est le centre de l'hyperbole éqilatère w passant par le point S et dont les axes sont parallèles aux axes x, y de la conique s. Le point S' symmétrique à S par rapport au point $\overline{S}$ est un point, alors P, Q, R sont les autres points d'intersection du cercle u avec l'hyperbole w. Par ces deux courbes un faisceau $[u\ w]$ est déterminé. Toutes les coniques de ce faisceau ont les axes parallèles à x et à y. Par suite, on peut construire,, dans ce faisceau, la conique s^* homothétique à la courbe s.

Pour ce but, distingons les cas, où s est une ellipse ou une hyperbole ou bien une parabole, et cherchons à déterminer, dans chacun de ces cas, le centre O^* de la conique s^*.

Si s est une ellipse, construisons les points conjugués aux points à l'infini des diamètres conjugués m, n qui sont symétriques par rapport à x et y. Menons par le point $\overline{S}$ une perpendiculaire à n et par le centre U du cercle u une perpendiculaire à m. Les deux perpendiculaires se coupent au point M conjugué au point à l'infini sur m. Par suite, la parallèle n^* menée à n par le point M est un diamètre de la conique s^*. D'une manière analogue, si N est le point d'intersection de la perpendiculaire abaissée de $\overline{S}$ sur m et de la perpendiculaire abaissée de U sur n, la parallèle m^* à la droite m par N est le diamètre de s^* conjugué à m^*, et le point $O^* = (m^* . n^*)$ est le centre de la courbe s^*, laquelle est ainsi déterminée, ayant ses axes parallèles à x et y et passant par le point S'.

Si s est une hyperbole aux asymptotes m, n, construisons les points M, N de la même manière que plus haut, et menons par le point M une parallèle à m, par le point N une parallèle à n; ces parallèles sont les asymptotes de l'hyperbole s^* passant par le point S'; elles se rencontrent en son centre O^*.

Dans les deux cas, on mène le diamètre de s parallèle à la droite $O^* S'$, l'on détermine une de ses extrémités S^* et l'on construit le triangle $O S^* U^*$ homothétique au triangle $O^* S' U$. Par homothétie entre s^* et s correspond au cercle u, le cercle u_0 ayant pour centre U^* et passant par le point S^*. Soient P_0, Q_0, R_0 les autres trois points d'intersection du cercle u_0 et de s; dans l'homothétie qui vient d'être mentionnée, ce sont les points P, Q, R qui leur correspondent.

Si, enfin, s est une parabole à l'axe x, et si $M_0\ N_0$ est sa corde perpendiculaire à l'axe et passant par son foyer, menons par les pieds des

perpendiculaires abaissées du point U sur les asymptotes de l'hyperbole w et par le centre du segment $\overline{SU}$ des parallèles à x; la dernière, x^*, est l'axe de la parabole s^*. Dans la homothétie entre les paraboles s^* et s à ces parallèles correspondent les parallèles menées à x par les points M_0 et N_0 et l'axe x lui-même; on peut, par conséquent, déterminer la droite x_σ, laquelle correspond à la parallèle menée à ces droites par le point S': soit S^* le point d'intersection de cette parallèle avec la parabole s. On peut, dès lors, construire le point U_0 correspondant, dans cette homothétie, au point U. Le cercle au centre U_0 et au rayon U_0S^* coupe s encore aux points P_0, Q_0, R_0; à ceux-ci correspondent, dans l'homothétie, les points cherchés P, Q, R.

4. Puisqu'au faisceau des hyperboles équilatères, passant par les points S, P, Q, R, est conjugué, par rapport au faisceau $[r\ s]$, un faisceau de droites, à toute droite parallèle à la polaire du point S par rapport à la courbe s, correspond une hyperbole équilatère. On peut, par conséquent, choisir, au lieu de la droite d, une droite quelconque d^* parallèle à d et remplacer l'hyperbole w par l'hyperbole w^* conjuguée à d^*. Si les foyers de la conique s sont donnés, les droites conjuguées normales par rapport à elle, passant par le point S, ainsi que les directions asymptotiques de w, sont données par les bissectrices de l'angle des droites joignant S aux foyers; s'il n'en est pas ainsi, il est plus avantageux de choisir, au lieu de la droite d, la droite d^* passant par le point S ou par le centre O de la conique s. Dans le premier cas, une asymptote de la courbe w^* est perpendiculaire à la droite d^*, l'autre est paralléle à cette droite; la courbe passe, en dehors du point S, encore par le point d'intersection de OS et d, de sorte qu'il suffit de connaître encore un point de cette courbe, p. ex. le point conjugué au point d'intersection de la droite d^* avec un axe de la courbe s.

Si l'on choisit la droite d^* de sorte qu'elle passe par le centre O, les asymptotes de la courbe w^* ont les directions de la droite OS et de ses normales; la courbe passe par le point S et par le pôle de la droite d^* par rapport à r_i, de sorte qu'il faut déterminer encore le point conjugué à un point quelconque de d^* pour pouvoir construire le centre de la courbe. Le reste de la construction reste le même.

5. Retournons aux considérations de l'article 2. et cherchons à construire la conique passant par les points P, Q, R laquelle est homothétique à une conique k fixe, donnnée arbitrairement, dont l'un axe soit désigné par x. Déterminons, dans le faisceau des hyperboles équilatères $[w_1\ w]$ celle w_0 dont l'une asymptote x' est parallèle à x, ce qu'on effectuera en menant par le centre d'une d'elles la droite antiparallèle à x par rapport à ses asymptotes; cette droite coupe f encore en un point; la parallèle menée par ce point à l'axe x est l'asymptote x' coupant f en un second point S_0, centre de l'hyperbole w_0. Ensuite on peut déterminer par le procédé exposé dans l'article 3, dans le faisceau $[w_0\ u]$ la conique k^* homothétique à la conique k d'une manière analogue à celle qui servi à déduire

la conique s^* de la conique s. Par-là est donné le reste de la construction des sommets P, Q, R du triangle polaire commun des courbes r, s.

6. Soient données, de plus, deux coniques quelconques k_1, k_2; bornons-nous, cependant, à des coniques définies par une polarité réelle, mais admettons que l'une ou toutes les deux puissent être imaginaires. On peut, en ce cas, transformer les deux coniques k_1, k_2 par une homologie simple en deux coniques k_1', k_2' de sorte qu'une d'elles soit un cercle.

Si k_1, k_2 sont réelles et l'une d'elles est une ellipse, il conviendra de faire usage de l'affinité orthogonale par laquelle cette ellipse se change en une circonférence; si les deux coniques sont des hyperboles, on peut faire usage de l'involution laquelle transforme l'une d'elles en son cercle circonscrit aux sommets.

Si l'une des deux coniques est imaginaire et si k_i est l'ellipse réelle qui la remplace, on fera usage de l'affinité orthogonale par laquelle k_i est transformée en un cercle k_i'. Si toutes les deux sont imaginaires, on emploiera l'affinité orthogonale par laquelle l'ellipse $k_1^{(i)}$, représentant l'une des courbes données, par ex. k_1, se ramène à un cercle $r_1^{(i)}$; par cette même affinité l'ellipse $k_2^{(i)}$ représentant la deuxième conique imaginaire k_2 se change en une ellipse $r_2^{(i)}$. Les courbes $r_1^{(i)}$, $r_2^{(i)}$ sont, alors, les représentantes des courbes imaginaires r_1, r_2, dont la première est un cercle, l'autre, en général, une ellipse, et lesquelles correspondent aux coniques k_1, k_2 dans l'affinité considérée; en effet, par cette transformation, les polarités appartenant à k_1 et k_2 se changent en celles appartenant aux courbes r_1 et r_2.

Donc, on construit, de la manière qui vient d'être exposée, le triangle polaire commun $P_1\,Q_1\,R_1$ de la circonférence r_1 et de la conique r_2; le triangle polaire cherché $P\,Q\,R$ est celui qui lui correspond dans l'homologie considérée entre r_1, r_2 et k_1, k_2.

7. Mais on peut effectuer la construction du triangle $P\,Q\,R$ aussi directement, par la considération des coniques k_1, k_2. Soient K_1, K_2 leurs centres, x_1, y_1; x_2, y_2 leurs axes; désignons par c la conique-lieu des centres des coniques du faisceau $[k_1\,k_2]$ et par x, y les axes de la conique donnée fixe k.

On construira, d'abord, les points X, Y, conjugués, par rapport à $[k_1\,k_2]$, aux points à l'infini des axes x, y, en supposant, d'abord, que k est une conique centrale. Ces points sont situés sur c, X (Y) étant le point d'intersection des diamètres de k_1 et k_2 conjugués à x (y). Construisons, de plus, les points X', Y' conjugués, par rapport à $[k_1\,k_2]$, aux points à l'infini des droites x', y', symétrales des angles des axes x, y. Les droites $d = (X\,Y)$ et $d' = (X'\,Y')$ ont cette propriété que les points conjugués, par rapport à $[k_1\,k_2]$, aux points de la droite d (d') remplissent une hyperbole équilatère w (w') dont les asymptotes sont parallèles à x, y (x', y'). Au point D, commun aux deux droites d, d' est conjugué un point d'intersection T de ces deux hyperboles, tandis que les trois autres points d'intersection sont les sommets du triangle polaire commun à toutes

les coniques de $[k_1\, k_2]$. On peut construire aisément les centres S, S' des hyperboles w, w', puisqu'on connaît, pour l'une et pour l'autre, les directions asymptotiques et le point T, de sorte qu'il suffit de construire encore deux points de chacune, p. ex. les pôles D_1, D_2 de la droite d par rapport à k_1, k_2 pour w, et les pôles D_1', D_2' analogues de la droite d' pour w'.

D'après ce qui precède, les centres des éléments du faisceau des hyperboles équilatères $[w\, w']$ remplissent une circonférence f, dont $S\, S'$ est un diamètre; et la circonférence u homothétique à f par rapport au centre T, le rapport de similitude étant 1 : 2, (et dont le rayon est égale à $S\, S'$) est circonscrite au triangle $P\, Q\, R$. On peut construire, dans le faisceau déterminé par le cercle u et l'hyperbole w', la conique k^* homothétique à k, laquelle passe, par suite, par le point T' symmétrique à T par rapport au point S' et, enfin, ses points d'intersection avec u, de la manière exposèe ci-dessus.

Si k est une parabole à l'axe x, on choisira pour y une perpendiculaire quelconque à x, de sorte que les hyperboles w, w' sont déterminées de la même manière qu'auparavant, tandis qu'il n'y a rien de nouveau en ce qui concerne la parabole k^* homothétique à k dans le faisceau $[u\, w']$.

8. On peut construire le cercle u encore de la manière suivante. On sait que le lieu des points d'où l'on peut mener à la conique k_i des tangentes perpendiculaires est un cercle concentrique h_i. Si a^2 et b^2 sont les carrés des demi-axes de la conique, le carré du rayon de ce cercle est $a^2 + b^2$, et un cercle circonscrit à un triangle polaire quelconque de la conique k_i coupe orthogonalement le cercle h_i. Par conséquent, si les coniques k_1, k_2, k_3 appartiennent au faisceau, le cercle u orthogonal aux cercles respectifs h_1, h_2, h_3 est circonscrit au triangle polaire $P\, Q\, R$ commun à toutes les coniques du faisceau. Si la somme $a^2 + b^2$ est négative, le cercle h_i est représenté par le cercle réel h_i' au rayon dont le carré est $-(a^2 + b^2)$. Si k_i est une hyperbole équilatère, h_i passe par son centre; si k_i est une parabole, la circonférence h dégénère en sa directrice et la droite à l'infini.

Donc, pour construire le triangle $P\, Q\, R$ pour les coniques k_1, k_2, on construira d'abord les cercles respectifs h_1, h_2. Dans le faisceau $[k_1\, k_2]$ se trouve aussi une hyperbole équilatère k_3, car l'involution, par laquelle sont projetés, pour un centre quelconque, les couples de points en lesquels les coniques du faisceau $[k_1\, k_2]$ coupent la droite à l'infini ϕ_∞, contient un couple orthogonal. Par suite, on construira ce couple, et, à l'aide de ce couple, le centre K_3 de l'hyperbole k_3. Si l'une des circonférences h_1, h_2 ou toutes les deux sont imaginaires, on construit le centre du cercle u en considérant les courbes h_1, h_2 comme les traces des hyperboloïdes de révolution orthogonaux dont les axes sont perpendiculaires au plan de ces courbes, tandis qu'on considère le centre de l'hyperbole k_3 comme le sommet d'un cône de révolution orthogonal dont l'axe est, de même, perpendiculaire à ce plan. La projection orthogonale sur ce plan des

points d'intersection de ces surfaces situés à distance finie est le centre du cercle u. Si k_1 ou k_2 est une parabole, la surface considérée est remplacée par le plan projetant et contenant sa directrice. C'est une construction de la cyclographie, bien connue d'ailleurs.

Le cercle u est le lieu des points conjugués par rapport à $[k_1\, k_2]$ situés sur une droite m. Le point K_3 est conjugué au point à l'infini commun aux diamètres de k_1 et k_2 qui sont conjugués, à leur tour, aux diamètres passant par le point K_3; par-là la direction de la droite m est déterminée, et il suffit de construire un de ses points comme le point conjugué, par rapport à k_1 et k_2, à un point arbitraire de u. Soient encore x', y' des droites faisant avec l'axe x de la conique donnée k les angles égaux respectivement à $\pm\frac{\pi}{4}$; construisons, à l'aide de k_3 et à l'aide de k_1 ou k_2, les points conjugués, dans le faisceau considéré, aux points à l'infini sur x' et y'. La droite n joignant ces deux points a cette propriété qu'à sa ponctuelle est conjuguée une hyperbole équilatère w, dont les axes sont parallèles aux axes de la courbe k. Au point d'intersection des droites m, n correspond le point T commun aux courbes u et w; par-là la construction des points P, Q, R sur u, à l'aide de la conique fixe k, se réduit à la construction donnée dans l'article 3.

9. Une solution spéciale est fournie par le cas où k_1 et k_2 sont des hyperboles ayant la propriété que les directions des asymptotes a_1, b_1 de k_1 sont séparées par les directions des asymptotes a_2, b_2 de la courbe k_2. On peut, en ce cas, ramener, par une affinité, ces hyperboles en des hyperboles équilatères. En effet, prenons pour axe p de l'affinité, ou la droite joignant les points $(a_1 \,.\, a_2)$, $(b_1 \,.\, b_2)$, ou la droite joignant les points $(a_1 \,.\, b_2)$, $(a_2 \,.\, b_1)$. Construisons le cercle pour lequel ces points sur p sont les extrémités d'un diamètre; menons par le centre d'une de ces hyperboles des parallèles aux asymptotes de l'autre et prenons le segment, découpé sur p par ces droites, pour diamètre d'un second cercle. Ces deux cercles se coupent en deux points. Si l'on fait correspondre un de ces points au centre en question, on a déterminé une affinité, par laquelle les hyperboles données sont ramenées à des hyperboles équilatères et dont les points d'intersection correspondent, par cette affinité, aux points d'intersection des courbes k_1, k_2. Le problème donné se réduit, par-là, au problème plus simple, celui de construire, à l'aide d'une conique k fixe, les points d'intersection de deux hyperboles équilatères k_1, k_2.

En ce cas les centres de toutes les hyperboles du faisceau $(k_1\, k_2)$ sont situés sur un cercle u. Désignons encore par K_1, K_2 les centres des hyperboles k_1, k_2 et par a_1, b_1; a_2, b_2 respectivement, leurs asymptotes. On sait que les droites a_3, b_3, dont la première joint les points $(a_1 \,.\, b_2)$, $(a_2 \,.\, b_1)$, l'autre les points $(a_1 \,.\, a_2)$, $(b_1 \,.\, b_2)$, sont encore les asymptotes d'une courbe dans (k_1, k_2); par son centre $(a_3 \,.\, b_3)$ et par les centres K_1, K_2 est déterminé le cercle u au centre U, contenant les centres de toutes les hyperboles du

faisceau et circonscrit, par conséquent, au triangle polaire $P\,Q\,R$ commun à tous ses éléments. Construisons le point U', conjugué au centre U par rapport à k_1 et k_2. Soient G et E les extrémités d'un diamètre quelconque de u et, par conséquent, les centres de deux hyperboles g, e du faisceau $(k_1\,k_2)$. On sait que, un couple de telles hyperboles étant donné, les asymptotes d'une d'elles sont parallèles aux axes de la seconde, et vice versa. Soient g_1, g_2; e_1, e_2, respectivement, les asymptotes de la courbe g et de la courbe e; les droites f_1, f_2, joignant, respectivement, les points $(g_1 \,.\, e_1)$, $(g_2 \,.\, e_2)$ et les points $(g_1 \,.\, e_2)$, $(g_2 \,.\, e_1)$, sont les asymptotes de l'hyperbole f du faisceau dont le centre est situé sur u. Puisque le point G est conjugué, par rapport au faisceau, au point à l'infini sur $E\,F$ et le point E au point à l'infini sur $G\,F$, on voit qu'au faisceau des droites passant par le point U est conjugué, par rapport à $(k_1\,k_2)$, le faisceau Σ d'hyperboles équilatères passant par le point U' et par les points P, Q, R. A la droite $G\,E$ est conjuguée, par rapport à $(k_1\,k_2)$, l'hyperbole f^* appartenant au faisceau Σ. Ses asymptotes f^*_1, f^*_2 sont parallèles, respectivement, aux droites $G\,F$ et $E\,F$. Le point à l'infini sur $G\,E$ et le point U sont conjugués harmoniques par rapport aux points G, E; à ce point est conjugué, par rapport à $(k_1\,k_2)$, le point F, au point U le point U' et aux points G, E les points à l'infini sur $E\,F$ et $G\,F$. Il en suit que F, U' sont, sur f^*, deux points diamètraux. Par conséquent, le centre de l'hyperbole f^* coïncide avec le centre du segment $F\,U'$. Si l'on choisit une asymptote de chaque hyperbole g, e, f, de sorte qu'elles forment un triangle, les autres asymptotes se coupent en son orthocentre H et les pieds de ses hauteurs forment un triangle $G\,E\,F$ pour lequel le point H est le centre du cercle inscrit ou ex-inscrit. Il suit de là, si F_1 est le point diamétral, sur u, au point F, que F_1 est le centre de l'hyperbole dans $(k_1\,k_2)$ dont les asymptotes sont les droites $F_1\,G$ et $F_1\,E$.

Les centres de toutes les hyperboles de Σ sont situés — ce qui suit des considération précédentes — sur un cercle u_0 homothétique à u par rapport au centre U', le rapport de similitude étant 1 : 2. Aux extrémités M_0, N_0 d'un diamètre arbitraire de u correspondent les extrémités M, N du diamètre parallèle, et les asymptotes de la courbe en Σ, ayant pour centre le point M_0 ou N_0, sont paralléles aux asymptotes de l'hyperbole en $(k_1\,k_2)$ dont le centre est, respectivement, le point N ou M.

Or, pour construire la conique homothétique à k, passant par les points P, Q, R, on construit, dans le faisceau $(k_1\,k_2)$, le centre K' de l'hyperbole h' dont les asymptotes x', y' sont parallèles aux axes x, y de la conique k; le centre K_0' du segment $U'\,K'$ est le centre de l'hyperbole h_0' en Σ dont les axes sont parallèles aux axes x, y. Le point K'', diamétral au point K' sur u, est le centre de l'hyperbole h'' en $(k_1\,k_2)$, dont les axes sont parallèles à x, y, tandis que le centre K_0'' du segment $K''\,U'$ est le centre de l'hyperbole h_0'' en Σ, dont les asymptotes sont parallèles à x, y. Mais il suffit de construire les droites x', y'. L'hyperbole h'_0 coupe le cercle u aux points K', P, Q, R; elle détermine, avec u, le faisceau $(u\,h_0')$,

qui contient une conique k_0, homothétique à k. On construit, de la manière bien connue, son centre K_0; par-là, elle est déterminée, le point K' étant connu. À l'aide de l'homothétie qui change k_0 en k, on construit, en fin de compte, les autres points d'intersection P, Q, R du cercle u avec k_0; par-là, la construction des points d'intersection des hyperboles k_1, k_2 est donnée.

10. Supposons que la conique fixe k soit une hyperbole équilatère. La conique k_1 soit donnée par ses points A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 et la conique k_2 par ses points A_2, . . ., E_2. On peut construire, en ce cas, les points d'intersection des coniques k_1, k_2 aussi de la manière suivante.

a) À l'aide d'une homologie Φ transformons les coniques k_1, k_2 en k_1', k_2', de sorte que k_1' soit un cercle. On peut choisir, pour k_1', un cercle arbitraire passant par deux des points donnée de k_1, p. ex. par A_1, B_1. On prendra la droite $A_1 B_1$ pour axe d'homologie et on construira, en ces points d'une part, les tangentes de k_1 se coupant au point I, d'autre part, les tangentes de k_1' se coupant au point I'; la droite II' est, alors, une droite passant par le centre Z de l'homologie, par laquelle correspond, à la droite $I C_1$, la droite joignant son point situé sur $A_1 B_1$ au point I'. La droite, joignant un point d'intersection C_1' de cette droite avec k_1' au point C_1, coupe II' au point Z. Il faut, bien entendu, faire passer k_1' par deux points A_1, B_1, parmi ceux qui sont donnés sur k_1, tels que l'homologie, déterminée par l'axe $A_1 B_1$, par le centre Z et un couple de points correspondants I, I' soit réelle. Si k_1 est une ellipse ou une parabole, il en est ainsi pour tout couple de points pris sur elle; mais, si k_1 est une hyperbole, il faut prendre ces deux points sur la même branche de la courbe.

b) Dans le faisceau $(k_1' k_2')$, il se trouve une hyperbole équilatère k_0; ses asymptotes sont parallèles aux droites x', y', bissectrices des angles des axes x, y de la courbe k_2'. Donc, on construit l'involution des diamètres conjugués de k_2'. Dans cette involution on détermine le diamètre conjugué à x', lequel coupe le diamètre du cercle k_1', perpendiculaire à x', en un point de l'asymptote de l'hyperbole k_0, parallèle à x'. On déterminera, d'une manière analogue, l'asymptote de k_0, parallèle à y'. Pour obtenir un point de k_0, situé à distance finie, on choisit, sur k_2', un point, soit A_2', et on mène par ce point une parallèle g à une asymptote de la courbe k_0; on construit son second point d'intersection avec k_2'; par ce point et par le point A_2', on fait passer un cercle, dont l'axe radical avec k_1' coupe g au point G appartenant à la courbe k_0. Changeons, par une similitude, la courbe k_0 en k; cela fait changer k_1' en le cercle k^*; déterminons les points d'intersection de ce cercle avec k; à ces points correspondent, sur le cercle k_1', ses points d'intersection avec k_0. À ces points correspondent, par l'homologie Φ, les points d'intersection des courbes k_1, k_2. Il va sans dire qu'on atteint le but en vue seulement si tous les points d'intersection du cercle k^* avec k ne sont pas imaginaires; s'il n'en est pas ainsi, il faut construire ces points à l'aide du triangle polaire commun

des courbes k et k^*, ou bien des cou bes k_0 et k_1'. Dans le second cas, il suffit, néanmoins, de construire les asymptotes m_1, m_2 de l'hyperbole k_0. Désignons par M_0 son centre et par M_1' le centre du cercle k_1'. Soient, de plus, M_1, M_2 les pieds des perpendiculaires abaissées du point M_1'. sur m_1 et m_2, et soit L le point d'intersection des droites $M_1\,M_2$, $M_0\,M_1'$

Les centres des coniques du faisceau $(k_1'\,k_0)$ remplissent une hyperbole équilatère h, passant par les points M_0, M_1', $M_1\,M_2$, ayant le centre L, et dont les asymptotes sont parallèles aux droites x, y. À la droite $M_1\,M_2$ est conjuguée, de même, par rapport à $(k_1'\,k_0)$, une hyperbole équilatère h', dont les asymptotes sont parallèles aux droites x', y' et qui passe par le point M_1' ainsi que par les pôles de la droite $M_1\,M_2$ par rapport à k_1' et k_2', ce qui suffit à la déterminer. Construisons son centre H'. Par les hyperboles h, h' est déterminé un faisceau $(h\,h')$ d'hyperboles équilatères passant par le point M_1' et se coupant, en outre, aux sommets P, Q, R du triangle polaire des courbes k_1' et k_2'. Les centres des courbes de ce faisceau sont situés sur un cercle, et comme les axes de l'hyperbole h' sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole h, le segment $L\,H'$ est un diamètre de ce cercle, et le cercle u est homothétique à ce cercle par rapport au centre M_1', le rapport de similitude étant 1 : 2, et passe par le point M_0. Designons par U le centre du cercle u. Par un procédé employé déjà plusieurs fois, on construira l'hyperbole h_0, au centre H_0, appartenant au faisceau $(h\,h')$ et dont les asymptotes sont parallèles aux asymptotes de la courbe k; par-là, cette courbe est déterminée, puisqu'elle passe par le point M_1'. Le point N diamétral, sur h_0, au point M_1', se trouve sur le cercle u. Quant aux sommets P, Q, R, on les déterminera à l'aide de l'homothétie des hyperboles h_0, k, si le rapport de similitude est réel. Si, cependant, ce rapport est imaginaire, menons, dans k, le diamètre perpendiculaire à $H_0\,M_1'$; soient M^*, N^* ses extrémités. Construisons le triangle $M^*\,N^*\,U^*$, où $M^*\,U^* \perp M_1'\,U$, $N^*\,U^* \perp N\,U$, et déterminons les autres points d'intersection P^*, Q^*, R^* du cercle u^* au centre U^* et passant par le point N^*, avec k. Par la conique k et le cercle u^* est déterminé un système semblable au système déterminé par la conique h_0 et le cercle u; les droites qui se correspondent dans ces systèmes sont perpendiculaires. Aux points P^*, Q^*, R^* correspondent les points cherchés P, Q, R; à l'aide de ces points on détermine les points d'intersection de k_1', k_2', et, après, à l'aide de Φ, ceux de k_1 et k_2.

11. Si l'un des points d intersection des coniques k_1, k_2, soit P, est connu, on trouvera les trois autres P_1, P_2, P_3 encore de la manière suivante. Par une homologie convenable on changera une des coniques considérées, p. ex. k_1, en un cercle k_1'; soit k_2' la conique qui correspond à k_2, P' le point correspondant à P. Le faisceau $(k_1'\,k_2')$ contient deux paraboles réelles, dont les axes sont perpendiculaires, et les axes de toutes les coniques de ce faisceau sont parallèles aux axes de ces paraboles. Donc, on construit leurs directions, en construisant les directions des axes x',

y' de la conique k_2'. Le faisceau $(k_1' k_2')$ contient deux coniques k', k'', dont l'involution de diamètres conjugués est congruente à l'involution J des diamètres conjugués de k. Prenons une d'elles, p. ex. k', et déterminons son centre, Pour le faire, faisons tourner J d'un angle φ dans une position nouvelle J' telle que ses axes x, y deviennent parallèles à x', y' ou à y', x'. À l'aide de cette involution, on construira le centre K' de la conique k'; par-là, cette conique est déterminée, puisqu'elle passe par le point P'. On changera, par une similitude, k' en k; le demi-diamètre $K'P'$ se change en un demi-diamètre KP de la courbe k et le cercle k_1', en un cercle k_0 qui coupe k encore en trois points, dont un au moins est réel, de sorte qu'on peut construire facilement les deux autres, même s'ils sont imaginaires. À ces trois points correspondent, sur k_1', les points P_1', P_2', P_3' communs à k_1' et k_2', auxquels correspondent, par l'homologie en question, les points cherchés P_1, P_2, P_3.

12. Considérons encore la résolution de l'équation

$$y^4 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0 = 0,$$

où a_2, a_1, a_0 sont des nombres réels, à l'aide d'une conique centrale fixe k.

Considérons, dans le système de coordonnées orthogonales, dont l'axe des x est l'axe principal de la conique k et dont l'origine O se trouve au centre de la courbe k, une parabole u ayant x pour axe et O pour son sommet. Supposons que son paramètre soit égal à la moitie de l'unité de mesure, de sorte que son équation soit

$$y^2 = x\,.$$

Si l'on coupe cette parabole par le cercle u_1 ayant l'équation

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \pi = 0\,,$$

on obtient pour les points d'intersection l'équation

$$y^4 + (1 - 2\alpha)\, y^2 - 2\beta y + \pi = 0\,.$$

Si l'on choisit, pour le cercle, $\alpha = \frac{1 - a_2}{2}$, $\beta = -\frac{a_1}{2}$, $\pi = a_0$, les ordonnées de ses points d'intersection avec la parabole donnent les racines de l'équation donnée; c'est là une construction connue depuis longtemps. Il suffit, maintenant, de construire dans le faisceau déterminé par ce cercle et par la parabole u, la conique k_1 homothétique à k, de la manière exposée plus haut. Si

$$b^2x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$$

est l'èquation de la courbe k et si l'on pose $a^2 - b^2 = e^2$, l'équation de la courbe k_1 est

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - (e^2 + 2\alpha b^2)\, x - 2\beta b^2 y + \pi b^2 = 0\,;$$

par suite son centre a les coordonnées

$$x_0 = \alpha + \frac{e^2}{2\,b^2}\,,\; y_0 = \frac{\beta\,b^2}{a^2}\,,$$

et pour le demi-axe d_1, parallèle à x, la formule a lieu:

$$d_1{}^2 = x_0{}^2 + \beta\,y_0 - \pi\,.$$

Le cercle u_1 est réel tant que $\alpha^2 + \beta^2 - \pi > 0$, c. à d.

$$(1 - a_2)^2 + a_1{}^2 - 4\,a_0 > 0,$$

tandis que la conique k_1 est réelle tant que $x_0{}^2 + \beta\,y_0 - \pi > 0$, c. à d.

$$\left(\frac{a^2}{b^2} - a_2\right)^2 + \frac{b^2}{a^2}\,a_1{}^2 - 4\,a_0 > 0\,.$$

Après avoir construit k_1 et u_1, on construit l'homothétie qui transforme k_1 en k et en même temps u_1 en u^*; ensuite, on transforme les points d'intersection de k et u^* par la transformation inverse; dans cette position définitive leurs ordonnées donnent les racines de l'équation donnée. Mais si la conique k_1 ou le cercle u_1, ou bien l'une et l'autre sont imaginaires, tous leurs points communs et, par suite, les racines de l'èquation données sont toutes complexes.

La construction qui vient d'être exposée aboutit directement au but en vue seulement dans le cas où deux au moins des points d'intersection des courbs k_1, u^* sont réels. S'il n'en est pas ainsi, il faut construire, d'abord, leur triangle polaire à l'aide de k.

La stratigraphie et palaeontologie de la terasse pluviale (mindélienne) de Jourdain près de Daganea Alef.

Par

Jar. Petrbok.

Avec une planche et 4 illustr; en texte.

(Présenté le 20 mars 1925.)

Nous devons à Fritz Noetling le premier ouvrage général sur la faune pleistocène de la terasse pluviale *du lac de Genezaréth* (lac de Tibériade) (et de Jourdain dans le voisinage du lac). Cette étude publiée en 1886 est en somme jusqu'à nos jours le seul ouvrage original sur cette faune. Les résultats des recherches de Noetling furent cités dans la littérature postérieure, surtout par Blanckenhorn[6]) sans que depuis de nouvelles fouilles ou études critiques en aient été faites.

Au mois de Juillet et d'Aôut 1924 il m'a été possible de faire des fouilles très minutieuses dans les contrées mentionnées, apellées par Lartet[2]) couches *de Lisan,* et données par lui comme absolument dépourvues de fossiles. L'inéxactitude de cette opinion fut bien démontrée par Noetling.[1]) Mes fouilles ont été faites dans les gîsements fossilifères de Noetling (à l'est de Samach) sur toute rive sud du lac *de Genezareth,* sur la rive ouest de ce dernier entre la sortie du lac, *le Jourdain* et le village *Kinereth,* ainsi que sur la route dans la même direction, enfin dans de belles coupes naturelles se trouvant près de kvuca Daganea Alef, sionistique, où j'ai trouvé de beaux fossiles, surtout de grands *Limnaeus,* Ancylus et Melanopsis. Le séjour dans cette contrée m'a été facilité par les *Sionistes* de la kvuca, des ouvriers à Daganea Alef et le voyage gratuit, qui m'a été octroyé par la société royale roumaine: „*Serviciul Maritime Romane*".

La classification chronologique de ces couches „*de Lisan*", fut établie par Blanckenhorn dans diverses publications, réunies définitivement en 1914.[3])

Selon Blanckenhorn les couches en question appartiennent au stade culminant de la grande époque pluviale, contemporaine de la IIe époque glaciale *ou Mindéline* de l'Europe centrale, c'est-à-dire, au pleistocène inférieur dans la conception la plus large du mot (mais n'y comptant pas absolument le pleistocène le plus ancien ou les soit-disant pliocène supérieur.

Noetling[1]), cite la coupe naturelle suivante se trouvant à 1 *km* à l'Est de Samach.

a'': 2 *m:* marne, identique au point de vue petrographique aux couches *a*, *a'*.

b': 1 *m:* gravier, ressemblant à la couche *b*, nids de sable sans faune.

a': 2 *m:* marne, identique au point de vue petrographique à la couche *a*.

b: 1—4 *dm:* gravier, formé de pierres de feu et de cailloux de calcaires crétacés, *faune.*

a: 4—4½ *m:* marne, brun clair ou gris brun foncé, sablonneuse ou terreuse, de goût salé formée de couches si minces comme le papier, cristaux de gypse.

(*s* = gravier lithoral, niveau du lac.)

Cet auteur mentionne une autre coupe naturelle semblable près de El Hamijan située à 25 *km* au sud de Samach dans la partie inférieure de la vallée de Jarmak (Hieronae).

c': ?

c: 30 *m:* Lave de Rukkad.

b: 2—3 *m:* graviers, formés pour la plupart de cailloux basaltiques atteignant parfois une grandeur de 1 m^3, peu de calcaire dilaté, *faune.*

a: 2—3: cailloux crétacés (Sénon inférieur).

Niveau de la rivière Jarmuk (Hieromax).

Niveau du lac Genezaréth: 30 *m.*

Noetling, éconduit en général par la classification inique d'une espèce *Theodoxis* (chalucina sp. n.) la prennant pour *Theodoxis Jordani Buttl* et d'*Ancylus* pour la sp. *cf fluviatilis* L. fixe l'âge de ces cailloux terreux dans la période d'alluvium (1, 818/11).

L'insufisance de sa collection peut être expliquée par les conditions incertaines dans la vallée de Jarmuk, durantes jusqu'à nos jours.

Blanckenhorn,[3]) comme nous l'avons déjà dit, les met au *mindélien* et la lave *de Rukkad* au *pleistocène moyen* et pluvial inférieur (glacial III. ou *rissien* de l'Europe centrale, strépyien préchelléen).

L'état sommaire de la faune de ces deux coupes de la vallée est d'après Noetling[1]) le suivant:

Samach:

1. *Melanopsis laevigata* Lam,
2. „ „ *var.*,
3. „ *prophetarum* Bourg,

1
1
1
1
1
2

3
3
3
3
3
3
3

4
5
6
6
6
6

7
7
7
7
8

periode géologique:	ainsi de l'origine:	
actuel et holocène		végétale et aeolithique
pleistocène:		
supérieur: (holocène?) pleistocène		aeolithique (et végétale)
inférieur: mindelien = II. glacial		sediment de terasse
pleistocène le plus âgé pliocène supérieur.	I. interglacial = günzmündelien	aeolithique (et végétale).
	? de motif mentionné.	? car on n'y a pas trouvé de faune même dans les couches inférieures.

Ma coupe Ie justement au-dessous de Samach est suivante:

1. *L'argile récente de loess* (sol arable) ½ m
2. *Loess claire* (blanchâtre) Im: *Coquilles xerophytiques*. nombreuses.
3. *L'argile grise* (quelque part lits de cailloux). 1½ m: *Coquilles aquatiques* (et terrestres) très rares.
4. *cailloux et sable*[1] 1½m: *coquilles aquatiques*
5. *L'argile de loess:*
   a) 1½ m *compacte, dure, coquilles xerophitiques*
   b) ½ m en couches très minces dé ½—1 mm.

4. *Melanopsis buccinoidea* Bourg,
5. *Theodoxis Jordani Buttl,*
6. *Ancylus sp. f. fluviatilis,*
7. *Limnaea* sp.,
8. *Helix* 3 sp.

El Hawijan au-dessus de Jarmuk:

1. *Melanopsis minutula* Bourg,
2. „ *faseolaria* Parr,
3. „ *jebusitica* Let et *var. curta*
4. „ *jordanica* Roth,
5. „ *ovum* Bourg,
6. „ *Saulcyi* Bourg,
7. „ *Noetlingi* Bourg,

1. *L'argile récente de loess:*

Le chamsin y cause de grands orages de poussière aux mois de sécheresse d'été, où la végétation d'herbes et de plantes disparaît

2. *Le loess clair (blanchâtre):*

Contient *la faune xerophytique*; jamais mélée avec la faune aquatique. On n'y a trouvé ni de débris préhistoriques, ni d'outils métalliques. Ainsi il appartient soit au holocène le plus âgé, soit au pleistocène le plus récent

3. et 4. *Sediment de terasses de pleistocène (IIe glacial):*

L'argile dans la partie supérieure, du sable et cailloux dans la partie inférieure. Coquilles des mollusques aquatiques décrites pour la première fois dans l'oeuvre mentionné de Noetling.

5. *L'argile de loess.*

Il est évident qu'elle est aussi végetale comme No Ie

Une nouvelle découverte est la faune des *mollusques xerophytes* de l'espèce *Helix,* subgen. *Xerophyla* dans la couche supérieure, très dure.

Cet endurcissement a été proba-

blement causé d'une part par les grandes pluies pluviales (dans le sens le plus stricte du mot fluvial), d'autre part par le suientement de l'eau

La coupe I.: La rive sud du lac *de Genezareth* au desous de Samach.

pendant la période des inondations des terasses. L'âge géologique de cette couche répond à l'interpluvial (= Interglacial Günz-Mindélien).

On en fera une élaboration indépendante. Déjà N o e t l i n g[1]) a mentionné la structure bien particulière des minces couches de $\frac{1}{2}$—1 *mm* de la couche inférieure et moi j'en ai aussi trouvé sur la rive gauche de *Jourdain* vis-à-vis de *Melhamie.*

6. La base de cette couche m'est inconnue. Ce seront des cailloux probablement, peut être en conglomérat, comme on en trouve au bord ouest du lac de *Genezareth.* Pour compléter nos recherches nous examinerons quelques coupes aux environs les plus proches.*)

1. *argile récente* (de loess et végétale) *blanchâtre:* 1 *m, coquilles xerophytes, débris préhistoriques*;

2. *argile gris-blanche:* 1 *m coquilles aquatiques* (et terrestre);

3. *cailloux et sable:* $\frac{1}{2}$ *m coquilles seulement aquatiques*;

4. *argile sableuse:* $\frac{3}{4}$ *m*;

5. *argile gris-blanche:* $1\frac{1}{2}$ *m,* en couches très minces de $\frac{1}{2}$ *mm*;

6. *argile gris-blanche compacte:* $\frac{1}{4}$—$\frac{1}{2}$ *m coquilles* (Helix Xerophylla) bien *rares.***)

*) La coupe II près de l'écoulement de la rivière au bord du sud *du lac de Genezareth.*

**) Il m'était impossible de penétrer plus loin à cause des conditions dangereuses qui régnent dans ces contrées.

Dans cette coupe manque la 2e couche de la Ie coupe. Le reste y est adéquate. Mais il y a deux sortes de *mollusques aquatiques* différentes de ceux de la couche 2 et 3 de la coupe II.

La coupe II.: l'écoulement *de Jourdain;* la rive sud.

Il *la faune aquatique* de la 2e coupe de la couche II diffère de la faune de la IIIe couche de la même coupe. C'est bien intéressant au point de vue stratigrafique que la 5e couche est supposée par une couche compacte.

Dans la coupe non loin d'ici on trouve le changement à tour de rôle suivant: *argile récente de loess et végétale:* ½ *m*; *argile compacte:* ½ *m*; *argile en couches de* ½ *mm:* ½ *m*; *argile compacte:* 1½ *m*; *argile en couches de* ½ *mm:* 1¼ *m*; *argile compacte:* 2 *m.*

La coupe III du rive près de l'écoulement de *Jourdain* du *lac de Genezaréth* à l'ouest.

1. *argile de loess et végétale:* 6 *m, débris préhistoriques* dans la couche la plus inférieure; *coquilles xerophytes*;

(2. quelque part des lits de sables et cailloux, secondairement localisés par une descente en travers d'une pente);

3. *argile gris-blanche stratifiée:* 2 *m*;§)

4. *sable* (et cailloutis (très fin) *de terasse:* ¾ *m*; *coquilles aquatiques*;

5. *argile gris-blanche compacte:* ? *m.*

La plus intéressante est la couche I, qui y atteint 6 *m*, elle contient à partir de la couche la plus inférieure aussi une *faune xerophyte* et en même temps des *outils en pierre de feu* et des *débris préhistoriques.*

Cette couche a été causée par le loess et sans doute aussi par l'action végétale comme le soit disant type: *Loess de vallée,* car elle se trouve sous

La coupe III.: du rive près de l'écoulement *de Jourdain du lac de Genezareth* à l'ouest.

La coupe IV.: *près de Daganea Alef* sur la rive gauche *de Jourdain.*

la pente des montagnes. Alors dans une direction analogue avec la deposition de nos loesses (vide K u š t a 4, P e t r b o k 5).

La coupe IV près de Daganea Alef sur la rive gauche de *Jourdain:*

1. *argile récente végetale (et de loess) blanchâtre:* ½ *m*—1 *m*; *coquilles xerophytes*;

2 couches changeantes des argiles blanchâtres compactes avec du sable très fin: 3½ *m*; *Ancylus Limnaeus*, dans les couches inférieures;

3. *sable et cailloutis* „cartique" stratification ondulée: ¼—½ *m*;

4. *argiles (de loess) compactes:* ? *m.*

Cette coupe découverte d'une manière magnifique par l'abaisement, complète les coupes precédentes. Sa 2e couche donne la preuve d'une sedimentation alternante de sable et d'argile et appartient avec la 3e couche à la période pluviale mindélienne. Cette coupe est très importante au point de vue faunistique, pour la richesse de coquilles bien conservées.

Voici la coupe près de Kinereth.:

1. *L'argile récente blanchâtre:* 1—1½ *m*, elle a été causée par le loess et la végétation, et contient des *coquilles xerophytes* et des *débris préhistoriques*;

2. *gros cailloutis de terasse:* 3 *m: sans coquilles*;

3. encore 1 *m* d'ici à la surface du lac.

Analyse palaeontologique.

Comme j'ai déjà remarqué, N o e t l i n g[1]) menacé par les *Bédouins*, pouvait seulement faire ses recherches en vol et ainsi il venait à soutenir que:

1. la faune pluviale (mindélienne) (chez lui, des couches de lisau au sens large du mot) de la terasse soit adéquate avec la faune récente de ce lac.

2. Il n'a pas exclu les *Melanopsis* sp. n. f. laevigata, des espèces à côtes. Mais nous savons déjà très bien que

1. la faune de cette terasse (mindélienne) pluviale ne contient pas même à présent des Unie ou Corbicules, ces espèces sont regardées comme la faune la plus récentes des terres *de Jourdain de Genezaréth.* (Déjà chez Noetling lui-même, p. 819.) Mes recherches cependant fournissaient des matériaux si riches, qu'il m'était possible de déterminer exactement l'„*Ancylus* sp. cf. *fluviatilis* de Noetling, et que j'étais aible de corriger la classification de Noetling du *Theodoxis Jordani* Buttl et finalement il m'était possible de trouver une nouvelle espèce *Melanopsis*, ne vivant nulle part aux environs;

2. J'ai trouvé beaucoup de forme à côtes de l'espèce Melanopsis.

Voici la liste des espéces, trouvées par moi dans la terasse pluviale mindélienne:

? 1.—3. *Limnaeus* 3 sp.,
† * 4. *Planorbis* sp.,
* 5. *Melanopsis costata* Oliv.,
6 „ *Jordanica* Roth,

† 7. *Melanopsis ovum*, Bourg,
† 8. ,, sp.,
9. ,, *buccinoidea*, Oliv.,
10. ,, *laevigata*, Lam,
† * 11. ,, ,, var.,
† 12. ,, *cf. minutula*, Bourg,
? * 13. *Bythinia* sp.,
? * 14. *Valvata* sp.,
† * 15. *Ancyllus daganeanus* sp. nov.,
† 16. *Theodoxis chalucina* sp. nov.

Ils s'y joignent encore les espèces collectionées par Noetling près de Samack et près du El Hawijan.

† 17. *Melanopsis prophetarum* Bourg,
† 18. ,, *jebusitica* Let.,
† 19. ,, ,, *var. curta*,
† 20. ,, *faseolaria* Parr,
† 21. ,, *Saulcyi* Bourg,
† 22. ,, *Noetlingi* Bourg,

sans mentionner les 3 espèces de Noetling du genus *Helix* et mes 3 *Achatinelles*. Des fossiles récents de *Genezaréth* il n'y étaient pas encore trouvés:

1. *Limnaea auricularia* L.,
2. ,, *virginea* Preston,
3. *Physa tiberiadensis* Preston,
4. *Melania tuberculata* Müll.,
5. ,, ,, *var. elongata* Loc.,
6. *Melanopsis costata* Ol. var. *degenerata* Preston,
7. *Pyrgula Barroisi* Dtz,
8. *Bythinia badiella* Parr,
9. ,, *genezarethensis* Prest.,
10. ,, *semakhensis* Prest.,
11. *Bythinella contempta* Dtz,
12. ,, *Annandallei* Prest.,
13. ,, *syngenes* Prest.,
14. ,, *gallilaee* Prest.,
15. ,, *vexillum* Prest.,
? 16. *Valvata Saulcyi* Bourg,
17. *Theodoxis Jordani* Som.,
18. ,, *Bellardi* (Mons),
19. ,, ,, var *Michoni* (Bourg).

Neritina (Theodoxis) chalucina sp. n.

1886.*) *Theodoxia Jordani* Buttl: Noetling (lit. num. 1.).
1897/8. *Neritina Jordani* Sow.: Blanckenhorn (lit. num. 6.).

Testa persolida, crassa, semiglobosa (in vivo verosimiliter nitidula). Umbilico nullo. Colore obscuro, violaceo, fasciis longitudinalibus distinctis variegato. Apice haud prominente (in nonnullis speciminibus tantum magis distincto). Anfractus 3, celeriter crescentes, ultimus solus fere totam testam formans. Apertura semicircularis margine acuto. Columella excepto lato margine recto edentato.

Longit. = 12 *mm*, *diam.* = 13 *mm*, *latit.* = 12 *mm*; *latit. excepti columellaris.* = 4—5 *mm:*

Les gîtes: Daganea I, Samach près du rive du sud du lac de *Genezaréth*. Formation fossile: pleistocène inférieur, terasse pluviale (mindélienne = IIe glacial).

Cette espèce est la plus grande des espèces de *Palestina* connues jusqu'à prèsent, elle ne vit point à *Genezaréth* (et je ne l'ai point trouvé ni à *Kischon* ni à *Jarkon*).

Il faut aussi garder la reserve la plus grande quant à la détermination de Noetling de l'espèce *Theodoxis fluviatilis* Buttl „besonders schön und gross aus *Jarmuk*".

Voici un apperçu à comparer les deux espèces:

Theodoxis Jordani:	*Theodoxis chalucina:*
forme fondamentale: conoïde coupée	hémisphérique
dernier vis: plat	vôuté
le sommet: un quart de hauteur de la coquille au-dessus de l'embouchure	un peu elevé
l'em bouchure: plus verticale, étroite et longue	plus oblique et plus large, pour cela plus courte.

Blanckenhorn a simplement pris la détermination de Noetling mais il ne l'a pas documentée par ses recherches propres.

Des autres espèces du subgenus *Theodoxis* dans la contrée de *Jourdain* vivent[7]):

Theodoxis Jordani (Sowerby),
„ *Bellardi* (Mousson),
„ „ var. *Michoni* (Brgt).

Dans la Syrie entière alors:
Neritina Orontis Blanckenhorn,
„ *Karasuna* Mousson.

Theodoxis chalucina diffère de la *Theodoxis Orontis* tantôt par la grandeur, ensuite par un sommet plus étroit, chez celui-ci $^1/_3$ de hauteur (et par l'embouchure hémisphérique) (chez celui-ci oblongue), *Theodoxis Karasuna* est plus large que haute (7 *mm*, 6 *mm*).

Ancylus (Ancylastrum M.-T.) Daganeanus sp. n.

1886. *Ancylus sp. cf. fluviatilis* L.: Noetling (lit. num. 1).
(1897/8. *Ancylus sp. cf. fluviatilis* L.: Blanckenhorn (lit. num. 6.)

Texta mitriformis tenuis sed solidula laminis plus-minusve prominentibus (hic illic fere imbricatis); apice plus — minusve prominente, nonnunquam tamen fere inconspicuo, saepe ad latera complanato, apertura ideo margine evoluto. Testa haud convexa. Spira seu a margine usque ad $^1/_3$ distans seu illo superposita, assymetria variabili.

Dimensiones: 8—6 —3 *mm*
7—5½—3½ ,,
6—5 —3½ ,,
7—5½—3½ ,,

Ab *Ancylo fluviatili* differt: humilior, magis circinatus.

Habitat: Daganea Alef, Samach ad ripam meridionalem lacus de *Genezaréth. Fossilis:* plistocaen inferior: terassa pluvialis = glacial II. = mindelien.

Noetling lui-même ne croyait pas que la classification de ses exemplaires de cet *Ancylus fluviatilis* L. soit juste, et pourcela il les determine comme *sp. cf. fluviatilis* et écrit sur ce sujet les mots suivants: „Häufig ist ein kleiner *Ancylus*, der sich der Form nach von dem *Ancylus fluviatilis* nicht zu unterscheiden scheint, doch ist das mir vorliegende Material zu dürftig, um sicheres darüber entscheiden zu können."

Les figures des exemplaires de Noetling nro 14, 14a planche XXIII, la lit. cité sous nro I. donnent déjà l'idée d'une forme toute indépendante de l'*Ancylus fluviatilis* par ses contours, par la disposition du sommet et par les raies concentriques de ses croîts.

Ce qui est remarquable chez cette espèce c'est le polymorfism individuel, qui m'est tout à fait inconnu parmi les gîtes plistocènes récentes (La Bohême Poříčany près de Český Brod).

Blanckenhorn (lit, nro 6 page 141) met injustement la découverte de ce Ancylus de Noetling faite à *Samach* comme trouvaille du cailloutis diluvial antérieur de *Wadi Jarmuk*, quoique Noetling n'y en a jamais trouvé de cette espèce.

Melanopsis laevigata Lam var. crassissima var. n.

Testa oblongo-ovata, persolida, laevis. Anfractus ad 5—7 (numerus propter anfractus initiales corrosos incertus) modice convexi, media parte subplani, ultimus 23 *mm* altus (testa 28½ *mm* alta). Apertura symmetrica pariete aperturali callo percrasso obtuso instructa coarctata. Columella dextrorsa cum margine externo aperturae canalicullum profundum praebens.

Alt. = 28½ *mm, latit.* = 14 *mm, altit.:* usque ad aperturam = 16 *mm, apertura: longit.* = 16 *mm, latit.* = 6 *mm, longit.* usque ad callum = 13 *mm.*

Habitat: *Daganea Alef. Fossilis:* plistocaen inferior: terassa pluvialis = glacial II. = mindelien.

Je me décide pour cette classification à l'espèce *Melanopsis laevigata* à cause de la relation de l'hauteur verticale de l'embouchure à l'hauteur

de la coquille et à la forme de l'embouchure qui est chez *Melanopsis prophetarum* Bourg prolongée en bas à droite et son hauteur verticale surpasse l'embouchure de ½ de l'hauteur de la coquille. *Melanopsis buccinoidea* (l. sp. Bourg chez Noetling et Kobelt) est plus dégagé.

Enfin il n'est impossible que cette *var. crassissima* var., n. pourrait être soutenue comme une espèce indépendante, car par son hauteur (de 28½ *mm*) elle est adéquate à *Melanopsis buccinoidea* Ol. sp. (28½ *mm*), mais la forme en entier et la relation de l'hauteur à la largeur (chez. bucc. 28½ : 11, chez. laevig. 20—24 : 10—11) est autre.

Il n'y a pas absolument des relations morphologiques entre la *Melanopsis crassitesta Blanckenhorn* pliocène, décrite par celui-ci comme de *Dzisr-es-Sur*, quoique la relation de l'hauteur à la largeur, 19 : 11 est ici de nouveau toute différente. Kobelt fixe *Melanopsis buccinoidea* et *Melanopsis laevigata* Lam. comme variante de *Melanopsis praerosa* L.

Melanopsis Jordanica Roth.

(1839: *Melanopsis costata* Ol. sp. *var. Jordanica* Roth) (Moll. spec. p. 25, tab. 2, fig. 12—13).

1886: *Melanopsis Jordanica* Roth: Noetling (lit. num. 1).

1897/8: *Melanopsis Jordanica* Roth: Blanckenhorn (lit. num. 6).

Cette espèce mentionnée par Noetling[1]) de l'*Hawijan* et *Jarmuk*, alors dans la terasse pluviale (mindélienne) proprement dite, de la même eau *(Jourdain)* est très abondante dans la coupe III. près de *Daganea* ensemble avec son propre type. Noetling cite encore *Melanopsis jordanica* Roth var. (pl. XXIII, fig. 7) originaire de El. *Hawijan*, sans la décrire dans le texte.

Melanopsis costata Olivier.

Une nouvelle découverte de la terasse pluviale de *Jourdain*.

On a déjà depuis longtemps fixé l'attention (Sandberger 1875, Hoernes 1876, Brusina 1884, Penecke 1884, Boettger 1884, Oppenheim 1890, Blanckenhorn 1897/8) sur les différences des formes décrites sous cette (collective) espèce et une fois il sera nécessaire d'élaborer en monographie tous ces materiaux fossilles et récents. Parmi les conglomérats du pleistocène près de Antakije au cour inférieur du fleuve *Orontes* (l. c. 6. p. 130) et dans les couches de lissane aux alentours de la *Mer Morte* suivant *Tristran* (ibid.).

Mes exemplaires sont minces aux côtes voûtées. J'en ai trouvé des récentes à partir de *Daganea* jusqu'à l'embouchure *du Jourdain* dans *la Mer Morte* sur les racines nageantes des arbres.

Melanopsis ovum Bourg.

1886: *Melanopsis ovum* Bourg. Noetling (lit. cit. I.).

1887/8: *Melanopsis ovum* Bourg: Blanckenhorn (lit. cit. 6).

Citée par Noetling comme originaire de *El Hawijan* au-dessus de *Jarmuk*, alors dans la terasse pluviale (Mindélien) pas très abondante dans toutes les coupes (I, II, III) près de Daganea. Bourguignat, Locard et Noetling la citent comme très abondante, moi, je n'en ai pas trouvé depuis Samach jusqu'à *Kinereth*.

Melanopsis sp.

Testa acutissima. Anfractus 10 plani costis primo obsoletis antice prominentibus media parte distinctissimis sinistrorsis iunctim columella involutis nodulis destitutis ornati.

Testa: altit.: 22 *mm, latit.:* 10 *mm.*

Anfractus ultimi: altit.: 15 *mm, apertura* 11 *mm* alta.

Testa pulcherrima ab illa *Melanopsidis Noetlingi* Bourg differt costis nodulis destitutis et superficie plana.

Habitat: Daganea Alef. Fossilis: plistocaen inferior.: terasa pluvialis = glacial II. = mindelien.

Melanopsis cf. minutula Bourg.

1886. *Melanopsis minutula* Bourg Noetling (lit. cit. 1).

1887/8. *Melanopsis minutula* Bourg. Blanckenhorn (lit. cit. 6).

J'en ai trouvé un seul exemplaire pas développé d'une grandeur de quatre millimètres à peine, mais seulement à 6 vis. Une autre également petite est celle de Blanckenhorn *Melanopsis minima* n. mut. toute développée d'une grandeur de 6—7 millimetres ; mais la *Melanopsis minutula* Bourg a le dernier vis surpassant la moitié de l'hauteur de la coquille entière. Sans doute il n'est pas exclu, qu'il s'agit d'un type indépendent, mais d'un seul exemplaire sans material comparatif, on n'en peut encore dire rien d'exact.

Gîte: *Daganea Alef* fossille dans la terasse pluviale (mindélienne = II. glaciale). Ainsi pleistocène inférieure.

Noetling cite encore dans la terasse pluviale près de *El Hawijan* au-dessus de *Jarmuk* les suivantes espèces du genus *Melanopsis: Noetlingi* Bourg, *minutula* Bourg, *Jebusitica* Letourneux, *Saulcyi* Bourg, *faseolaria* Parreus.

J'ai collectionné dans la terasse pluviale mindélienne près de *Daganea* dans toutes mes trois coupes plusieures formes du genus Melanopsis, mais faute de littérature spéciale je n'en peux pas donner une détermination exacte et je garde ces materiaux pour mes travaux futures.

Planorbis sp.

Le dernier vis d'un *Planorbis* minuscul, peut être *Planorbis* L. sp. cité par Blanckenhorn (lit. cit. 6) comme appartennant aupliocène

près de *Harf Ram el-Kabsch* dans *Antilibanon,* s'est reduit en poussière, avant qu'il m'eût été possible de le mettre dans l'éprouvette.

Limnaeus 3 petites espèces, que je ne peux pas classifier faute de littérature.

Dans l'argile grise (3 couche I. coupe près de Samach) j'ai encore trouvé *Bythinia* sp., *Valvata* sp. (*F. Saulcyi* Bourg) et 3 espèces *d'Achatinelles.*

Je remet l'estimation palaeontologique pour mon travail future.

Littérature:

1. Fritz Noetling: *Ueber die Lagerungsverhältnisse einer quartären Fauna im Gebiete des Jordanthals.* Zeitschrift der Deutsch. geol. Ges. 1886.

2. Lartet: *Exploration géologique de la Mer Morte.*

3. Blanckenhorn M.: *Syrien, Arabien und Mesopotamien* (Handbuch der Reg. Geologie. V. sv. 4. odd. Heidelberg 1914).

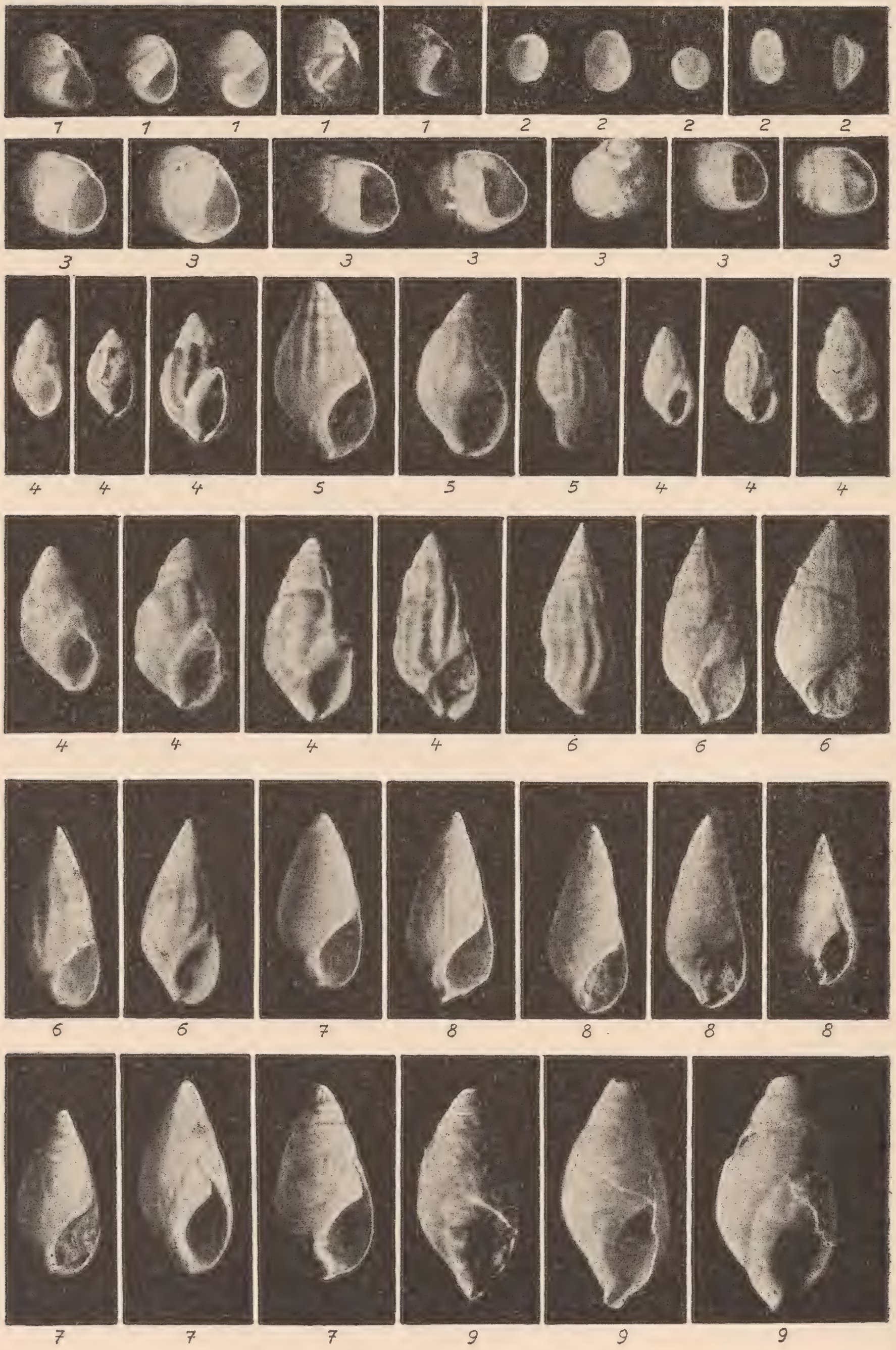
4. Kušta: Příspěvky ku geologii českého diluvia. (Věstn. král. České Spol. Nauk. 1895.)

5. Petrbok Jar.: *Plistocaenní černozem.* (Památky archeologické. Praha 1925. V tisku.)

6. Blanckenhorn M.: *Zur Kenntniss der Süsswasserabalgerungen und Mollusken Syriens* (Palaeontographica. Stuttgart. 1879).

7. Annandale N,: *The Distribution and Origin of the Fauna of the Jordan River-System with special reference tot hal of the Lake of Tiberias* (*Journal and Proceedings of the Asiatic Society of Bengal.* Calcutta. 1916).

8. Kobelt W. Dr.: *Illustrirtes Conchylienbuch* I. sv. 121 str.



1. *Theodoxis Jordanica* Buttl recent. Lac de Genezareth. — 2. *Ancylus Daganeanus sp. n.* plistoc. Daganea Alef. — 3. *Theodoxis chalucina sp. n.* plistoc. Daganea Alef. — 4. *Melanopsis jordanica Roth* plistoc. Daganea A. Samach. — 5. *Melanopsis ovum* Bourg. plistoc. Daganea Alef. — 6. *Melanopsis sp.* plistoc. Daganea Alef. — 7. *Melanopsis laevigata Lam* plistoc. Daganea Alef. — 8. *Melanopsis buccinoidea Bourg.* plistoc. Daganea Alef. — 9. *Melanopsis laevigata var. crassissima var. n.* plistoc. Daganea Alef.

Détermination du degré économique de la compression et de la détente dans les machines à vapeur.

Par

JAN ZVONÍČEK (Prague).

Avec 4 figures.

Présenté le 6 Février 1925.

Dans la méthode ci-décrite, on suppose la connaissance du nombre c_i de *kg* de vapeur, consommés par cheval-heure indiqué sur le piston de la machine, d'où on peut calculer le rendement thermodynamique indiqué η_i c.-à-d. le quotient du nombre de calories $= \frac{632}{c_i}$, transformées en travail de chaque *kg* de vapeur, par le nombre de calories H, transformables dans une machine idéale d'après le cycle de Rankine. On détermine H au moyen du graphique de Mollier, où, en abscisses, sont portées les valeurs d'entropie S; en ordonnées, les valeurs de la chaleur totale I (fig. 1), et d'où on calcule $\eta_i = \frac{632}{c_i H}$.

En outre, on suppose la connaissance du rendement mécanique (organique) η_m (le quotient du travail effectif par le travail indiqué) ou du rendement thermodynamique effectif $\eta_u = \eta_i \eta_m$.

Ces coefficients étant bien connus par de nombreux essais, faits sur les divers types de machines à vapeur de différentes puissances, c'est pourquoi l'auteur les a choisis comme base de cette étude.

A. Degré économique de compression.

Si, durant la periode de compression la plus économique, on surajoute une quantité supplémentaire de vapeur $d\,q$, on reserve ainsi une autre quantitée de vapeur fraîche, avec laquelle la machine pourrait développer le travail nécessaire pour comprimer la quantité précedente $d\,q$. De cette

considération on peut déduire une méthode simple pour la détermination de la pression finale p_k comme suit:

Dans le graphique $I\,S$ (fig. 1) où le point a représente l'état de la vapeur d'admission et le point b l'état finale de détente adiabatique jusqu' à la contrepression, de sorte que $\overline{a\,b} = H$, on fait $\overline{a\,n} = \eta_u\,H = \eta_u\,.\,\overline{a\,b}$.

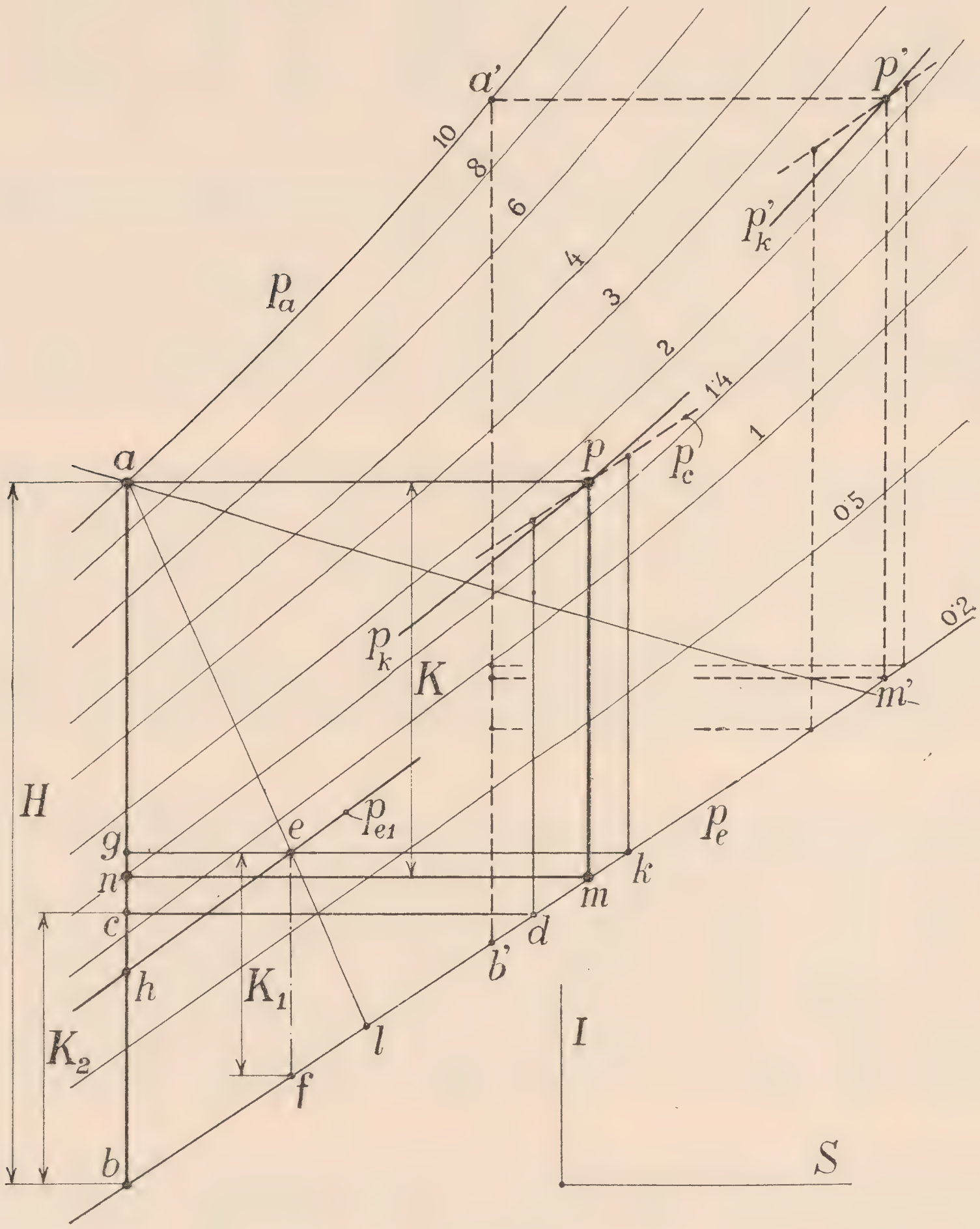


Fig. 1.

Une droite horizontale, menée du point n, détermine sur la ligne de contrepression le point m, voisin du point d, signifiant l'état moyen de la vapeur d'échappement. On prend ce point m pour l'origine de la ligne de compression. En portant sur la verticale $\overline{m\,p} = \eta_u\,\overline{a\,b}$, le point p détermine la pression finale p_k de la periode de compression. Dans ces circonstances l'état de la vapeur à la fin de la compression adiabatique $m\,p$ est identique avec l'état de la vapeur, qui entre au commencement de l'admission dans l'espace mort.

On peut analyser dans quelle mesure ce résultat dépend: 1⁰ de la position du point m, qui était évaluée d'une manière approchée sur la courbe de contrepression p_e, 2⁰ de l'écart entre le cours réel et le cours adiabatique pendant la periode de compression et 3⁰ de l'influence, que les pertes de chaleur par la paroi exercent sur l'exactitude et cette méthode. On a trouvé, que l'effet de ces trois causes est respectivement sans importance et qu'en outre ces influences se compensent en partie. Il résulte aussi de cela, qu'il faut abaisser la pression p_k, ainsi déterminée, si les organes de la distribution de vapeur ne sont pas sufisamment étanches, et au contraire, élever p_k, s'il est possible d'augmenter le nombre de révolutions de la machine comme suite d'une compression plus élevée.

Pour appliquer cette méthode à une machine à double expansion, il faut déterminer d'abord le rendement η_u de chacun des cylindres. Désignant par c_i le nombre de kg de vapeur, consommés par cheval-heure indiqué dans la machine entière, par N_{i1}, N_{i2} et N_i la puissance en chevaux indiqués respectivement du cylindre à haute pression, du cylindre à basse pression et de la machine entière, H_1 et H_2 le nombre de calories, transformables respectivement dans le cylindre à haute et à basse pression d'après le cycle idéal de Rankine, on calcule

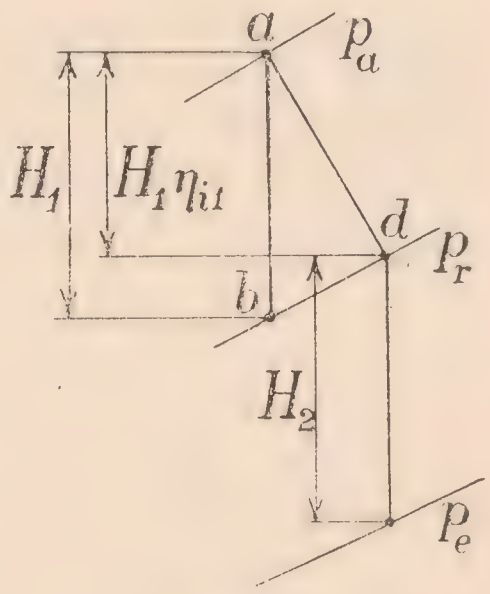


Fig. 2.

$$\eta_{i1} = \frac{632}{c_i H_1} \cdot \frac{N_i}{N_{i1}}, \qquad \eta_{i2} = \frac{632}{c_i H_2} \frac{N_i}{N_{i2}}.$$

H_1 et H_2 peuvent être determinés à l'aide de diagramme $I\,S$, fig. 2.

Puis

$$\eta_{u1} = \eta_{i1}\,\eta_m, \qquad \eta_{u2} = \eta_{i2}\,\eta_m,$$

où η_m signifie le rendement mécanique de la machine entière.

B. Degré économique de détente.

L_0, L_1 et L_2 désignent les pertes de travail en kgm pour un cycle complet dans la machine, causées respectivement par la détente incomplète, par les frottements et par les autres diverses causes. La condition du rendement maximum est:

$$\frac{d\,L_0}{d\,O} + \frac{d\,L_1}{d\,O} + \frac{d\,L_2}{d\,O} = 0 \qquad 1)$$

O représentant le volume du cylindre.

$$\frac{d\,L_0}{d\,O} = p_x; \qquad 2)$$

p_x signifiant la surpression à la fin de la détente, fig. 4.

$$-\frac{d\,L_1}{d\,O} = (1-\eta_m)\,p_x + (1-\eta_m-\alpha)\,p_i \qquad 3)$$

où p_i signifie la pression indiquée moyenne et le coefficient $\alpha = 0\ 01 \div 0\ 02$.

La perte L_2 dépend pour une partie, qui est égale à $\beta\,L_2$, de la surface P de paroi, pour le reste du volume O. La quantité de vapeur pour un cycle étant constante, on peut poser:

$$L_2 = p\,P^{\xi'} + o\,O^{\xi''}$$

et déterminer

$$\frac{d\,L_2}{d\,O} = \frac{L_2}{O}\left[\frac{2}{3}\,\beta\,\xi' + (1-\beta)\,\xi''\right] = \frac{L_2}{O}\,\xi. \qquad 4)$$

En considérant, que

$$-L_2 = (1-\eta_\alpha)\,p_i\,O,$$

où $\eta_\alpha = \dfrac{632}{c_i\,H_i} = \eta_i\,\dfrac{H}{H_i}$ représente le quotient du nombre de calories, transformées d'un $k\,g$ de vapeur dans la machine en travail indiqué, par le nombre de calories H_i, transformables dans une machine idéale, dont la perte est causée seulement par la détente incomplète, on obtient par la substitution dans 4)

$$-\frac{d\,L_2}{d\,O} = \xi\,(1-\eta_\alpha)\,p_i = \xi\,p_i\left(1-\eta_i\,\frac{H}{H_i}\right). \qquad 5)$$

Des relations 1, . . . 5, résulte

$$\frac{p_x}{p_i} = \frac{1-\alpha}{\eta_m} - 1 + \frac{\xi}{\eta_m}\left(1-\eta_i\,\frac{H}{H_i}\right) = C + \frac{\xi}{\eta_m}\left(1-\eta_i\,\frac{H}{H_i}\right) \qquad 6)$$

où le plus souvent $C = 0\ 085$.

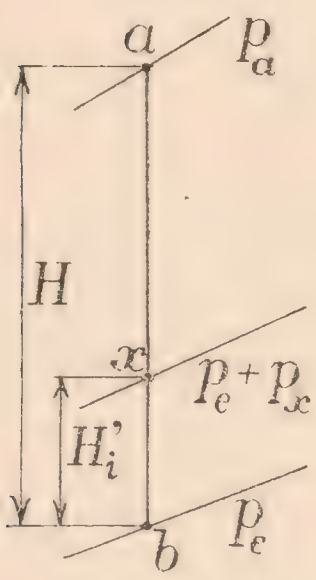


Fig. 3.

Si, à l'aide de diagramme $I\,S$ (fig. 3), on détermine H et H_i' — sachant que H_i' représente le nombre de calories transformables en travail d'après le cycle de Rankine, parcouru entre la pression $(p_e + p_x)$ et la contrepression p_e — et si l'on calcule H_i selon la relation

$$H_i = H - H_i' + 23.4\,p_x\,v_x,$$

où p_x et v_x signifient respectivement la pression et le volume spécifique au point x, on peut ainsi déterminer p_x:

Dans le diagramme $p\,v$ (fig. 4) on dessine la ligne de compression jusqu'à la pression p_k, calculée d'après la méthode A, et la ligne de détente. On choisit approximativement le point final m, détermine $\dfrac{p_x}{p_i} = \Pi$ et $C + \dfrac{\xi}{\eta_m}\left(1-\eta_i\,\dfrac{H}{H_i}\right) = \Phi$, et porte Π et Φ dans le diagramme voisin en dépendance de p_x. Si l'on repète ce procédé

pour plusieurs positions du point m, on obtient deux lignes Π et Φ, dont le point d'intersection fixe la pression cherchée p_x.

Le coefficient ζ dépend de ζ', ζ'' et β (relation 4). Pour les machines à simple expansion on a approximativement évalué: pour le cas de la vapeur saturée, $\zeta = 0{\cdot}65$, pour le cas de la vapeur surchauffée, $\zeta = 0{\cdot}75$.

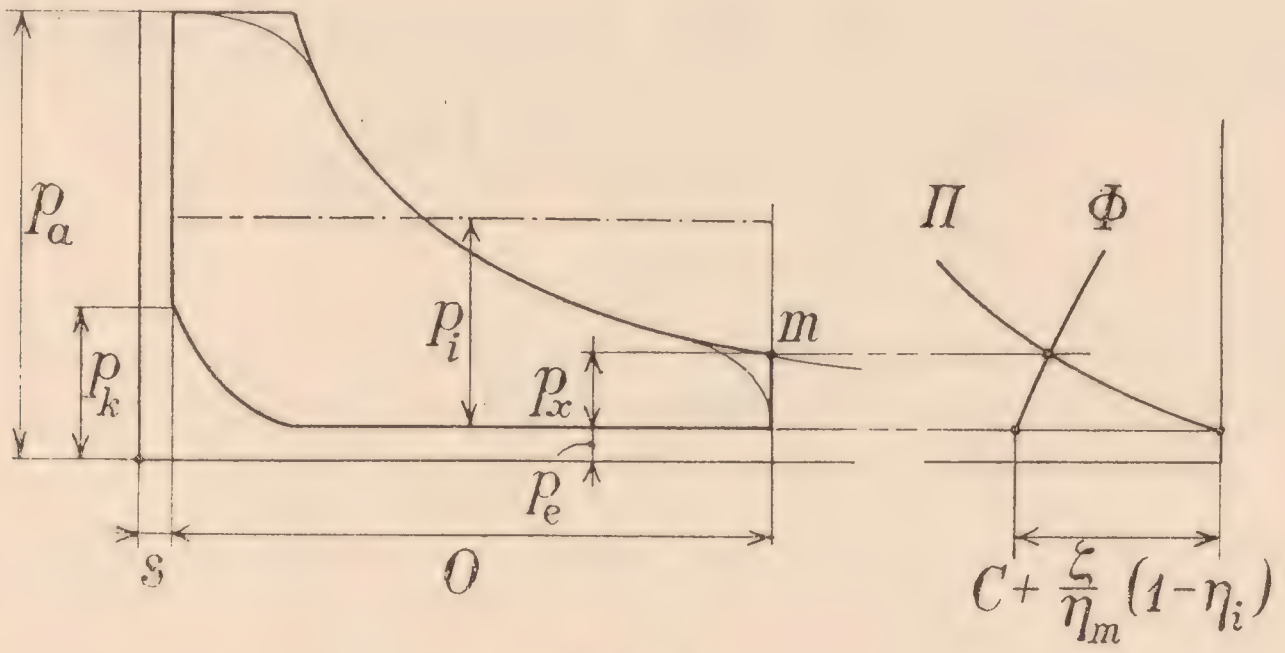


Fig. 4.

Pour les machines à double expansion la valeur de ζ est d'environ 0·8 de celle des machines précédentes. En générale, ζ diminue un peu, si l'espace mort est très étroit et si l'étancheité des organes de distribution est parfaite.

Il est possible de vérifier la valeur du coefficient ζ par les essais sur les machines à simple expansion. Les essais sur les machines à double expansion ne peuvent pas donner de résultats exacts, parce qu'on ne peut pas faire varier le volume du cylindre à haute pression avec la variation de la détente, comme il serait nécessaire pour maintenir invariable le rapport des puissances des deux cylindres. A cause de cela on obtiendrait de ces essais une valeur ζ trop élevée, approximativement égale à celle des machines à simple expansion.

Sur quelques formules linéaires de la théorie des fonctions théta.

Par

KAREL DUSL.

(Présenté le 20 mars 1925.)

1. Considérons d'abord les formules concernant les carrés des quatre fonctions théta élémentaires[1].)

$$\begin{aligned} \vartheta_3^2\,\vartheta_0^2\,(x) &= \vartheta_2^2\,\vartheta_1^2\,(x) + \vartheta_0^2\,\vartheta_3^2\,(x) \\ \vartheta_3^2\,\vartheta_1^2\,(x) &= \vartheta_2^2\,\vartheta_0^2\,(x) - \vartheta_0^2\,\vartheta_2^2\,(x) \end{aligned} \tag{I}$$

a) Quand toutes les quantités dans ces équations sont réelles posons:

$$\vartheta_0^2\,\lambda_1 = -\vartheta_0^2\,\lambda_2 = \vartheta_2^2 - \vartheta_3^2 \tag{1}$$

$$\vartheta_0^2\,(x) = \mathfrak{A} \times \mathfrak{X},\ \vartheta_1^2\,(x) = \mathfrak{B} \times \mathfrak{X},\ \frac{\vartheta_2^2\,(x)}{\lambda_1} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{X},\ \frac{\vartheta_3^2\,(x)}{\lambda_2} = \mathfrak{D} \times \mathfrak{X} \tag{2}$$

et:

$$\vartheta_0^2 = \alpha,\ \vartheta_2^2 = \gamma,\ \vartheta_3^2 = \delta \tag{3}$$

où figurent les produits scalaires des vecteurs réels $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ avec le vecteur réel auxiliaire $\mathfrak{X}$. Pour la valeur quelconque du vecteur $\mathfrak{X}$ on sait toujours déterminer les deux vecteurs $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ de sorte, qu'ils accomplissent les deux premières équations (2).

Après cette substitution et après la division par le vecteur $\mathfrak{X}$ les équations (I) prennent la forme:

$$\begin{aligned} \alpha\,\lambda_1\,\mathfrak{C}_1 &= \gamma\,\mathfrak{A} - \delta\,\mathfrak{B} \\ \alpha\,\lambda_2\,\vartheta_1 &= \delta\,\mathfrak{A} - \gamma\,\mathfrak{B} \end{aligned} \tag{II}$$

Tenant compte de l'équation (1) on voit, que les quatre vecteurs, qui figurent dans les dernières équations constituent un système de quatre vecteurs terminolinéaires[2]) et il est donc possible de substituer des points d'une ligne droite aux extrèmités de ces vecteurs. Les deux équations (II)

---

[1]) La même notation dans: Základy nauky o thetafunkcích de l'auteur. P. 304. — Whittaker-Watson: Analysis. 466.

[2]) Gibbs-Wilson: Vectoranalysis. 27.

deviennent alors les équations ponctuelles, où figurent des points avec leurs poids au sens du calcul barycentrique.

On déduit facilement que:

1. Les points considérés (A, B, C_1, D_1) appartiennent à une même ligne droite.

2. Les deux points C_1, D_1 sont situés symmétriquement au centre du segment $[A\,B]$.

3. Pour le produit extérieur $[C_1\,D_1]$ on tire des équations (II):

$$[C_1\,D_1] = -[A\,B]\left(\frac{\vartheta_2 - \vartheta_3}{\vartheta_0}\right)^2 \tag{4}$$

le résultat, qui montre, que les segments $[C_1\,D_1]$ et $[A,\,B]$ ont le sens opposé et que leur rapport en grandeur est égal au carré, qui figure dans l'équation (4).

b) Dans le domaine, dans lequel les fonctions théta, même pour les arguments nuls sont imaginaires on doit substituer dans les deux membres des équations (II) au lieu de vecteurs et scalaires réels des vecteurs imaginaires („bivecteurs" au sens de Gibbs)[3]) p. ex. $\mathfrak{A} + \mathrm{i}\,\mathfrak{A}_1$ et c. et des scalaires imaginaires p. ex. $\alpha + i\,\alpha_1$ à la place de α et c.

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire pure des équations (II) pour ces valeurs on a:

$$\begin{aligned}
\alpha\,\mathfrak{C} - \alpha_1\,\mathfrak{C}_1 &= \lambda_1\frac{\mathfrak{R}_1}{\lambda_1} = \gamma\,\mathfrak{A} - \delta\;\mathfrak{B} - \gamma_1\,\mathfrak{A}_1 + \delta_1\,\mathfrak{B}_1\\
\alpha_1\,\mathfrak{C} + \alpha\,\mathfrak{C}_1 &= \lambda_2\frac{\mathfrak{S}_1}{\lambda_2} = \gamma_1\,\mathfrak{A} - \delta_1\,\mathfrak{B} + \gamma\,\mathfrak{A}_1 - \delta\;\mathfrak{B}_1\\
\alpha\,\mathfrak{D} - \alpha_1\,\mathfrak{D}_1 &= \lambda_3\frac{\mathfrak{R}_2}{\lambda_3} = \delta\;\mathfrak{A} - \gamma\;\mathfrak{B} - \delta_1\,\mathfrak{A}_1 + \gamma_1\,\mathfrak{B}_1\\
\alpha_1\,\mathfrak{D} + \alpha\,\mathfrak{D} &= \lambda_4\frac{\mathfrak{S}_2}{\lambda_4} = \delta_1\,\mathfrak{A} - \gamma_1\,\mathfrak{B} + \delta\;\mathfrak{A}_1 - \gamma\;\mathfrak{B}_1
\end{aligned} \tag{III}$$

et

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\lambda_3 = \gamma - \delta - \gamma_1 + \delta_1\\
\lambda_2 &= -\lambda_4 = \gamma - \delta + \gamma_1 - \delta_1.
\end{aligned} \tag{5}$$

Les équations (III) constituent, en vertu des équations (5) un système de relations linéaires indépendentes de l'origine; il est alors permis de substituer aux vecteurs $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ $\frac{\mathfrak{R}_1}{\lambda_1}{}_1$ $\frac{\mathfrak{S}_1}{\lambda_2}$, $\frac{\mathfrak{R}_2}{\lambda_3}$, $\frac{\mathfrak{S}_2}{\lambda_4}$ leurs points — extrémités A, B, ... S_2. Ce seront alors deux tétraèdres: $[R_1, S_1, R_2, S_2]$, $[A, A_1, B, B_1]$ qui feront l'object de nos considérations.

On déduit facilement, en faisant les produits extérieurs correspondants dans les premiers membres de (III):

$$\lambda_1\,[R_1\,A] - \lambda_2\,[S_1\,A_1] - \lambda_3\,[R_2\,B] + \lambda_4\,[S_2\,B_1] = 0. \tag{6}$$

---

[3]) Gibbs-Wilson: Vectoranalysis 429.
Spielrein: Lehrbuch der Vektorrechnung. 41.

Les deux tétraèdres considerés sont alors situés hyperboliquement, parce que les droits $[R_1 A]$, $[S_1 A_1]$, $[R_2 B]$, $[S_2 B_1]$ appartiennent à un système de droits d'un hyperboloïde.[4]) Par le raisonement semblable on voit de suite, que les trois autres configurations de deux tétraèdres c. à d.:

$$\begin{bmatrix} R_1, S_1, R_2, S_2 \\ B, B_1, A, A_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} R_1, S_1, R_2, S_2 \\ A_1, A, B_1, B, \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} R_1, S_1, R_2, S_2 \\ B_1, B, A_1, A \end{bmatrix}$$

occupent la même position hyperbolique, en vertu de quoi nous pouvons énoncer le théorème: „*Il existe quatre manières distinctes de situer les tétraèdres* $[R_1, S_1, R_2, S_2]$ $[A, A_1, B, B_1]$ *hyperboliquement.*“

2. L'analyse des fonctions théta de deux arguments[5]) est beaucoup plus riche en formules linéaires diverses.

Quatre carrés de ces 16 fonctions distinctes, dont les caractéristiques constituent le système azygétique de Rosenhain, ou celui syzygétique de Göpel sont linéairement indépendent. Il est néanmoins possible, en vertu d'un théorème de Ch. Hermite,[6]) d'exprimer tout autre carré de fonction théta, linéairement au moyen de ces quatre carrés fondamentaux. — Les formules de Rosenhain sont à trois termes dans leurs seconds membres, tandis que les équations de Göpel en ont quatre.

a) Dans le domaine, où toutes les fonctions théta restent réelles, il est permis d'écrire dans les seconds membres de ces équations, au lieu de carrés des fonctions théta, des produits scalaires des vecteurs réels $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ et d'un vecteur auxiliaire $\mathfrak{X}$, et dans les premiers membres on introduit les coefficients scalaires (poids) égaux à la somme algébrique de ceux, dans les seconds membres. Les équations de Rosenhain et de Göpel se transforment par ce raisonement en des équations véctorielles linéaires *indépendentes de l'origine*[7]) qui sont susceptibles d'être remplacées par des équations *ponctuelles*, au point de vue du calcul barycentrique.

On est ainsi amené à considérer les points de l'espace par rapport à un tétraèdre fondamental, dont les sommets correspondent aux quatre carrés fondamentaux.

Les résultats sont différents, selon qu'on emploie les systèmes des équations de Rosenhain, on ceux de Göpel.

1. Pour les relations de Rosenhain[8]) on déduit:

Les points A', B', C', D', qui dépendent de quatre fonctions théta quelconques du système de Rosenhain et les points A, B, C, D correspondants a un autre système de Rosenhain des fonctions théta forment les

---

[4]) Jahnke: Vektorenrechnung. Leipzig 1905. 184.

[5]) Krazer: „Lehrbuch der Thetafunktionen“. P. 343. — Baker: „Abels Theorem“. 303. — Hudson: „Kummers Quartic Surface“. 175. — Forsyth: „Lectures et. c.“. 266.

[6]) Cl. Hermite: C. R. XL, 1855. P. 428

[7]) Gibbs-Wilson: Vectoranalysis, 27.

[8]) G. Rosenhain: „Abhandlung über die Funktionen zweier Variabler mit vier Perioden“. 1847. Ostwalds Klassiker 65. p. 64.

sommets de deux tétraèdres circonscrits et en même temps incerits l'un à l'autre c. à d. les deux tétraèdres en question sont des tétraèdres de Möbius.[9])

2. Gôpel exprime les 16 fonctions théta linéairement par les quatre fonctions T, U, V, W[10]) et les 16 équations expriment, que les tétraèdres correspondants au système de Göpel quelconque sont avec le tétraèdre $[T, U, V, W]$ dont les sommets dépendent de fonctions T, U, V, W situés quatre-fois hyperboliquement: configuration qu'avaient les tétraèdres $[R_1, S_1, R_2, S_2]$, $[A\ A_1\ B\ B_1]$ de l'article précedent.

b) Quand les fonctions théta ne restent pas dans le domaine réel on emploie au lieu de vecteurs réels les bivecteurs (au point de vue de Gibbs) et les scalaires imaginaires.

D'*un* système des équations, ou en déduit *deux* en séparant la partie réelle et imaginaire pure. Mais les deux parties du premier membre de chacune de ces équations se répartissent chacune *en deux* vecteurs *réels*, qui satisfont à un système d'équations identiques avec celles du cas réel. On a alors quatre couples de tétraèdres in- et circonscrits, ou quatrefois hyperboliques selon qu'on emploie le système caractéristiques de Rosenhain ou celui de Göpel.

3. Pour les fonctions théta dont les caractéristiques sont formées par des fractions au dénominateur trois[11]) les équations linéaires qui expriment p. ex. les thetaproduits „complets"[12]) au moyen de trois thetaproduits complets fondamentaux ont, — même dans le cas réel, des coefficients scalaires imaginaires (les racines troisièmes primitives de l'unité.[12]) En tous les cas on doit alors se servir de vectrens imaginaires (bivecteurs) et de coefficients imaginaires.

On obtient finalement les équations:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}'_1 - \mathfrak{A}_1 &= \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3 \\ \mathfrak{A}'_2 - \mathfrak{A}_1 &= (\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3)\cos q + (\mathfrak{B}_3 - \mathfrak{B}_2)\sin q \\ \mathfrak{A}'_3 - \mathfrak{A}_1 &= (\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3)\cos q - (\mathfrak{B}_3 - \mathfrak{B}_2)\sin q \end{aligned} \qquad \text{(IV)}$$

où $q = \frac{2\pi}{3}$

et des systèmes analogues. Les deux dernières équations (IV) correspondent à la rotation dite elliptique[13]) dans l'ellipse avec des diamètres conjugés $2(\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3)$, $2(\mathfrak{B}_3 - \mathfrak{B}_2)$. Les aires de cette ellipse comprises d'une part entre les vecteurs $\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3$ et $\mathfrak{A}'_2 - \mathfrak{A}_1$, d'autre part entre $\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3$ et $\mathfrak{A}'_3 - \mathfrak{A}_1$ représentent chacune un tiers de l'aire totale de l'ellipse.

---

[9]) J a h n k e: „Vectorenrechnung". 1905. 180.

[10]) A. G ö p e l: „Entwurf einer Theorie der Abelschen Transcendenten erster Ordnung". Ostwalds Klassiker. 67. P. 15.

[11]) A. K r a z e r: „Über Thetafunktionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind". M. Ann. 22.

[12]) A. K r a z e r: „Lehrbuch der Thetafunktionen". P. 389. P. 395.

[13]) G i b b s - W i l s o n: „Vectoranalysis". P. 431.

Cette transformation du bivecteur, de composantes $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$; $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ en bivecteur de composantes: $\mathfrak{A}'_1$, $\mathfrak{A}'_2$, $\mathfrak{A}'_3$; $\mathfrak{B}'_1$, $\mathfrak{B}'_2$, $\mathfrak{B}'_3$ doit être effectuée *par le tenseur imaginaire (bitenseur)* dont le déterminant est:

$$\mathfrak{T} + i\,\mathfrak{T}' = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & \tau, & \tau^2 \\ 1, & \tau^2, & \tau \end{vmatrix}, \quad \text{où } \tau = e^{\frac{2\pi i}{3}} \tag{V}$$

4. Tout cela doit être generalisé au point de vue du théorème de Ch. Hermite.[14]) Si l'on considère les fonctions théta de p-arguments àux caractéristiques rationelles avec le dénominateur commun r on peut énoncer le théorème:

„Dans l'espace de $r^p - 1$ dimensions, il est possible de donner à toutes les équations linéaires entre $r^p + 1$ de ces fonctions (puissances de fonctions théta et thétaproduits) une interpretation véctorielle indépendante de l'origine. Cela résulte de ce, que l'on peut toujours exprimer linéairement le $r^p + I^{ieme}$ vecteur au moyen de r^p vecteurs indépendants de façon, que l'équation resultante soit indépendante de l'origine.“

---

[14]) A. Baker: Abels Theorem. P. 452. — A. Krazer: Lehrbuch et. c. P. 182.

Evidences as to the real age of the Pectunculus sediments near Tel-Aviv in Palestine proving thus an oscillation of the Mediterranean sea level in historical times.

By

JAR. PETRBOK.

(Presented the 12th June 1925.)

Near Tel-Aviv, to the North of Jaffa, under the Mohamedan cimetery there are thick strata of marine deposits, consisting partly of sands and sandy clays, partly of solid shells conglomerates.

Pectunculus sediments near Tel-Aviv from the historical times.

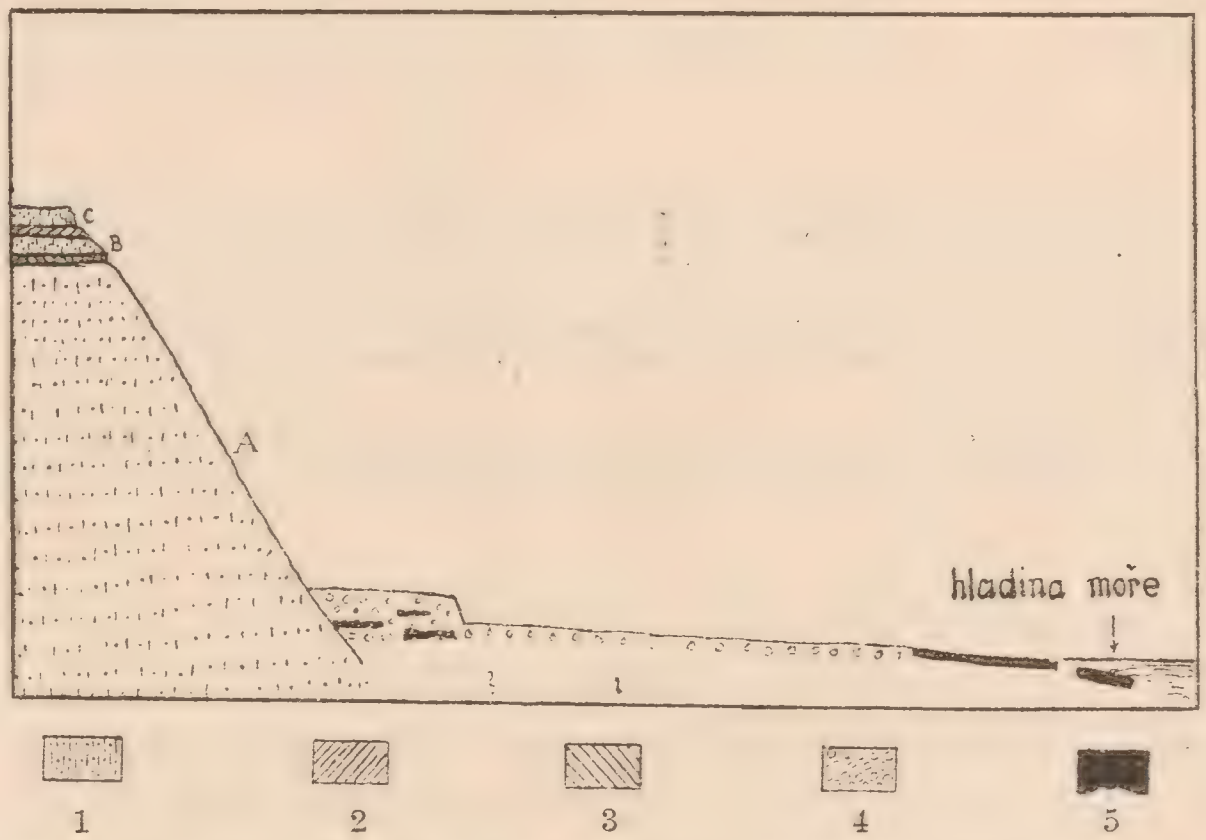
All these strata, and especially the sands and conglomerates are composed of milliards of shells, chiefly of *Pectunculus violaceus*, with a small

additional number of *Murex trunculus, Purpurea hemistoma, Natica millepunctata.* Other kinds are but scantily represented.

The section of these strata are as follows:

I. section:

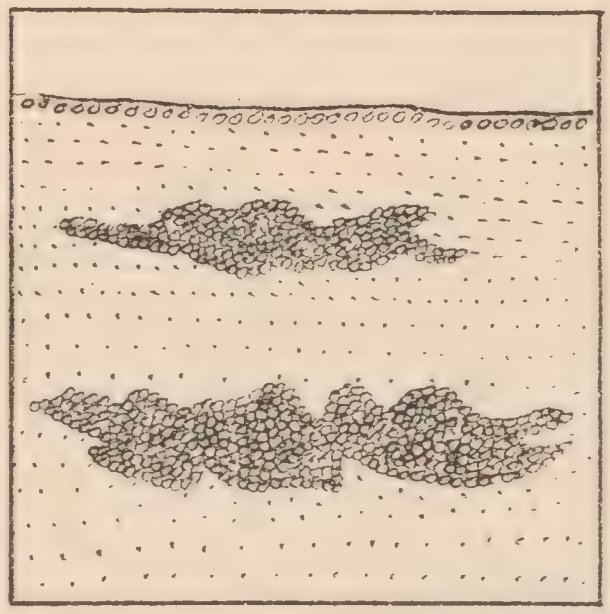
1. cruste A.
2. chamra 2.
3. chamra 1.
4. Pectunculus sediments looses.
5. Pectunculus conglomerats.



This section shows the position of the *Pectunculus sediments* in general and with regard to the other deposits.

II. section:

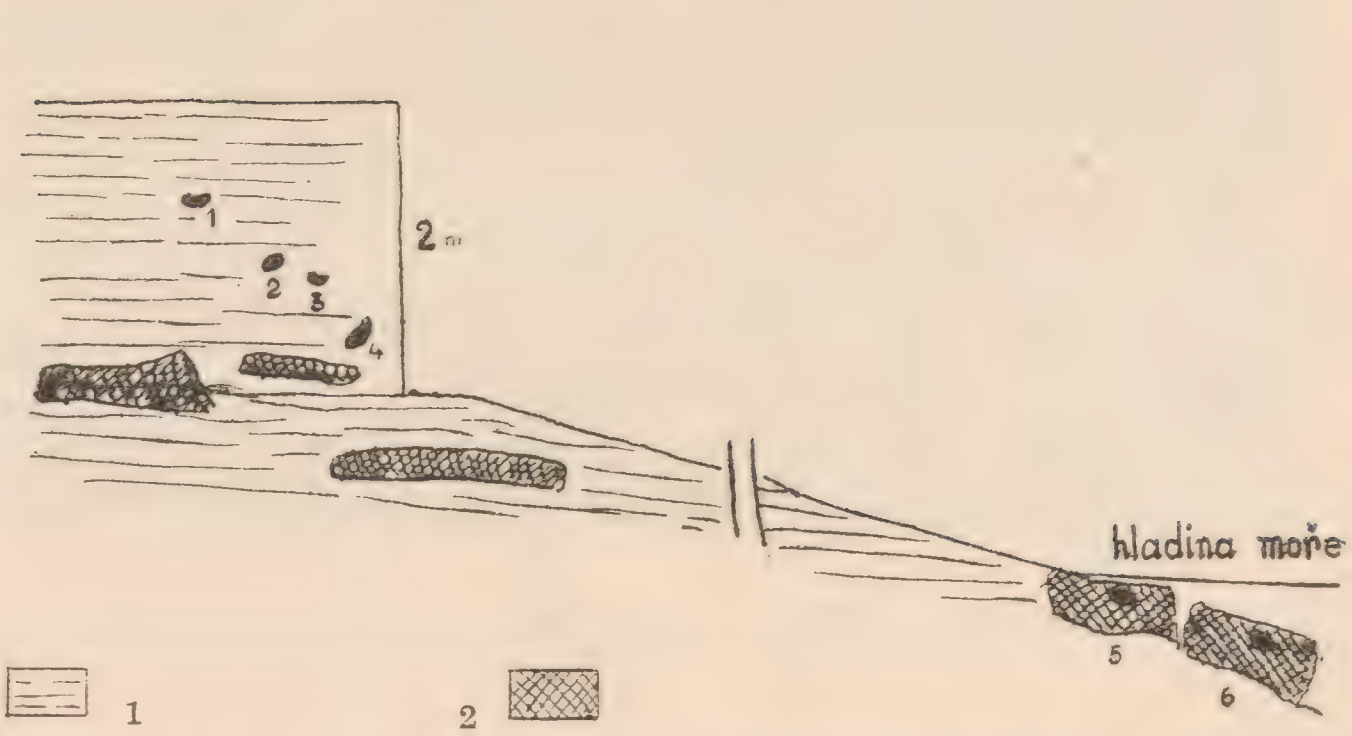
1. sand.
2. nestlike bed of Pectunculus violaceus.



This section shows a nestlike bed of the *Pectuncuuls sediments* in red clays (chamra ... terra rossa) and sands (marine sands).

III. section:

1. Pectunculus sediments looses.
2. Pectunculus conglomerats.
1—6. fragments of pottery.



In this section the principal layers of the *Pectunculus sediments* are exposed, showing the place where fragments of pottery of the historical period were discovered.

The geological age of these *Pectunculus sediments* can be determined from the first section by its relation to the crustated sand dune (crust A), as the *Pectunculus sediments* rest upon it, or by other evidential finds in the *Pectunculus sediments* themselves.

If we contend ourselves with the evidence furnished by this section, the real age cannot be determined, as we were not able to establish the geological age of the crust A in which no palaeontological and archaeological remains were discovered.

Young palaeolithic flint implements from Tel-Aviv ($^1/_1$).

If the *chamra* (terra rossa) is really of palaeolithic and young palaeolithic age, as it seems to be the case here, judging from the shapes of the flint implements we discowered (the precise chronology of the Palestine palaeolithic age has not yet been established), then the crust B is holocene, and that certainly of old holocene age, while the crust A is plistocene, of course in the widest sense.

Thus it would be ascertained beyond doubt that the Pectunculus sediments in question are younger than the crust A, but as we do not know the

exact stratigraphic position of the crust A, we cannot say whether these Pectunculus sediments are still plistocene or already holocene, especially as to-day they are no longer covered by any other sediments.

Last year already, I had discovered in these *Pectunculus sediments* and that just in their upper beds, fragments of pottery which indicate no great age.

As I had not time enough last year, I started this year with the digging and in the depth of up to $1\frac{1}{2}$ *m* I found fragments of tools and implements grinded by the break of the sea like pebbles.

1. As the horizontal position of the *Pectunculus sediments* has not been disturbed, and

2. as the fragments of the implements show a real mechanical action of the sea, they cannot represent a stratum or a pit of a time of culture, but:

These fragments of the implements were sedimentated at the same time as the Pectunculus beds.

And as these fragments of pottery cannot be older than the bronze age according to the clay used as material, to their manufacture (on the potter's wheel) and to their shape, these Pectunculus beds evidently belong to the most recent period of the holocene, to the historical era.

It is evident therefore, that *this oscillation of the Mediterranean sea level took place in historical times.* The lowering of the sea level measurable to-day amounts to about 3 *m*, and has to be supposed to have amounted to some 4 to 6 *m* more, the exact amount could be determined from the actual position of the Pectunculus conglomerates, which at the coast are to-day again below the sea level. There still remains the question as to the real geological age of the Pectunculus conglomerates.

As the third section shows, we find isolated banks of these conglomerates not only at the base of the Pectunculus sands here described, but also interbedded with them. But if we follow the border of the sea near Bath Galim, Tel-Aviv at the mouth of the river Jarkon (and doubtlessly elsewhere, too), we find consolidated conglomerates (resting near Bath Galim on Senonian limestones) composed partly of sand, partly of more or less fine grinded fragments of shells or of entire shells.

Together with them we find fragments of implements of historical times (just near Bath Galim), but no palaeolithic or mezolithic artefacts.

The origin of these conglomerates can be explained without difficulty. As in all sands deposited under water, these conglomerates formed within our sands at the time when they were still lying dry. But as soon as these sands and other not cemented materials had been carried away gradually by the raging waves at the rise of the sea level, these conglomerates at the base of the uncemented materials were exposed and to-day we find them so below the sea level along the coast.

And as their original place did not change, we can determine accurately

1. the former extension of the original sediments from the present coast,

2. the amount in meters of the relative rising of the sea level, especially during the historical era,

3. and of the subsequent subsidence of the land

4. and of the ultimate rise of the sea level after this subsidence.

In the places described the rest of the loose sediments correspond in their mechanical structure entirely to the conglomerates, to-day lying again below sea level.

Fragments of pottery of historical times.

Conclusions:

1. The uncemented Pectunculus sediments on the coast of Tel-Aviv contain fragments of pottery of the historical period, grinded by the brak of the waves. So they belong to the historical period.

2. The Pectunculus conglomerates likewise contain such fragments. They formed within the deposits mentioned sub 1. and belong therefore to the same age as they.

3. The denudation of these conglomerates by the break of the waves proves the rise of the sea level of the Mediterranean sea on the coast of Palestine in recent times, and so of course

4. an oscillation of the sea level during the historical era.

LITERATURE.

1. Blanckenhorn M.: *Syrien, Arabien u. Mesopotamien* (Handb. d. reg. Geol. V., 4. Heidelberg 1914).

2. Range P.: *Die Geologie der Küstenebene Palästinas.* (Zeitschr. d. Deutsch. Geol. Ges. 1921.)

3. Petrbok Jar.: *La signification de l'archéologie praehistorique pour la stratigraphie du caenozoicum le plus jeune.* (Congr. d'Inst. Internat. d'Anthropologie. Prague-Paris 1924).

4. *Petrbok Jar.*: *Stratigrafický doklad místní oscilace vodní hladiny Jadranu za holocaenu.* (Rozpravy Čes. akad. věd. II. tř. Praha 1922. XXXI. č. 4.)

5. *Schroetter H.*: *Das Tote Meer.* (Beitr. zur. physikal. Geographie u. Balneologie mit Bemerkungen zur Flora der Ufergelände.) Wien u. Leipzig 1924.

De la signification morphologique des métamorphoses anormales des éléments sexuals dans les fleurs pleines de Paeonia paradoxa Andr.

Par

Jan Vilhelm, prof. à l'univ. Charles IV (Prague).

(Avec 213 illustrations en 7 tableaux dans le texte.)

(Présenté le 8e Octobre 1925.)

Au mois de juin de cette année, un de mes élèves Mr. Dmytro Pasičnyk m'a apporté du jardin d'une villa à Černošice des fleurs pleines de la variété cultivée de *Paeonia paradoxa,* lesquelles étaient toutes soudées. En étudiant plus en détail ces fleurs anormales, j'ai constaté des faits spécialement intéressants relativement aux organes floraux modifiés. Sur les marchés aux fleurs pragois j'ai pu me procurer en quantité plus considérable des fleurs soudées et demi-pleines de cette espèce.

Les auteurs qui ont parlé jusqu'à présent de tératologie [Moquin-Bandon, Masters-Dammer, Penzig (1921)] disent seulement de cette espèce qu'on la cultive à fleurs pleines. C'est pourquoi j'ai étudié plus au long les métamorphoses des éléments sexuels, les organes androgynes, qui s'y recontrent avec une grande diversité de formes.

Dans les fleurs anormales de *Paeonia paradoxa* j'ai pu observer les irrégularités suivantes:

1. Prolification endocarpique. 2. Pleiotaxie. 3. Pétalomanie. 4. Hétéromorphie. 5. Pétalodie. 6. Enation. 7. Multiplication. 8. Epanodie. 9. Homotopie. 10. Métamorphose. 11. Métatypie. 12. Déformation. 13. Atrophie. 14. Adhérence. 15. Anthérophyllie. 16. Calycanthemie. 17. Archichloranthie. 18. Dégénération. 19. Avortion. 20. Distrophie. *21. Anthérocaepidie. 22. Carpidoantherie. 23. Carpidophyllie. 24. Carpidoplasie.* 25. Oolyse.

Je ne m'occuperai pas ici des métamorphoses des feuilles florales, bien qu'on en trouve chez la *Paeonia paradoxa* de nombreuses et de diverses formes. Quant aux métamorphoses anormales des éléments sexuels, je les ai divisées en trois groupes principaux.

I. *Eléments complètement mâles,*
II. *Eléments androgynes (hermaphrodites),*
III. *Eléments complètement femelles.*

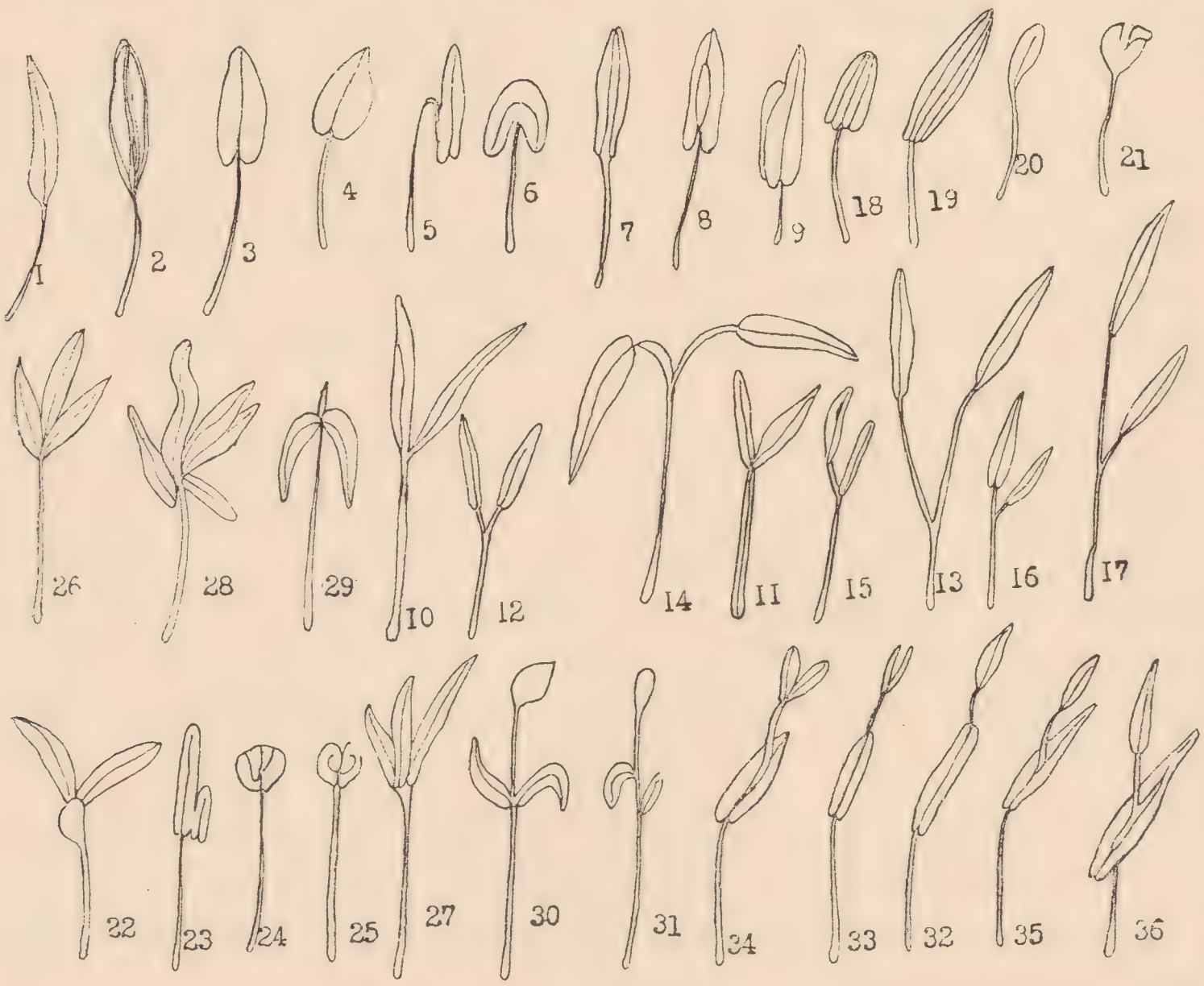
Les fleurs anormales, soudées et pleines de *Paeonia paradoxa* étaient le plus souvent composées de la manière suivante:

La fleur extérieure avait 5 sépales verts et 5 rouges rayés de vert pétalisés, puis quatre rangs de corolle composés chacun de cing pétales, ensuite de nombreuses étamines (de 200 à 325), dont quelques unes anomales, et derrière les quelles se trouvaient 5 pistils anormalement modifiés ou pétalisés à diféfrents stades de développement, puis encore 5 sépales pétaloïdes de la fleur soudée située à l'intérieur, présentant une structure verte rayée, suivis d'une couronne de quatre rangs, chacun de 5 pétales, ensuite de nombreuses étamines (de 100 à 160) montrant diverses modifications anormales ou pétalisées, enfin, au centre, de 2 à 3 rangs de 5 ou 4 pistils, anormalement modifiés dans la majorité des cas, présentant une ovaire ouverte ou développés en organes hermaphrodites de formes diverses, souvent aussi de forme pétaloïde ou dégénérés de façons différentes.

La fleur intérieure s'épanouissait de 2 à 5 jours plus tard que l'extérieure et la protogynie restait conservée dans ces fleurs soudées.

I. *Eléments sexuels completèment mâles.*

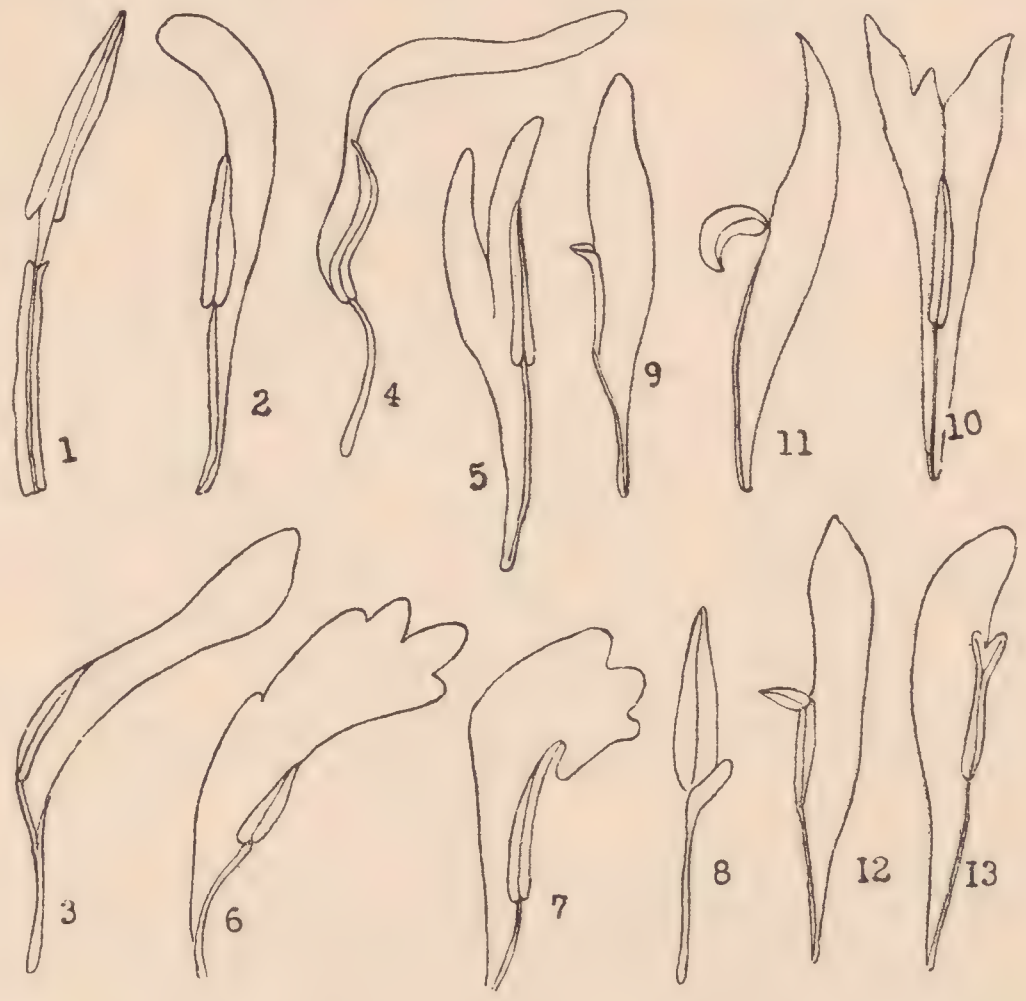
1. Les diverses anomalies observées chez les éléments de caratère purement mâles (1. Fig. I. 3—31), peuvent se rapporter, si la forme habituelle



1. Fig. I. Etamine normale de *Paeonia paradoxa* (1—2); étamines anormales de la même espèce, conservant habituellement la forme d'étamines mais avec l'anthère anormalement développée (3—31); étamines coudées (32—36).

de l'étamine est conservée, aux métamorphoses de la forme du filament, de l'anthère et du connectif. La nombre des thecae et des locumenta sur la même étamine peut être augmenté, ce qui est un témoignage d'atavisme (l. c. gymnospermes). La division et la soudure des filaments sont un phénomène fréquent que l'on rencontre aussi sur les feuilles végétatives de la plante. Plus intéressantes sont les étamines soudées (1. Fig. I. 32—33) chez les quelles sort du connectif, soit du bout, soit de la partie située entre les sacs à pollen, un nouveau filament terminé par une anthère uo par des sacs à pollen séparés, ou encore par deux anthères libres. Je ne connais rien d'homologue à ces formes d'étamines chez les feuilles végétatives, il s'agirait plutôt ici d'une analogie avec les soudures, par exemple chez les fleurs, ce qui, pour cette espèce de pivoine, semble être une particularité constante.

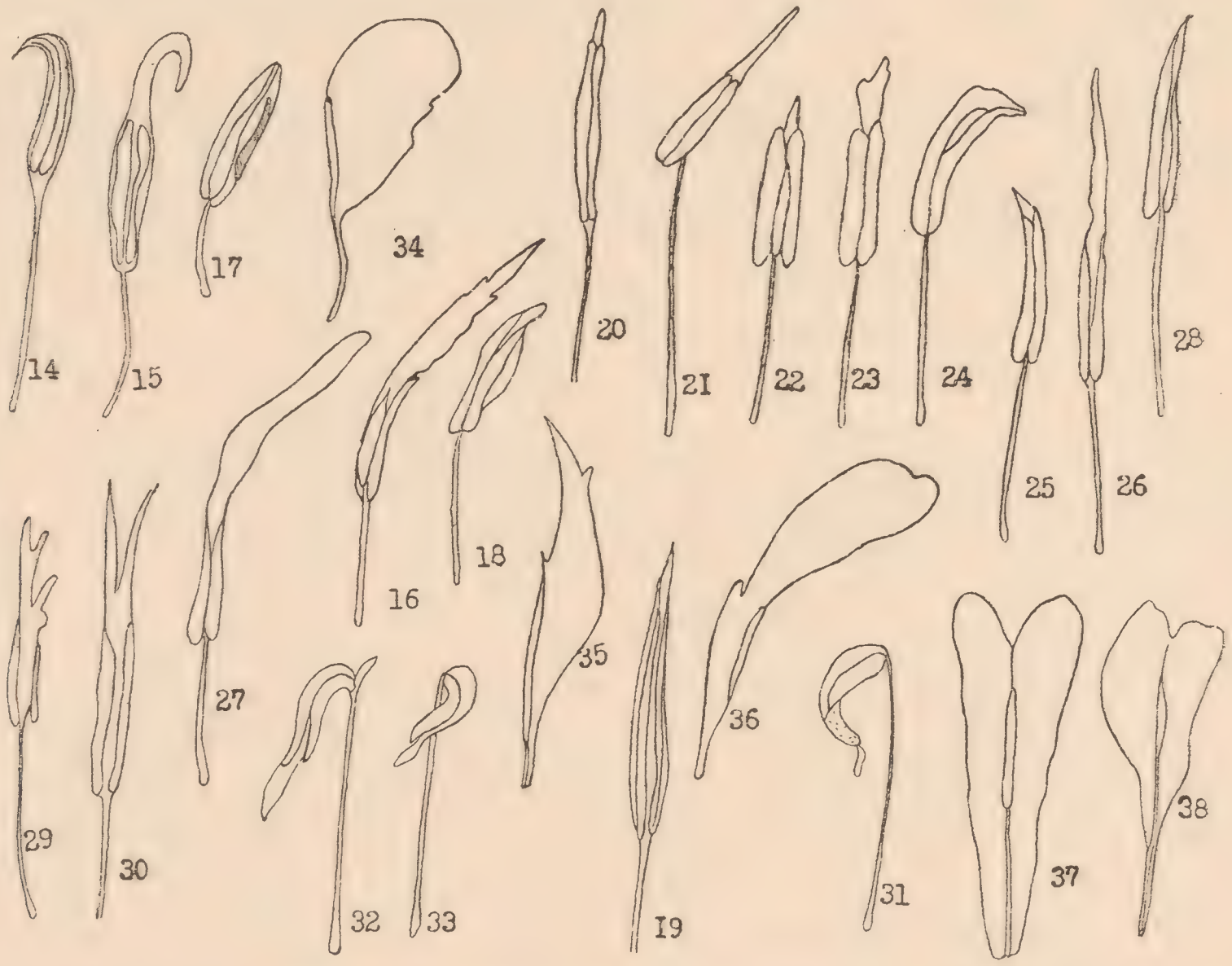
2. L'étamine peut avoir une anthère complète, à quatre compartiments, en même temps que le filament s'est développé de façon pétaloïde. Ces formes se rencontrent ici en grand nombre et très différentes (2. Fig. II. 1—13). Le tissu du filament donne naissance au pétaloïde, que l'on peut rencontrer aux divers stades du développement affectant la forme d'une stipule, ou l'étalant comme un simple pétale, ou se divisant de différentes façons, ou bien s'acroissant d'un seul ou des deux côtés de l'anthère, pouvant même arriver à recouvrir l'anthère.



2. Fig. II. Etamines anormales de *Paeonia paradoxa,* dont l'anthère est complète, tripartite, avec le filament développée en pétale (1—13).

3. Des antherès incomplètes, en nombre augmenté ou diminué, sur la partie pétaloïde de l'étamine, peuvent aussi se rencontrer dans les fleurs de *Paeonia paradoxa* dans les phases les plus diverses de l'étamine se métamorphosant en formation pétaloïde (3. Fig. II. 14—38; 4. Fig. II. 39—55; 5. Fig. II. 56—95). Non seulement le filament, mais aussi le connectif et la theca se changent en pétale. L'étamine prend l'habitus d'une feuille de corolle diversement transformée, alors les thecae sont réduites en nombre, ou bien elles apparaissent isolées en nombre, position et grosseur différents sur le pétaloïde. Ci il s'agit de formes qui ternoignent ostensiblement que le tissu qui donne naissance au pollen forme anormalement des thecae à différents endroits de la feuille pollinique, mais que, au cours de la métamorphose graduelle de l'anthère en pétale, la réduction

des sacs à pollen se fait par leur déplacement jusqu'au bord même du pétale et, de plus, par la déchirement des dits sacs, leur diminution et leur disparition. Ces observations faites sur les anomalies des étamines, s'opposent à l'explication donnée par L. Čelakovsky (l. c. „*O listech šitých a exkrescenčních*". *Teratologische Beiträge zur Morphologie des Blattes*". Comp. rend. de l'Ac. tchèq. II. cl., 1892) d'après laquelle l'étamine serait une feuille à quatre lobes métamorphosée. Ces anomalies chez la *Paeonia paradoxa* font plutôt penser que *le tissu qui donne naissance au pollen, lorsqu'il a changement de l'étamine en pétale, peut avoir une forme, une position, une grosseur différentes et irrégulières et que, en général, il se développe dans les bords du pétale en prolifération.*



3. Fig. II. Etamines anormales de *Paeonia paradoxa*, avec anthères incomplètes sur la partie pétaloïde de l'étamine (14—38).

4. Dans le foule des métamorphoses diverses, les étamines à double limbe ont une importance morphologique plus grande. En effet, dans ce cas, *on peut considérer l'étamine comme une feuille à double limbe transformée, au filament scindé en fourche, et dont une moitié s'est développée végétativement, tandis que l'autre moitié forme encore soit une anthère, soit une anthère pétalisée* (5. Fig. II. 96—97). Comme je l'ai déjà indiqué pour les étamines à limbe double chez le *Mimulus* (l. c. J. Vilhem: *Etamines à limbe double dans les fleurs de Mimulus*. Bull. inter de l'Ac. des Sc. de Bohême, 1923), de même pour les étamines à double limbe de *Paeonia paradoxa*, le nombre des sacs à pollen et des thecae ne se modifie pas aux dépens de la pétalisation, mais cette pétalisation l'éveille déjà dans les parties profondes du tissu primordial. Le second limbe se développe chez la feuille végétative

grâce à une dégénérescence du lobe interne du limbe. De la même façon, K. Domin a observé les divers stades du développement d'étamines à double limbe dans les fleurs de pomme de terre (l. c. *Kritické poznámky*

4. Fig. II. Etamines anormales de *Paeonia paradoxa* avec anthères incomplètes sur la partie pétaloïde de l'étamine (39—55).

o bramboru, Prague 1923, Journal du Ministère de l'Agriculture, no. 30, p. 44—45). Les étamines à double limbe peuvent être considérées comme homologues à la paracorolle ou aux feuilles végétatives à limbe double.

II. Eléments androgynes.

Les carpelles pétaloïdes avec anthère ou sacs à pollen peuvent dans les fleurs anormales de *Paeonia paradoxa* présenter des formes diverses de transition. On peut distinguer trois groupes principaux de ces anomalies.

Dans le premier groupe l'élement femelle pétalisé, bien que sa position dans la fleur, sa consistence, la structure de son tissu et, en partie même, sa couleur, prouvent qu'il a été formé du pistil, pend cependant, non seulement par sa forme mais aussi par la création d'un tissu pollinifère, à ressembler à une étamine. Il se distingue de l'étamine normale par sa

taille et son épaisseur relativement conisdérables qui égalent presque celles du carpelle. Le caractère féminin est ici refoulé et c'est le caractère mâle de cet organe hermaphrodite par son origine qui se montre le plus. *Morphologiquement les éléments femelles peuvent donc prendre anormalement la forme*

5. Fig. II. Etamines anormales de *Paeonia paradoxa* avec anthères incomplètes sur la partie limbale de l'étamine (56—95); étamines à limbe double de la même espèce (96—97).

et la fonction de l'organe mâle (6. Fig. III. 1—2). Nous avons trouvé aussi des formations anormales de ce genre, divisées en fourche par le bout et portant deux anthères libres (6. Fig. III. 3).

6. Fig. III. Eléments androgynes de *Paeonia paradoxa*: pistils pétaloïdes avec anthères ou sacs à pollen (1—13); pistils transformés en manière d'étamines avec anthère et ovules (14 *a* et 14 *b*); organes hermaphrodites à forme d'étamine pétalisée prédominante et avec ovule (15—18); pistils ouverts, avec ovules, stigmates et thecae au-dessous des stigmates (19—26); pistils pétalisés avec anthères et sacs à pollen (27—29).

Dans le deuxième groupe d'éléments androgynes nous avons rencontré une série d'anomalies qui présentaient, outre une anthère développée ou des sacs à pollen, encore une partie du connectif pétalisé et terminé par un stigmate différemment fendue, ou portant sur le carpelle pétalise une

anthère ou un sac à pollen développée (6. Fig. III. 4—11). On pourrait désigner cette anomalie comme une forme transitoire à la précédente, d'un type déjà prononcé.

Dans le troisième groupe, les parties sexuelles ne sont déjà plus visibles sur le carpelle pétalisé, seulement la formation pétaloïde divisée a, dans une partie, la consistence de l'élément femelle, dans l'autre, de l'élément mâle (6. Fig. III. 12—13).

2. Le carpelle transformé en forme d'étamine avec anthère et ovaire (6. Fig. III. 14 *a* et 14 *b*) est l'organe hermaphrodite anormal le mieux formé sur lequel on ait constaté aussi la protogénie.

3. Une autre forme anormale était représentée par des organes hermaphrodites à forme d'étamine pétalisée dominante et portant des ovules (6. Fig. III. 15—18).

4. Dans d'autres cas on rencontrait un pistil à l'ovaire ouverte et les ovules saillants au dehors, avec un stigmate et des sacs à pollen sous le stigmate, ou avec une anthère au lieu de stigmate, ou enfin avec un placenta à ovules transformé en sac à pollen (6. Fig. III. 19—26). Là aussi il était possible d'observer divers degrès de développement de ces anomalies. Les thecae étaient individuellement développées, il y en avait parfois deux ou quatre, d'autres fois elles étaient réunies pour former une anthère dans la partie supérieure du pistil au-dessous du stigmate. Aussi toute la partie terminale du carpelle était changée en une anthère du quatre thecae soudées. Le phénomène le plus intéressant était la transformation du placenta à ovules dans le sac à pollen (6. Fig. III. 24), à côté d'ovules normaux sur des placentas. Et finalement on pouvait voir un carpelle à ovules scindé en deux, dont un lobe se terminait par un stigmate et l'autre par une anthère (6. Fig. III. 25). Il résulte de cela que le *sac à pollen et le placenta à ovules sont, sur l'élément sexuel dans la fleur, des formations homologues,* ce qui appert clairement de ces anomalies du pistil chez la *Paeonia paradoxa.*

5. Les pistils pétalisés, avec anthères développées ou portant divers sacs à pollen, représentent déjà un degré plus avancé de la métamorphose de l'élement hermaphrodite en pétale, dans lequel le caractère féminin est presque complètement refoulé jusqu' à la forme du stigmate, tandis que les sacs à pollen se sont puissamment développées, régulièrement ou irrégulièrement. Là également, sur le pistil transformé et pétalisé, la lamelle d'exervissance, au lieu de placentas avec des ovules, produit des sacs à pollen (6. Fig. III. 27—29).

En considérant toutes ces anomalies androgynes chez la *Paeonia paradoxa,* on peut confirmer l'opinion, déjà exprimée par B. Němec à propos des anomalies des étamines dans les fleurs pleines de jacinthe (*Über den Pollen der petaloiden Antheren von Hyacinthus orientalis L.* Bulletin int. de l'ac. des Sc. de Bohème, 1898), d'après laquelle il n'y a pas en principe de différence sexuelle entre les microspores et les macrospores.

Et de même que B. Němec a montré qu'un milieu anormal pouvait transformer des microspores mâles déjà sexuelement différenciés en éléments femelles, de même on *peut constater, dans les fleurs anormales de pivoines, sur ces éléments androgynes, une métamorphose des produits sexuels femelles en produits mâles.*

Tous ces éléments foliaires anormaux des deux genres, trouvés dans les fleurs de *Paeonia paradoxa*, prouvent, comme je l'ai déjà montré pour la fleur de *Lilium candidum* (l. c. J. Vilhelm: *Organe hermaphrodite d'une fleur anormale du Lilium candidum L.* Bull. int. de l'ac. des Sc. de Boh.), *que l'étamine et le pistil ont dans la fleur la même signification morphologique.* De même K. Domin a constaté dans les fleurs de pomme de terre toutes les transitions possibles entre l'étamine et le pistil (l. c. étude déjà citée, p. 43).

III. Eléments sexuels complètement femelles.

1. Les pistils à l'ovaire entr'ouverte à la suture, avec deux placentas portant des ovules, sont un phénomène fréquent dans les fleurs anormales de pivoine; c'est en quelque sorte le premier stade de la transformation du carpelle en pétale, un retour (atavisme) à l'état originaire du pistil, tel que nous le rencontrons encore aujourd'hui chez les gymnospermes (7. Fig. IV. 1—3).

2. Les pistils ouverts, avec le placenta développée seulement d'un seul côté et portant des ovules, présentent visiblement, au point de vue morphologique, un avortement partiel (7. Fig. IV. 4—8).

3. Les ovules avec le placenta sur la ligne médiane entérieure du pistil pétaloïde, complètement étalé, sont encore une preuve que le placenta, dans une croissance anormale, peut venir se placer sur le côté opposé de la feuille, quand l'ovaire entière est située au revers et que ses bords sont soudés de façon que les placentas se développent de nouveau l'un à côté de l'autre (7. Fig. IV. 9—15). On peut aussi observer une réduction qui se montre dans la taille plus petite de ces pistils et dans le nombre diminué des ovules, au point de n'en laisser qu'un seul. La stigmate cependant se tourne toujours en la côté externe dans la fleur, comme les chez les pistils normaux.

Ces anomalies ne sont pas insignifiantes pour la morphologie comparée, car elles prouvent *que par une croissance anormale le pistil pétaloide peut être développé à l'envers, en même temps que les placentas apparaissent encore les uns à côté des autres. Alors l'ovaire devient semblable au carpelle des gymnospermes, ne forme plus une cavité ovulaire et croît en forme de pétale.*

4. Dans ce cas de métamorphose anormale du pistil en pétale, où en même temps, le style avec le stigmate est élargé en forme de pétale et l'ovule est développé seulement sur un placenta latéral au-dessus de la

base au bord du pétale, il est possible d'observer une métamorphose graduelle plus avancée du pistil en formation pétaloïde (7. Fig. IV. 16). *Cette anomalie montre clairement l'origine du placenta dans le rebord interne et épaissi du pistil pétaloïde.*

7. Fig. IV. Pistils anormaux de diverses formes chez la *Paeonia paradoxa* (1—36); deux carpelles soudés (37); ovules virescents (38—39); pistils réduits (40—51).

5. Le pistil ouvert, avec style et stigmate, avec les placentas pétaloïdement transformés, montre que les limbes pétaloïdes, en quoi les placentas se tronsforment, *sont par leur essence homologues aux segments ou aux limbes foliaires* (7. Fig. IV. 17).

6. Le pistil pétalisé n'ayant que sur un seul côté un placenta développé sans ovules, fournit un bel exemple de pistil virescent qui, dans sa métamorphose, s'est transformé au stade où un des rebord, foliaires repliés à l'intérieur porte visiblement les éminences placentaires, tandisque l'autre rebord est complètement plat, recouvert de poils, qui s'y sont développés non seulement sur la face externe, mais aussi sur la face interne, où il ne s'est pas formé un rebord replié vers l'intérieur (7. Fig. IV. 18). *Ces anomalies rendent également claire la valeur du placenta chez les pivoines.*

7. Le pistil complètement transformé en pétale bilobulé, mais portant cependant l'ovule d'un seul côté au-dessus de la base, représente un nouveau stade de la métamorphose progressive du pistil, arrivant à prendre la forme d'un pétale de la couronne, mais sur le rebord du quel a poussé encore un ovule nu (7. Fig. IV. 19).

8. Les pistils commencant à se transformér en formation pétaloïde, possédant encore un style visible et un stigmate se divisant de plus en plus et souvent aussi agrandi, conservant encore dans le contour du pétale la forme d'une ovaire allongée, fournissent un exemple de la métamorphose graduelle d'un pistil anormal en pétale (7. Fig. IV. 20—27).

9. Les pistils ne présentant déjà aucune partie sexuelle visible, complètement pétaloïdes, dans leur forme la plus simple allongés, à lobules pointus ou arrondis aux bouts, croissant en limbes plus larges, en passant par des formes de plus en plus développées et se divisant souvent en lobes à leur extrémité, voire même sur leurs deux côtés (7. Fig. IV. 28—36). *Le fait que le pistil pétalisé tend de plus en plus à se diviser dans sa métamorphose graduelle, répond bien à la structure des feuilles végétatives de l'espèce Paeonia, qui sont profondément entaillées.*

10. La croissance latérale de deux pistils, avec les deux cavités ovulaires ouvertes, constitue un cas qui se présente rarement dans les fleurs de *Paeonia,* car on ne trouve nulle part mention dans les auteurs d'une „syncarpie du gynécée". Aussi le mode de croissance est très particulier, car deux styles qui l'étaient soudés l'un à l'autre par le flanc, conservaient chacun leur suture ouverte, de sorte que les deux ovaires restaient ouvertes au moyen d'une fissure commune (7. Fig. IV. 37).

11. Sur un placenta il croît, au lieu d'ovule, une formation semblable à un carpelle réduit, dans une ovaire ouverte, à côté d'ovales normaux (7. Fig. IV. 38). Ce phénomène correspond bien à la virescence des ovules, qui, chez quelques espèces, se rencontre très fréquemment dans les fleurs. Cette année même, j'ai eu l'occasion d'examiner une centaine d'ovaires à ovules virescents et à fleurs coudées, appartenant à l'espèce *Reseda lutea,* qui avaient été ramassées sur les bords de la Vltava à Prague par Mr. Jos. Rohlena. Cette anomalie chez cette espèce a été décrite déjà par C. Schimper (Flora, 1829), reproduite par L. Reichenbach (Icon. fl. Germ. 1837—38, tab. C, Fig. 44—46) et dûment appréciée au

point de vue morphologique par L. Čelakovský (Botan. Zeit. 1878, p. 246—268).

12. Une formation filamenteuse croissant de l'ovule, à côté du micropile, dans une ovaire ouverte, correspond parfaitement à la virescence et à la végétatisation de l'ovule. Cette anomalie, comme dans le cas précédent, n'a pas encore été observée dans l'espèce en question, bienque la virescence de l'ovule chez la *Paeonia officinalis* ait été signalée une fois par les auteurs (J. Turpin, Annales d'hortic., 1830). Les pistils aussi dans ce cas étaient scindés et, aux deux bords de l'ovaire, six ou sept ovules verts croissaient des ovules (7. Fig. IV. 39).

13. La réduction du pistil en un stipule blanc écailleux, prenant des formes de transition diverses, chez la *Paeonia paradoxa*, concorde avec la réduction des feuilles végétatives chez les dicotylédonées, qui peuvent aussi se transformer de la même manière en formations foliaires simples, lorsqu'elles ont perdu leur fonction primitive (7. Fig. IV. 40—51).

Festucetum carpaticae in the Tatras of Biela.

(Summary.)

By

KAREL DOMIN.

Presented September 30th 1925.

Festuca carpatica is generally regarded as a very rare plant in the Tatras, confined to the limestone Tatras of Biela. A detailed geobotanical analysis of this region, completed by the author this summer showed, howerer, that from the sociological point of view it is one of the most characteristic Tatra-grasses, which forms an association that is exceedingly characteristic for the limestone Tatras of Biela and very extensively developed in the subalpine and alpine zone of these mountains.

In the original text the author describes in great detail the distribution of this grass as well as of the association that he denominates as Festucetum carpaticae. This association, which is rather hygrophilous and therefore always without mosses and lichens, is best developed in the furrows on steep mountain slopes between the altitudes of 1500 and 2000 *m*. It ascends, howerer, to the highest altitudes (2150 *m*) and in places descends quite low, for instance on the water-soaked moss-growth with *Heliosperma quadrifidum* near „Sedm Pramenů“ at the entrance of the kettle-like valley „Holubyho důl“ as low as 1170 *m* and on the slopes of Žihlavno above the valley of Čierná voda even to 1070 *m*, which up till now is the lowest known locality.

The general sociological analysis of the association was made on the basis of ten special analyses carried out in different parts of the region mentioned.

The abundance is specified according to a new scale of eleven degrees, as follows:

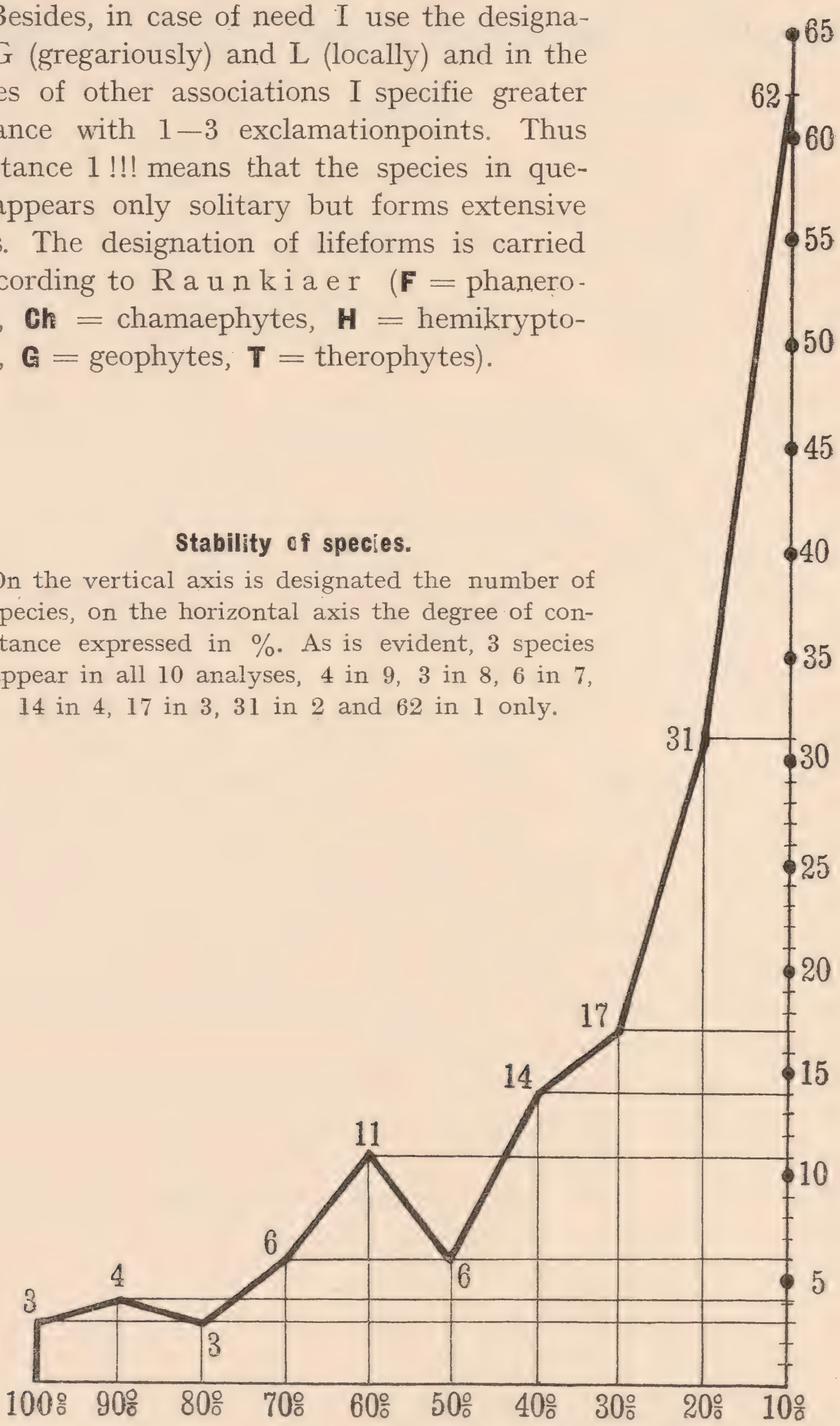
0: absolutely isolated
1: very scarce, solitary
2: inabundantly scattered
3: scattered
4: rather abundantly scattered

5: abundantly scattered
6: rather abundant
7: abundant
8: very abundant
9: very dominant, without regard to the abundance
10: with a dominance of approximately 100%.

Besides, in case of need I use the designations G (gregariously) and L (locally) and in the analyses of other associations I specifie greater dominance with 1—3 exclamationpoints. Thus for instance 1 !!! means that the species in question appears only solitary but forms extensive clumps. The designation of lifeforms is carried out according to Raunkiaer (**F** = phanerophytes, **Ch** = chamaephytes, **H** = hemikryptophytes, **G** = geophytes, **T** = therophytes).

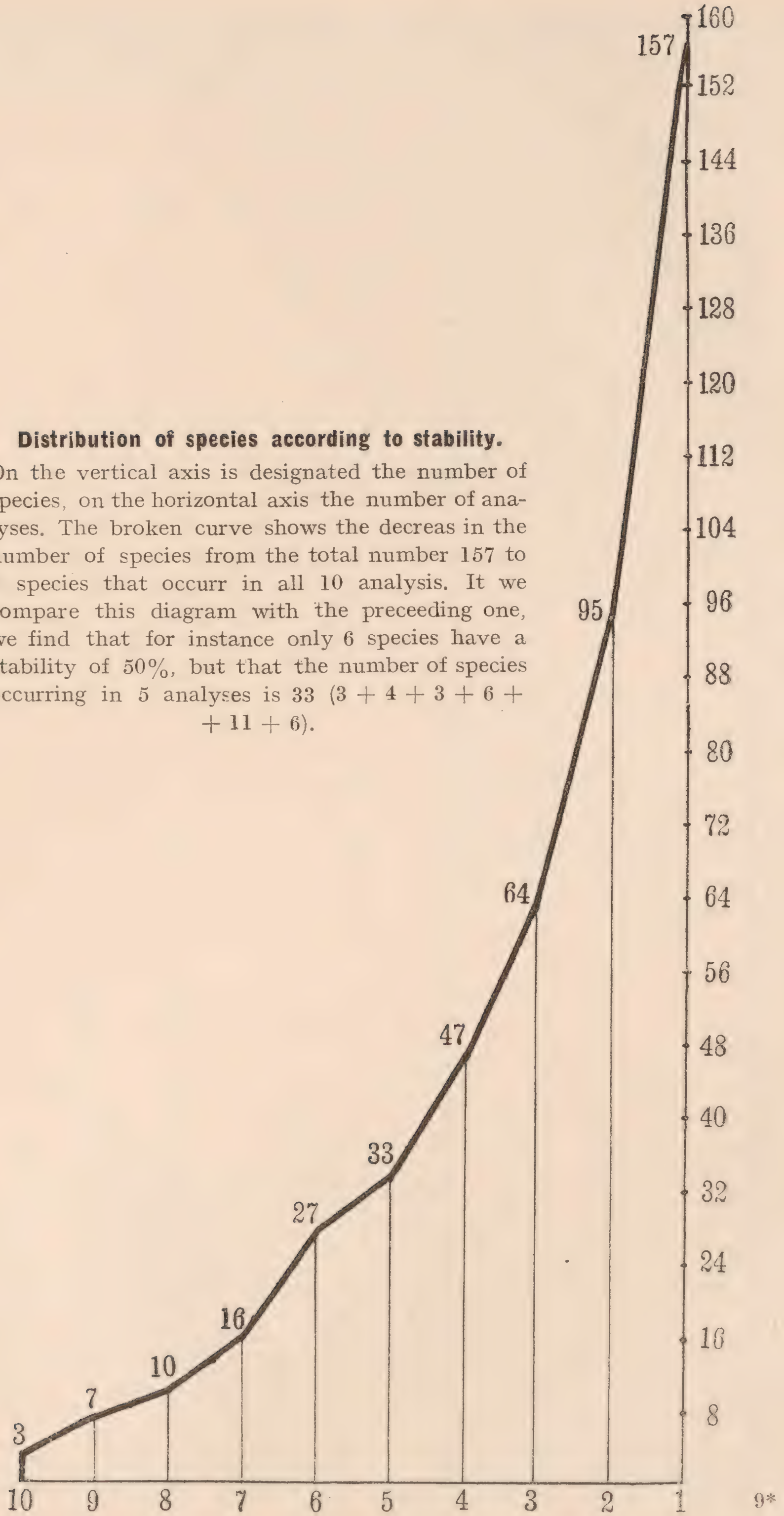
Stability of species.

On the vertical axis is designated the number of species, on the horizontal axis the degree of constance expressed in %. As is evident, 3 species appear in all 10 analyses, 4 in 9, 3 in 8, 6 in 7, 14 in 4, 17 in 3, 31 in 2 and 62 in 1 only.



Distribution of species according to stability.

On the vertical axis is designated the number of species, on the horizontal axis the number of analyses. The broken curve shows the decreas in the number of species from the total number 157 to 3 species that occurr in all 10 analysis. It we compare this diagram with the preceeding one, we find that for instance only 6 species have a stability of 50%, but that the number of species occurring in 5 analyses is 33 (3 + 4 + 3 + 6 + + 11 + 6).



Festucetum carpaticae in the Tatras of Biela.

Substratum: in all cases limestones or dolomites of different geological formations.

Life-form according to Raunkiaer	Number	Species	Vertically: *a)* Numerical order of analyses, *b)* original numbers of analyses, *c)* localities, *d)* altitude, *e)* exposure, *f)* date of analysis											Constance according to the result of 10 analyses
			a)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10*a* | 10*b*	
			b)	321	318	279	253	244	235	219	193	188	132	
			c)	The corry between Havran and Žďárská Vidla		The summit of Havran	Muráň	Zámky	Zámky	Faikso-vá	Žďárská Vidla	Žďárská Vidla	Holubyho žleby	
			d)	1665—1710 *m*	1485—1495 *m*	2140 *m*	1250 m	1820 *m*	1550 *m*	od 1450*m*	2060 *m*	2000 *m*	1560—1630 *m* | 1630—1720 *m*	
			e)	N	N	SE	NNW	SW	W-WSW	S-SW	NE	SSE	S | S	
			f)	19. VIII. 1925	19. VIII. 1925	15. VIII. 1925	14. VIII. 1925	12. VIII. 1925	12. VIII. 1925	10. VIII. 1925	6. VIII. 1925	6. VIII. 1925	31. VII. 1925	
		I. Constant species (K 100—80%):												
H	1.	*Festuca carpatica*		10!	10!	10!	10!	10!	10!	10!	10!	10!	10! | 10!	100%
H	2.	*Senecio subalpinus*		3	3	3	4—5	1	1	1	3	3	1 | —	100%
H	3.	*Parnassia palustris*		3	3	3	4—5	6	3	3	3	3	3 | —	100%
H	4.	*Sweertia * alpestris*		7	3	3	5	5	1	3	3	—	— | 3	90%
G	5.	*Polygonum bistorta*		5	3	3	—	6	1	5	3	1	1 | 6	90%
H	6.	*Geranium silvaticum*		5	7	3	3	—	3	3	5	5	3 | —	90%
H	7.	*Sesleria Bielzii*		1	1	—	1	2	1	1	1	—	1 | —	90%
H	8.	*Alchemilla vulgaris* (* var. *glabra*)		3*	2	3	1	—	3*, 1	—	3	3	3 | —	80%
H	9.	*Crepis mollis*		2	3	3	—	3	1	5	—	3	5 | —	80%
H	10.	*Pedicularis verticillata*		1	1	2	1	2	—	—	3	1	— | 3	80%
		II Species with a constance of 70—60%:												
H	11.	*Hedysarum obscurum*		5	4	—	1	3	—	2	3	—	2 | 3	70%
G	12.	*Rhodiola rosea*		3	1	3	—	—	3	1	3	4	— | —	70%
H	13.	*Scabiosa lucida*		1	3	—	—	4	1	1	—	3	6—7 | —	70%

H	14.	*Poa alpina (viripara)*	1	—	—	—	1	1	1	3	3	2	—	70%
H	15.	*Cortusa sibirica*	1	2	—	1	—	—	1	3	1	—	3	70%
H	16.	*Achillea sudetica*	3	3	1	—	—	—	2	3	3	4	—	70%
H	17.	*Phleum Michelii*	5	4	3	—	—	—	1	1	—	4	—	60%
H	18.	*Heracleum sphondylium* a *sibiricum*	4	3	—	—	—	3	1	—	—	2	3	60%
H	19.	*Primula carpatica*	2	3	—	1	—	—	—	3	3	3	—	60%
H	20.	*Phyteuma orbiculare*	3	1	—	—	4	1	3	—	3	—	—	60%
H	21.	*Senecio capitatus*	3	—	3	—	—	—	4	1	1	1	—	60%
H	22.	*Linum extraaxillare*	3	—	7	—	8	5	5	—	—	7	—	60%
H	23.	*Myosotis alpestris*	3	1	—	—	1	1	—	3	3	—	—	60%
H	24.	*Astrantia major*	3	3	3	3	—	—	1	—	—	7	—	60%
H	25.	*Leontodon hispidus* var. *opimus*	—	1	3	1	3	3	—	—	—	6—7	—	60%
H	26.	*Hypericum quadrangulum*	—	—	3	4	—	3	1	—	3	4	—	60%
H	27.	*Galium anisophyllum*	—	—	3	—	1	—	—	1	3	—	—	60%
		III. Species with a constance of 50—40%:												
H	28.	*Meum mutellina*	5	2	—	—	—	1	—	3	3	—	—	50%
H	29.	*Trisetum fuscum*	3	1	3	—	—	—	4	—	—	2	3	50%
H	30.	*Geum rivale*	3	1	—	—	—	1	3	—	—	—	3	50%
G	31.	*Valeriana sambucifolia*	1	—	—	3	—	3	5	—	—	—	3	50%
H	32.	*Luzula nemorosa* var. *rubella*	2	—	5	—	1	1	—	—	—	1	—	50%
H	33.	*Viola biflora*	3	3	—	2	—	1	—	3	—	—	—	50%
H	34.	*Ranunculus montanus*	6	—	—	—	5	—	—	3	3	—	—	40%
G	35.	*Adenostyles alliariae*	1	2	—	—	—	—	1.	—	—	—	1. 6	40%
H	35a.	*Saussurea alpina*	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	40%
H	35b.	*Saussurea * macrophylla*	—	—	—	5	—	—	2	—	3	—	—	
H	36.	*Astragalus frigidus*	5	5	1	—	—	—	—	3	—	—	—	40%
H	37.	*Chrysanthemum rotundifolium*	3	2	—	3	—	—	—	2	—	—	—	40%
H	38.	*Chrysanthemum leucanthemum*	1	0	3	—	—	—	—	—	3	—	—	40%
H	39.	*Luzula silvatica*	3	2	—	—	—	1	—	—	—	—	3	40%

Life-form according to Raunkiaer	Number	Species	Vertically: *a)* Numerical order of analyses, *b)* original numbers of analyses, *c)* localities, *d)* altitude, *e)* exposure, *f)* date of analysis											Constance according to the result of 10 analyses
			a)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10*a*	10*b*	
			b)	321	318	279	253	244	235	219	193	188	132		
			c)	The corry between Havran and Žďárská Vidla		The summit of Havran	Muráň	Zámky	Zámky	Faiksová	Žďárská Vidla	Žďárská Vidla	Holubyho žleby	
			d)	1665—1710 *m*	1485—1495 *m*	2140 *m*	1250 m	1820 *m*	1550 *m*	od 1450 *m*	2060 *m*	2000 *m*	1560—1630 *m*	1630—1720 *m*	
			e)	N	N	SE	NNW	SW	W-WSW	S-SW	NE	SSE	S	S	
			f)	19. VIII. 1925	19. VIII. 1925	15. VIII. 1925	14. VIII. 1925	12. VIII. 1925	12. VIII. 1925	10. VIII. 1925	6. VIII. 1925	6. VIII. 1925	31. VII. 1925		
Ch	40.	*Arabis alpina*		3	—	—	3	—	1	—	—	—	2	—	40%
H	41.	*Phyteuma spicatum*		3	1	—	—	—	—	—	—	1	2	—	40%
H	42.	*Anemone narcissiflora*		3	4	—	—	1	—	—	—	—	2	7	40%
H	43.	*Bupleurum longifolium* var. *Gaudini*		—	3	2	—	—	—	3	—	—	—	4	40%
H	44.	*Lotus corniculatus*		—	1	—	—	3	1	—	—	—	5	—	40%
H	45.	*Phleum alpinum*		—	—	3	—	1	1	—	—	—	1. 3	—	40%
Ch	46.	*Thymus alpestris*		—	—	3	—	—	—	—	—	3	3	—	40%
		IV. Species with a constance of 30—20%:													
H	47.	*Trollius europaeus*		7	2	—	—	—	—	—	4	—	—	—	30%
H	48.	*Valeriana tripteris*		7—8	—	—	—	7	6	—	—	—	—	—	30%
H	49.	*Pedicularis Hacquetii*		3	3	—	—	—	—	—	—	—	1—2	4—5	30%
H	50.	*Trifolium pratense*		—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	—	30%
H	51.	*Senecio crispatus*		1—2	—	—	—	4	—	—	2	—	—	—	30%
H	52.	*Campanula Scheuchzeri*		2	1	—	3	—	—	—	—	—	—	—	30%
H	53.	*Chaerophyllum hirsutum*		—	—	3	—	—	1	—	—	—	—	7	30%
H	54.	*Thalictrum aquilegiifolium*		—	—	—	3	—	1	—	—	—	—	3	30%
H	55.	*Bellidiastrum Michelii*		—	—	—	3	7—8	—	—	—	—	—	3	30%
H	56.	*Deschampsia caespitosa*		—	—	—	1. 3	2	1	—	—	—	—	—	30%

H	57.	*Pimpinella magna*	—	—	—	—	5	—	5	—	—	4	—	30%
H	58.	*Poa nemoralis*	—	—	—	—	—	2	5	—	—	1	—	30%
H	59.	*Senecio nemorensis*	—	—	—	—	—	2	3	—	—	1	4	30%
H	60.	*Gymnadenia conopea*	—	—	—	—	—	1	—	—	—	3	5	30%
H	61.	*Centaurea mollis*	—	—	—	—	—	—	1	l. g.	—	l. r.	l. 4	30%
H	62.	*Astragalus alpinus*	—	—	—	—	—	—	1	—	4	5	5	30%
Ch	63.	*Silene vulgaris* var. *glareosa*	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	20%
Ch	64.	*Cerastium Raciborskii*	1	—	—	—	—	—	—	—	3	—	—	20%
H	65.	*Campanula glomerata*	—	3	—	—	—	—	—	—	—	1	—	20%
H	66.	*Thalictrum minus*	3	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	20%
Ch	67.	*Salix hastata*	2	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	20%
H	68.	*Callianthemum rutifolium*	4—5	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	20%
H	69.	*Solidago alpestris*	3	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	20%
H	70.	*Trifolium badium*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	2	20%
H	71.	*Leontodon tatricus*	—	2	—	—	—	—	—	—	1	—	—	20%
H	72.	*Poa Chaixi*	—	—	3	—	—	—	—	1	—	—	—	20%
H	73.	*Potentilla aurea*	—	—	3	—	—	—	—	1	—	—	—	20%
H	74.	*Taraxacum nigricans*	—	—	3	—	—	—	—	3	—	—	—	20%
H	75.	*Veratrum Lobelianum*	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	3	20%
H	76.	*Myosotis palustris*	—	—	—	3	—	3	—	—	—	—	—	20%
H	77.	*Filipendula ulmaria*	—	—	—	3	—	—	3	—	—	—	—	20%
H	78.	*Delphinium oxysepalum*	—	—	—	2	—	—	—	—	—	—	2	20%
Ch	79.	*Helianthemum grandiflorum*	—	—	—	—	3	—	2	—	—	—	—	20%
H	80.	*Soldanella hungarica*	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	3	20%
T	81.	*Euphrasia Tatrae*	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1	—	20%
H	82.	*Calamagrostis arundinacea*	—	—	—	—	—	1	1	—	—	—	—	20%
H	83.	*Carex sempervirens* var. *Tatrorum*	—	—	—	—	—	1	—	—	3	—	—	20%
H	84.	*Epilobium trigonum*	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	3	20%
H	85.	*Orchis globosa*	—	—	—	—	—	—	1	—	—	2	4	20%
H	86.	*Scrophularia Scopolii*	—	—	—	—	—	2	—	—	—	—	—	20%

Life-form according to Raunkiaer	Number	Species	Vertically: *a)* Numerical order of analyses, *b)* original numbers of analyses, *c)* localities, *d)* altitude, *e)* exposure, *f)* date of analysis											Constance according to the result of 10 analyses
			a)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10*a*	10*b*	
			b)	321	318	279	253	244	235	219	193	188	132		
			c)	The corry between Havran and Žďárská Vidla		The summit of Havran	Muráň	Zámky	Zámky	Faiksová	Žďárská Vidla	Žďárská Vidla	Holubyho žleby		
			d)	1665—1710 *m*	1485—1495 *m*	2140 *m*	1250 m	1820 *m*	1550 *m*	od 1450 *m*	2060 *m*	2000 *m*	1560—1630 *m*	1630—1720 *m*	
			e)	N	N	SE	NNW	SW	W-WSW	S-SW	NE	SSE	S	S	
			f)	19. VIII. 1925	19. VIII. 1925	15. VIII. 1925	14. VIII. 1925	12. VIII. 1925	12. VIII. 1925	10. VIII. 1925	6. VIII. 1925	6. VIII. 1925	31. VII. 1925		
H	87.	*Dactylis slovenica*		—	—	—	—	—	1	—	—	—	3	2	20%
H	88.	*Carduus glaucus*		—	—	—	—	—	—	2	—	3	—	—	20%
H	89.	*Oxytropis sericea*		—	—	—	—	—	—	—	—	3	3	—	20%
H	90.	*Festuca varia*		—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	30%
H	91.	*Hieracium villosum*		—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	3	20%
G	92.	*Lilium martagon*		—	—	—	—	—	1	—	—	—	2	2	20%
H	93.	*Rumex arifolius*		1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	20%
		V. Accessory species (K 10%):													
Ch	94.	*Salix retusa*		4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10%
F	95.	*Salix nigricans*		—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	10%
Ch	96.	*Salix Jacquini*		—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10%
G	97.	*Adoxa moschatellina*		3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10%
H	98.	*Archangelica officinalis*		1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10%
H	99.	*Geum montanum*		—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10%
H	100.	*Ranunculus thora* var. *carpaticus*		3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10%
H	101.	*Campanula persicifolia*		—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10%
H	102.	*Campanula trachelium*		—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	10%

H	103.	*Festuca supina*	—	—	3	—	—	—	—	—	—	—	—	10%
H	104.	*Avena versicolor*	—	—	1. 3	—	—	—	—	—	—	—	—	10%
H	105.	*Erigeron neglectus*	—	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	10%
H	106.	*Erigeron atticus*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	1	10%
H	107.	*Erigeron alpinus*	—	—	—	—	—	—	3	—	—	—	—	10%
H	108.	*Calamagrostis villosa*	—	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	10%
G	109.	*Polygonum viviparum*	—	—	3	—	—	—	—	—	—	—	—	10%
H	110.	*Crepis paludosa*	—	—	—	4	—	—	—	—	—	—	—	10%
H	111.	*Aconitum firmum*	—	—	—	3	—	—	—	—	—	—	—	10%
G	112.	*Paris quadrifolia*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10%
H	113.	*Aspidium lonchitis*	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	10%
H	114.	*Tofieldia calyculata*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10%
T	115.	*Cerastium fontanum*	—	—	—	—	3	—	—	—	—	—	—	10%
T	116.	*Gentiana carpaticola* f. *albiflora*	—	—	—	—	—	3	—	—	—	—	—	10%
T	117.	*Gentiana carpaticola*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	3	10%
H	118.	*Gentiana asclepiadea*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10%
H	119.	*Gymnadenia albida*	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	10%
H	120.	*Sedum carpaticum*	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	10%
Ch	121.	*Rubus saxatilis*	—	—	—	—	—	—	3	—	—	—	—	10%
H	122.	*Libanotis montana*	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	10%
Ch	123.	*Thymus carpaticus*	—	—	—	—	—	—	2	—	—	—	—	10%
T	124.	*Saxifraga adscendens*	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	10%
H	125.	*Homogyne alpina*	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	10%
H	126.	*Potentilla alpestris*	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	10%
H	127.	*Astragalus oroboides*	—	—	—	—	—	—	—	—	5	—	—	10%
H	128.	*Bartsia alpina*	—	—	—	—	—	—	—	—	3	—	—	10%
G	129.	*Allium sibiricum*	—	—	—	—	—	—	—	—	1.	—	—	10%
H	130.	*Chaerophyllum aromaticum*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	10%
H	131.	*Ranunculus platanifolius*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	3	10%
H (T)	132.	*Erysimum Wahlenbergii*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	10%

Life-form according to Raunkiaer	Number	Species	Vertically: *a)* Numerical order of analyses, *b)* original numbers of analyses, *c)* localities, *d)* altitude, *e)* exposure, *f)* date of analysis											Constance according to the result of 10 analyses
			a)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10*a*	10*b*	
			b)	321	318	279	253	244	235	219	193	188	132		
			c)	The corry between Havran and Žďárská Vidla		The summit of Havran	Muráň	Zámky	Zámky	Faikso-vá	Žďárská Vidla	Žďárská Vidla	Holubyho žleby		
			d)	1665—1710 *m*	1485—1495 *m*	2140 *m*	1250 m	1820 *m*	1550 *m*	od 1450*m*	2060 *m*	2000 *m*	1560—1630 *m*	1630—1720 *m*	
			e)	N	N	SE	NNW	SW	W-WSW	S-SW	NE	SSE	S	S	
			f)	19. VIII. 1925	19. VIII. 1925	15. VIII. 1925	14. VIII. 1925	12. VIII. 1925	12. VIII. 1925	10. VIII. 1925	6. VIII. 1925	6. VIII. 1925	31. VII. 1925		
G	133.	*Galium Schultesii*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	10%
T	134.	*Rhinanthus pulcher*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	—	10%
H	135.	*Lathyrus pratensis*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	—	10%
H	136.	*Anthyllis alpestris*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5	—	10%
H	137.	*Carlina acaulis*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	—	10%
H	138.	*Cirsium erisithales*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	4	10%
H	139.	*Carex glauca*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4	—	10%
H	140.	*Laserpitium latifolium*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	10%
H	141.	*Vicia silvatica*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	l. 3	—	10%
G	142.	*Coeloglossum viride*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	10%
H	143.	*Chrysanthemum subcorymbosum*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	10%
H	144.	*Polygala brachyptera*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	10%
H	145.	*Origanum vulgare*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	10%
H	146.	*Vicia sepium*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	10%
H	147.	*Pleurospermum austriacum*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	2	10%
T	148.	*Arabis hirsuta*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	10%
T	149.	*Arabis sudetica*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	10%
H	150.	*Melandryum silvestre*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	10%
H	151.	*Mulgedium alpinum*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	10%

G	152.	*Polygonatum verticillatum*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	10%
H	153.	*Crepis grandiflora*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10%
H	154.	*Anthriscus nitida*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	10%
H	155.	*Geranium phaeum*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	10%
H	156.	*Carduus personata*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	10%
G	157.	*Botrychium lunaria*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	10%
		Total number of species . . .	**57**	**47**	**37**	**33**	**30**	**46**	**48**	**30**	**36**	**94**		

Biological spectrum according to Raunkiaer		
Life-form	Number of species	in %
F	1	0·64%
CH	10	6·37%
H	126	80·25%
G	12	7·65%
T	8	5·09%
Summa:	157	100·00%

The author then proccedes to carry out a detailed comparision of all analyses, pointing out the special sociological characteristics of each one.

Subsequently the author discusses the characteristics of the association Festucetum carpaticae in general and endeavours to make its diagnosis. Without doubt it is an association physiognomically and ecologically very well defined and also sufficiently characteristic in its floristic composition. But in what shall we seek its distinguishing features as an association? In the so called „faithful" species according to the Swiss school or in the constant species according to the school of Uppsala? I do not care again to discuss at length this question, which I developed in detail in my book „Problems and Methods of Plant Sociology" (Prague 1923) on pages 137—141. Not even now can I change my opinion on the faithfulness of species and the value of constance. Numerous analyses, which I made during the last two years, led me to the conclusion that these faithful species are very hard to find, because as a rule they do not exist. If we are taking into consideration the faithfulness of species, it is evident that we ought to do so with regard to a natural, even if small region, in our case then at least with regard to the whole of the Tatras of Biela. In this way we come to see that at most two species of our Festucetum carpaticae can be designated as faithful, to wit the dominating grass, which appears in other associations only exceptionally, and *Callianthemum rutifolium*. As for this very rare Tatra plant, it must be remarked that it is a species confined mostly to granite and in the High Tatras growing in an entirely different plant-community. Its comparatively very abundant occurrence in the corry between Žďárská Vidla and Havran is surprising in a certain sense, but if we take into consideration the character of this glacial corry, open to the north, we see that this species could find a very appropriate habitat here. Of course, *Callianthemum rutifolium* was recorded by Fritze and Ilse as very rare also in the lower corry between Havran and Nový, where, howerer, it was looked for in vain ever since that time. In which

association it grew here it is hard to decide, though it is very unlikely that it was in the Festucetum carpaticae. Consequently the faithfulness of even this species is of problematic value for our association. It cannot be said of any one of the other species that it is confined to this association, and so we have no species whatever entirely faithful to this association except *Festuca carpatica*. This fact, which holds true for most of the other associations, leads me not to consider the faithful species as the characteristic of the associations, but to describe and define every association from more points of view, in the first place with regard to the constance of species. Of course constance alone is not always sufficient. Thus, in our case I consider as a distinguishing feature of the association the presence of the rare Tatra limestone Papilionaceous species, even though a number of them are only accessory species with regard to their constance. Only *Hedysarum obscurum* has a high degree of constance (70%); *Astragalus frigidus* occurrs in 4, *A. alpinus* in 3, *Oxytropis sericea* in 2 and *Astragalus oroboides* in one of 10 analyses. Also the occurrence of species of the genus *Erigeron* has its significance, even though in one case it be *E. atticus*, in the second case *E. alpinus*, in the third *E. neglectus*. Negative characteristics are always of great importance, and of the positives ones especially the group of species regularly accompanying the association is of weight. The distribution of life-forms also has its diagnostic value, but of course it would have to be carried out into greater detail than on the fundamental classes of Raunkiaer.

For the evaluation of the faithful species I refer to the valuable paper of the prominent Polish geobotanists Szafer, Pawłowski and Kulczyński „Die Pflanzenassoziationen des Tatra-Gebirges. — I. Teil: Die Pflanzenassoziationen des Chochołowska-Tales“,[1]) which in certain sense may be regarded as a fundamental work on the modern sociological classification of the Tatra vegetation. The authors are entirely convinced of the value of the faithfulness of species and write with emphasis: „Als Assoziationen gelten für uns nur jene Pflanzengesellschaften, die durch mehrere in ihnen ausschliesslich oder doch hauptsächlich vorkommende Arten, ihre Charakterarten gekennzeichnet werden. Je höher die Anzahl derselben ist und einen je höheren Treuegrad sie zeigen (bestandestreu, -fest, -hold), desto ausgeprägter und leichter erkenntlich erscheint die betreffende Assoziation. Pflanzengesellschaften ohne jedwede Charakterarten werden konsequenterweise nur als „Varietäten“, „Nebentypen“ oder „Facies“ bestimmter wohl charakterisierter Assoziationen bezeichnet.“

It is of course evident that the conception of faithfulness for a single valley is entirely fallacious, even absurd. It is necessary to take into consideration the whole limestone- resp. granite-region ot the Tatras, according to what association we are analysing.

---

[1]) Bull. Intern. de l'Acad. Polon., Cl. Sc. Math. et Nat., 1923.

The authors use for the designation of the degree of faithfulness the usual C_1, C_2, C_3. Thus for instance P i c e e t u m e x c e l s a e has the following for the association characteristic species:

C_1—C_2: *Lycopodium annotinum* (in 1 of 11 analyses).

C_2—C_3:[1]) *Picea excelsa, Luzula silvatica, L, flavescens, Pirola uniflora, Lycopodium selago.*

The first species is to a considerable degree (though not absolutely!) faithful to this association and to some related ones. But already *Picea excelsa* can be designated at most as faithful to the respective association-group, *Lycopodium selago* grows in the most various mountain, subalpine and alpine associations, *Luzula silvatica* occurs also in a number of associations, accompanies M u g h e t u m m o n t a n a e with considerable constance and is recorded by the authors as a characteristic species of the association C a l a m a g r o s t i d e t u m v i l l o s a e, and the same holds true for *Pirola rotundifolia*. And in this way we could go trough one association after the other and convince ourselves that „les espèces caractéristiques" or the so-called faithful species in reality are not what they are called. Thus C a l a m a g r o s t i d e t u m v i l l o s a e has according to the authors three faithful species, to wit *Poa Chaixi* (C_2), *Gymnadenia albida* (C_2), *Luzula silvatica* (C_3), V a c c i n i e t u m m y r t i l l i also three species, *Gentiana punctata, Melampyrum pratense* and *Vaccinium myrtillus* (the last C_3), P i n e t u m m o n t a n a e only two species, *Pinus pumilio* and *Athyrium alpestre*. Except for *Pinus montana*, howerer, all these species are represented in different Tatra associations, so that it is not possible to speak of their specialisation to a single association. And thus we can analyse one association after the other and convince ourselves that the classification of associations according to species confined or almost confined to them is all very well theoretically but impracticable in reality, because most associations have no such faithful species, or at most a single species.

In my opinion constance furnishes a better basis. Of course I would always emphasise those accessory species that even with a low degree of constance are characteristic for the association in this or that regard. It is not possible to generalise as to which these species are, because it is necessary to judge each association individually.

I was the more convinced of the correctness of my opinion when I compared an additional analysis of F e s t u c e t u m c a r p a t i c a e with the results of the 10 other analyses shown above. It is an analysis of a Festucetum on Muráň, at an altitude of 1500 *m*, on a slope with a northern exposure. Its composition was as follows:

---

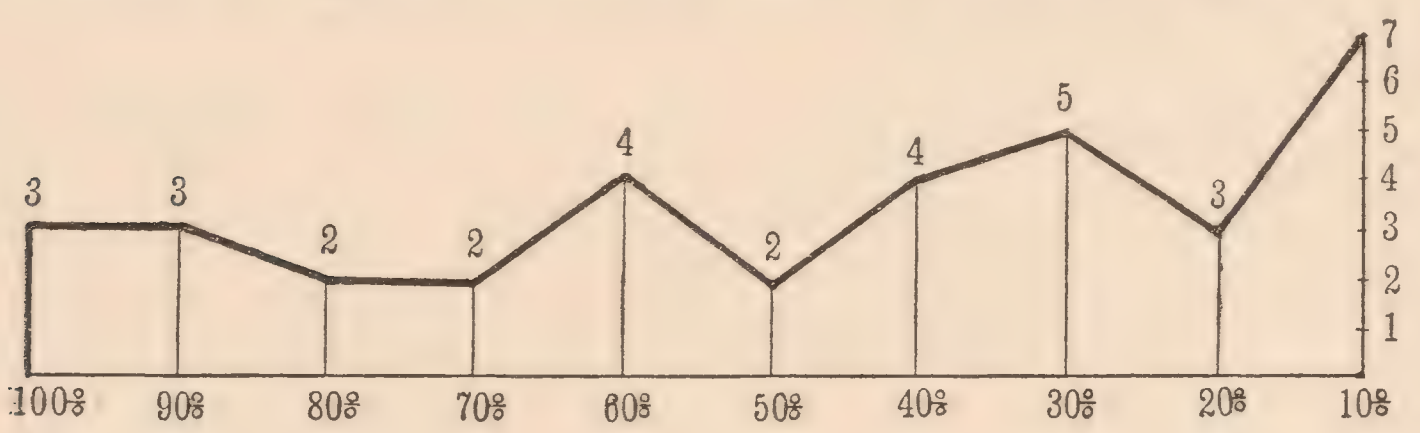
[1]) Species doubtful as regard to faithfulness, designated by a question-mark, are omitted.

Life-form	Number	Species	Abundance	Constance according to the result of 10 analyses
H	1.	*Festuca carpatica*	10!	100%
H	2.	*Senecio subalpinus*	4	100%
H	3.	*Parnassia palustris*	5	100%
H	4.	*Sweertia alpestris*	5	90%
H	5.	*Geranium silvaticum*	3	90%
H	6.	*Sesleria Bielzii*	1	90%
H	7.	*Alchemila vulgaris* var. *glabra*	1	80%
H	8.	*Pedicularis verticillata*	1	80%
H	9.	*Hedysarum obscurum*	1	70%
H	10.	*Cortusa sibirica*	1	70%
H	11.	*Primula carpatica*	1	60%
H	12.	*Astrantia major*	3	60%
H	13.	*Leontodon hispidus* var. *opimus*	1	60%
H	14.	*Hypericum quadrangulum*	5	60%
G	15.	*Valeriana sambucifolia*	3	50%
H	16.	*Viola biflora*	2	50%
H	17.	*Saussurea macrophylla*	4—5	40%
H	18.	*Chrysanthemum rotundifolium*	3	40%
Ch	19.	*Arabis alpina*	3	40%
Ch	20.	*Thymus alpestris*	0	40%
H	21.	*Campanula Kladniana*	3	30%
H	22.	*Chaerophyllum hirsutum*	4	30%
H	23.	*Thalictrum aquilegiifolium*	3	30%
H	24.	*Bellidiastrum Michelii*	3	30%
H	25.	*Deschampsia caespitosa*	1. 3	30%
H	26.	*Myosotis palustris*	3	20%
H	27.	*Filipendula ulmaria*	3	20%
H	28.	*Delphinium oxysepalum*	2	20%
H	29.	*Crepis paludosa*	4	10%
H	30.	*Aconitum firmum*	3	10%
F	31.	*Salix nigricans*	1	10%
G	32.	*Paris quadrifolia*	0	10%
H	33.	*Tofieldia calyculata*	0	10%
H	34.	*Festuca supina*	3	10%
H	35.	*Aspidium lonchitis*	1	10%

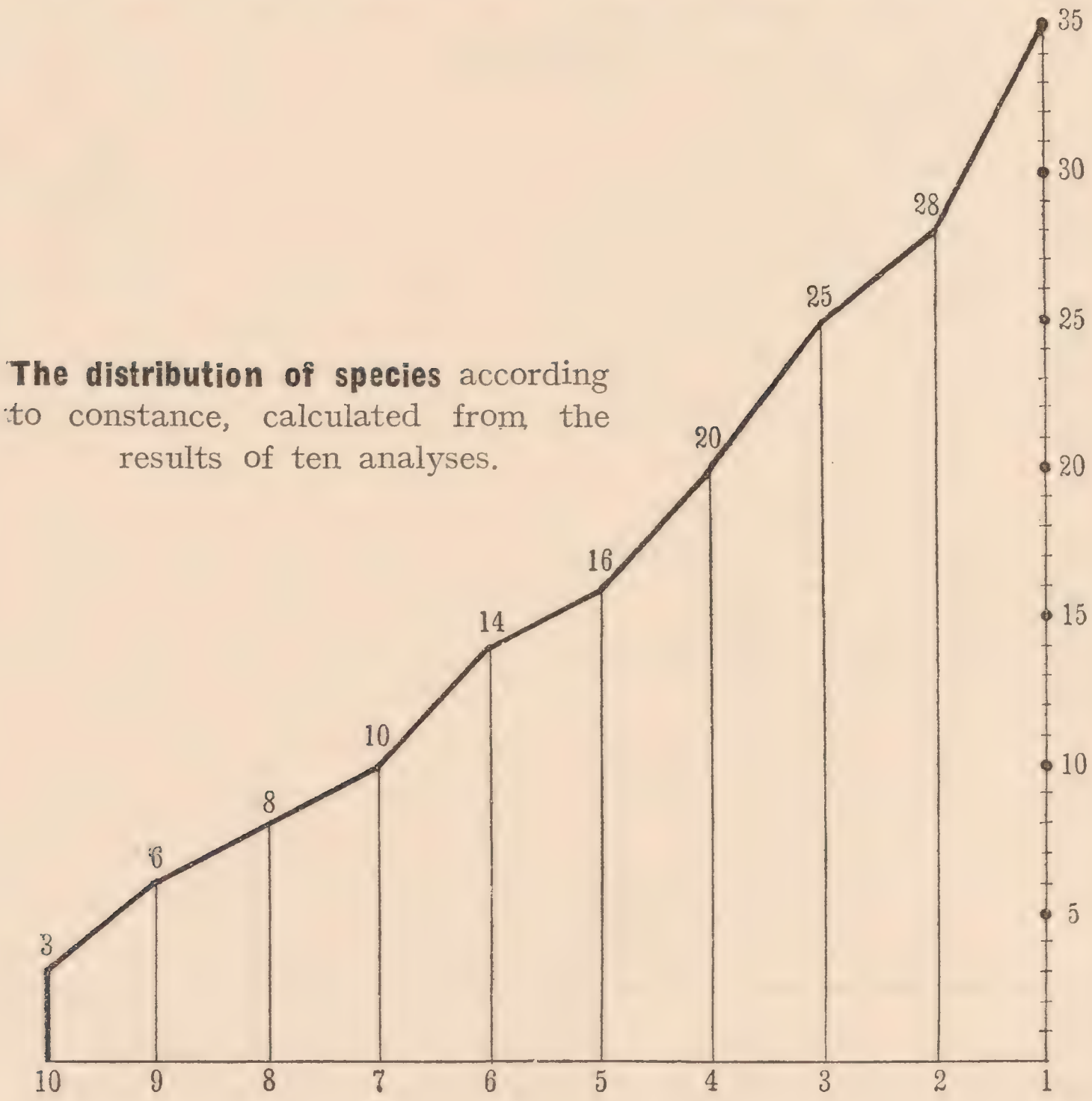
This Festucetum carpaticae, although physiognomically exceedingly characteristic, looked to me like an atypical and somewhat more hygrophilous example of this association. If, howerer, we compare

its analysis with the general result of the analyses of this association in different parts of the Tatras of Biela, we find that in reality it is quite typical, for it has almost all constant species, that is all three species with a constance of 100%, 3 species out of 4 with a constance of 90% (*Polygonum bistorta* lacking) and 2 species out of 3 with a constance of 80% (*Crepis mollis* lacking). It is interesting to note that not even a single new species appears. The curve designating constance descends also at 50% and of course rises but little in the lowest class, as is natural on account of the small number of accessory species. The same is to be observed on the curve designating the distribution of species.

The constance of species, worked out on the basis of the results of ten analyses. On the horizontal axis is the degree of constance in %, on the vertical axis the number of species.



The distribution of species according to constance, calculated from the results of ten analyses.



In the original text are also recorded the results of analyses of some atypical examples of this association.

Sur la construction de la courbe gauche du 3^{e} ordre, de la courbe gauche du 4^{e} ordre et de la première espèce et de la surfacce du seconde degré au moyen du plus grand nombre possible de points imaginaires conjugués.

Par

J. SOBOTKA.

Présenté le 22 mai 1925.

1. Dans le mémoire intitulé „Lineare Konstruktion einer Raumkurve dritter Ordnung aus drei Paaren konjugiert imaginärer Punkte“[1]) J. Thomae a publié une construction intéressante d'une courbe gauche k^3 du troisième ordre, en supposant qu'on a donné trois couples de points de la courbe qui sont situés sur trois droites g_1, g_2, g_3 et y forment les points doubles de trois involutions elliptiques Γ_1, Γ_2, Γ_3. Dans ce qui suit je désigne ces points doubles G_1, G_1'; G_2, G_2'; G_3, G_3'. Ces six points se projettent des points sur g_1 par des cônes du deuxième degré qui passent par la droite g_1. C'est le théorème suivant qui sert à Thomae comme le point du départ: „Un plan quelconque passant par la droite g_1 rencontre chacun des cônes mentionnés en une nouvelle droite. Cette droite enveloppe une conique lorsque les sommets des cônes parcourent la série des points sur g_1.“

Thomae donne une démonstration analytique de ce théorème.

Mais on peut obtenir cette connexion et la construction de la courbe k^3 aussi directement de la construction de Chasles qui a été déduite en cas des points G_1, . . . G_3' réels. On peut exprimer cette construction par le théorème:

„Considérons le tetraèdre qui a pour sommets les quatre points donnés G_2, G_2', G_3, G_3' de la courbe k^3. Lorsqu'on coupe ce tetraèdre par un plan R qui passe par les deux autres points donnés G_1, G_1', on obtient un quadrilatère dans le quel on peut inscrire une conique touchant la

[1]) Berichte der sächs. Gesell. d. Wissensch zu Leipzig 56, 1902.

droite $G_1 G_1'$; les deux autres tangentes, menées des points G_1 et G_1', à cette conique, se rencontrent en un point R qui appartient à la courbe k^3."

La démonstration du théorème consiste en ce que deux triangles inscrits dans une conique donnée sont circonscrits à une autre. Cette propriété subsiste même quand les triangles cessent d'être réels.

On peut prendre le tetraèdre $G_2 G_2' G_3 G_3'$ pour le tetraèdre fondamental d'un complex tetraèdral, la droite $g_1 = G_1 G_1'$ étant un rayon de ce complex. Un point quelconque H sur g_1 est le sommet d'un cône du complex qui est déterminé par les droites g_1, $H G_2$, $H G_2'$, $H G_3$, $H G_3'$. Un plan quelconque R passant par g_1 contient la conique u du complex enveloppée par les droites appartenant au complex. Cette conique est inscrite dans le quadrilatère qui est la section du tetraèdre $G_2 G_2' G_3 G_3'$ par le plan R. Lorsque le point H parcourt la droite g_1, dans chaque position de H le plan R contient, outre la droite g_1, la droite du cône respectif H qui est tangente à u. Nous sommes arrivés ainsi au théorème déduit par Thomae. Les cônes du complex avec les sommets G_1, G_1' se coupent en g_1 et en courbe k^3. Deux quelconques des cônes mentionnés H sont projectifs et se rencontrent en courbe cubique circonscrite au tetraèdre $G_2 G_2' G_3 G_3'$ qui est une courbe associée du complex (Ordnungskurve).

Les cônes H_1, H_1' avec les sommets H_1, H_1' déterminent une courbe associée ${h_1}^3$ et les cônes H_2, H_2' avec les sommets H_2, H_2' une autre ${h_2}^3$. Deux courbes associées du complex sont situées sur une quadrique Q dont une série des droites est formée par les rayons du complex.[1]) Les droites de cette série coupent deux fois les deux courbes associées. En cas présent la surface Q passant par ${h_1}^3$ et ${h_2}^3$ contient alors la droite g_1 d'une telle série. Par conséquent le plan quelconque R passant par g_1 coupe encore une fois la courbe ${h_1}^3$ dans un point R_1 et la courbe ${h_2}^3$ dans un point R_2. La droite $r = R_1 R_2$ est une droite située sur Q et appartenant à la seconde série.

R_1, R_2 sont en même temps les points où se rencontrent les tangentes menées dans le plan R de H_1, H_1' ou de H_2, H_2' à la courbe u du complex. Envisageons l'involution sur g_1, déterminée par $H_1 H_1'$, $H_2 H_2'$, H, H'. $H H'$ étant un couple quelconque de cette involution, le point d'intersection de deux tangentes menées de H et H' est situé sur r. Désignons-le par R^*.

Il en suit le théorème:

„Considérons toutes les courbes cubiques gauches passant par quatre points donnés et ayant une droite donné pour la bisecante commune. Cette bisecante en soit coupée dans des couples de points formant une involution; alors toutes les courbes mentionnées sont situées sur une quadrique."

---

[1]) Cf. Reye: Die Geometrie der Lage. III. Abt. (1910.) Erster Vortrag.

2. Nous pouvons alors resoudre le problème suivant:

Les couples de points imaginaires conjugués $G_1\,G_1'$, $G_2\,G_2'$, $G_3\,G_3'$ sur les droites g_1, g_2, g_3 étant donnés par les involutions Γ_1, Γ_2, Γ_3 qui déterminent la courbe k^3; construire le point R, dans le quel un plan quelconque passant par g_1 coupe encore une fois la courbe.

Nous déterminons la section du tetraèdre $G_2\,G_2'\,G_3\,G_3'$ par le plan R. Nous obtenons ainsi un quadrilatère. Deux côtés de ce quadrilatère passent par la trace M_2 de la droite g_2 dans le plan R et ils forment les rayons doubles de l'involution (M_2), formée par l'intersection du plan R avec l'involution du faisceau des plans qui projettent Γ_3 de la droite g_2. D'une manière analogue nous déterminons les deux autres côtés du quadrilatère au moyen de l'involution (M_3) qu'on obtient en projetant sur le plan R l'involution Γ_2 de la droite g_3. Ces deux autres côtés passent par M_3, point d'intersection de la droite g_3 et du plan R.

Soit L_0 le point d'intersection des droites $(M_2\,M_3)$ et g_1. Construisons le point L_0' qui forme avec L_0 un couple de points dans l'involution Γ_1. Soit enfin $L_1\,L_1'$ un autre couple de points dans Γ_1. La courbe u est tangente à la droite g_1, aux droites doubles dans (M_2) et aux droites doubles dans (M_3).

Par ces conditions elle est complètement déterminée. Nous pouvons alors linéairement construire les autres tangentes menées des points L_0, L_0', L_1, L_1' à la courbe u. Soient $l_0\,l_0'$, $l_1\,l_1'$ ces tangentes. Pour effectuer cela nous avons à construire les droites m_0, m_0', m_1, m_1' qui correspondent dans (M_2) aux droites M_2 (L_0, L_0', L_1, L_1'), ainsi que les droites n_0, n_0', n_1, n_1' qui correspondent dans (M_3) aux droites M_3 (L_0, L_0', L_1, L_1'). l_0 est alors la droite harmonique à g_1 par rapport à la droite $(M_2\,M_3)$ et à la droite qui passe par les points L_0, (m_0, n_0). l_0' est la seconde tangente menée du point L_0' à la conique déterminée par les tangentes g_1, m_0, n_0, m_0', n_0'. l_1 est la seconde tangente menée du point L_1 à la conique déterminée par les tangentes g_1, m_0, n_0, m_1, n_1. Enfin l_1' est la seconde tangente menée du point L_1' à la conique déterminée par les tangentes g_1, m_0, n_0, m_1', n_1'. Nous obtenons ainsi l'involution $l_0\,l_0' \,.\, l_1\,l_1'$ des tangentes à la courbe u. Les éléments doubles de cette involution sont formés par les secondes tangentes t_1, t_1' menées à la courbe des points imaginaires conjugués G_1, G_1'. Le point cherché $R = (t_1 \,.\, t_1')$ est alors le pôle de cette involution. Par conséquent nous obtenons le point R comme point d'intersection de la droite passant par les points (l_0, l_1), (l_0', l_1') et de celle passant par les points (l_0, l_1'), $(l_0'\ l_1)$.

Il est aisé à voir comment on procéderait, si l'on choisissait deux autres couples quelconques dans Γ_1.

Soient M_1, M_1' et N_1, N_1' les points, où la droite g_1 est coupée par les droites m_1, m_1' et n_1, n_1'. Si l'on fait passer par la droite g_1 un plan quelconque, $\overline{\mathrm{R}}$ qui rencontre g_2 en $\overline{M_2}$ et g_3 en $\overline{M_3}$, on obtient une construction du point $\overline{R}$ analogue à celle qui était expliquée tout-à-l'heure. $\overline{R}$ est

le point où le plan $\overline{\mathrm{R}}$ rencontre encore une fois la courbe k^3. Dans cette construction le couple $L_0\,L_0'$ parcourt l' involution Γ_1 tandisque le couple $L_1\,L_1'$ peut être considerer comme fixe. Par conséquent on peut, en général, remplacer les droites m_1, m_1' et n_1, n_1' par les droites $\overline{M}_2\,M_1$, $\overline{M}_2\,M_1'$ et $\overline{M}_3\,M_1$, $M_3\,\overline{M}_1'$, tandisque dans les plans passant par g_1 et par les transversales menées, soit du point L_1, soit du point L_1', à g_2 et g_3, on remplacera $L_1\,L_1'$ par un autre couple de Γ_1 qui était déjà employé dans ce qui précède. Il est de même évident quelles modifications il faut faire, lorsqu'on choisit au lieu de $L_0\,L_0'$, $L_1\,L_1'$ deux couples quelconques, mais fixes, dans Γ_1.

3. Choisissons sur g_1 deux points réels quelconques X, X'. Ceux-ci déterminent avec les points $G_1\,G_1'$ une involution $X\,X'\,.\,G_1\,G_1'$ qui est toujours hyperbolique parce qu'elle contient un couple de points imaginaires conjugués. Elle contient alors un nombre infini des couples réels, nous en choisissons encore un $Y\,Y'$. Dans un plan arbitraire R les tangentes menées de X et X' à la courbe u et autres que g_1 se rencontrent en un point R_ξ et de même les tangentes menées de Y et Y' en un point R_η. C'est sur la droite $r = R_\xi\,R_\eta$ où se trouve R, point d'intersection des tangentes menées de G_1 et G_1'. Lorsque le plan R pivote autour de g_1, la droite r décrit une série sur la quadrique Q, comme nous avons dit plus haut. Nous avons obtenu ainsi une quadrique réelle contenant la courbe cherchée k^3. Pour un autre couple $X\,X'$ choisi sur g_1 nous obtenons une autre surface pareille et nous pouvons arriver ainsi à chaque surface quadratique qui passe en même temps par g_1 et par k^3.

4. On peut de même construire une quadrique Q_{12} qui passe par la courbe cherchée k^3 et par les droites g_1, g_2. En général on peut construire des quadriques qui passent par k^3 et par deux quelconques des droites g_1, g_2, g_3.

Projetons l'involution Γ_3 de la droite g_2 sur g_1. Nous obtenons ainsi une involution I_3. Les éléments doubles $G_1\,G_1'$ dans Γ_1 et $J_3\,J_3'$ dans I_3 peuvent être considérés comme deux couples appartenant à une involution nouvelle I. Menons dans un plan arbitraire R qui passe par g_1 les tangentes des points dans I à la courbe correspondante u. Nous obtenons ainsi une involution des tangentes menées à u. L'axe de cette involution r contient en même temps le point R de la courbe k^3 et le point M_2. Si l'on fait maintenant pivoter R autour de g_1, r décrit une surface Q_{12} qui passe par k^3 et par g_1 et g_2. De la même manière on obtient la surface Q_{13}, lorsqu'on projette Γ_2 de la droite g_3 sur la droite g_1. On obtient alors une involution dont les points doubles $J_2\,J_2'$ déterminent avec $G_1\,G_1'$ une autre involution $I' = G_1\,G_1'\,.\,J_2\,J_2'$ qui conduit à l'involution des tangentes menées à u. L'axe de cette dernière r' passe par les points M_3, R et décrit la surface Q_{13}, lorsque R pivote autour de g_1. On n'a pas besoin de construire les points doubles dans I et I'. Par conséquent la construction expliquée est linéaire.

Si, en cas particulier, les points doubles de I devenaient identiques à ceux de I', la courbe k^3 serait située sur la surface quadratique G déterminée par les droites g_1, g_2, g_3. Pour ce cas Thomae indique une construction particulière de la courbe k^3 qui est très simple. Nous la traiterons dans ce qui suit.

En ce cas particulier soient H_1, H_2, H_3 les points où une transversale arbitraire h des droites g_1, g_2, g_3 les rencontrent et soient H_1', H_2', H_3' les points qui correspondent aux points mentionnés dans les involutions Γ_1, Γ_2, Γ_3. Le plan H_1', H_2', H_3' rencontre la droite h en point H qui est situé sur la courbe k^3. Thomae ne donne pas la démonstration de ce théorème parce qu'il est trop simple. Mais on peut s'en assurer aussi directement.

Chaque droite h sur G qui coupe g_1, g_2, g_3 rencontre la courbe k^3 en un seul point H. Projetons k^3 du point mentionné sur un plan arbitraire et soit H_0 le point d'intersection de ce plan et de la droite h. k^3 devient une conique et H_1', H_2', H_3' deviennent les points conjugués à H_0 par rapport à la conique. Ces points sont donc situés sur une droite et par conséquent les points H_1', H_2', H'_3 sont situés dans un plan qui passe par le centre de projection H.

Pour le cas général on peut facilement construire une surface quadratique qui passe par k^3 et par deux quelconques des droites g_1, g_2, g_3 d'une autre manière. Construisons la surface G_1 qui passe par k^3 et par g_2 et g_3. Les droites de cette surface appartenant à la même série que g et g_3 rencontrent k^3 en une involution qui est projetée de la droite g_1 par l'involution Γ. Dans cette involution nous pouvons linéairement construire un couple quelconque de plans réels $L_1\,L_1'$. Dans ce but coupons l'involution de plans qui projettent Γ_2 et Γ_3 de la droite g_1 par un plan arbitraire M. Nous obtenons ainsi deux involutions Γ'', Γ''' dans le faisceau de droites qui ont comme centre la trace M de la droite g_1 dans le plan M. Soient $m_1\,m_1'$, $m_2\,m_2'$ deux couples dans Γ'' et $n_1\,n_1'$, $n_2\,n_2'$ deux couples dans Γ'''. Lorsqu'on choisit sur chacune de quatre de ces huit droites un point, ces quatre points et le point M déterminent une conique m qui est coupée par Γ'' et Γ''' dans deux involutions nouvelles. Nous pouvons linéairement construire les axes q, q' de ces dernières involutions d'une manière connue. Le point d'intersection Q des droites q, q' est le centre d'une involution déterminée par les éléments doubles des involutions mentionnées sur m. Si l'on fait passer par un point déjà employé sur m, soit I ce point, et par le point Q une droite, elle rencontrera m encore en un point II qu'on peut construire linéairement. Maintenant les plans $R_1 = (g_1\,I)$, $R_2 = (g_1\,II)$ jouissent de la propriété qu'ils rencontrent k^3 en nouveaux points R_1, R_2 et que la droite $R_1\,R_2$ appartient à la surface G_1. On choisit la conique m convenablement pour qu'elle soit tangente à une des droites m_1, m_1', . . . n_2, n_2'. En ce cas on peut prendre pour R_1, R_2 les plans dont le premier passe par cette tangente et le second, par le point Q.

Pour la suite il faut alors construire dans les plans R_1, R_2 les points R_1, R_2 sur k^3 qui sont toujours réels et la construction est réduite au cas particulier précédent. On construit alors les transversales q aux droites g_2, g_3, $R_1 R_2$ et on détermine les points qui correspondent dans Γ_2, Γ_3 aux points d'intersection de ces transversales avec g_2, g_3. Puis on fait passer un plan par ces points et par le point sur $(R_1 R_2)$ harmonique au point $(R_1 R_2 . q)$, par rapport à R_1 et R_2. Ce plan coupe la transversale envisagée dans un point appartenant à k^3. On arrive ainsi à tous les points réels de cette courbe.

5. L'involution sur k^3 formée par ces bisecantes qui appartiennent à une quadrique Q possède deux éléments doubles D_1, D_2. Par conséquent ces bisécantes contiennent deux tangentes de la courbe. Si l'involution contient au moins un couple d'éléments imaginaires conjugués, les points doubles sont réels.

Si s désigne une droite quelconque située sur Q de la seconde série qui coupe k^3 au point S, comme on a déjà dit, les points conjugués aux points de la droite s par rapport à la courbe k^3 sont situés dans un plan S qui coupe la droite s au point S. Le plan S passe alors par la droite $D_1 D_2$. Par ce fait on peut simplifier un peu la construction des points sur k^3 au moyen de la surface G_1. Pour trouver un point de la courbe, situé sur une transversale q menée aux droites g_2, g_3, $R_1 R_2$, on détermine par exemple le point harmonique au point où se coupent q et $R_1 R_2$ par rapport aux points R_1, R_2 et le plan qui passe par ce point et par la droite $(D_1 D_2)$ coupe q au point cherché.

La connexion indiquée conduit à la construction suivante de la courbe k^3 au moyen de la surface $G_3 = (g_1 g_2 k^3)$. On fait passer par la droite g_1 deux plans et on y détermine les points R_1, R_2 appartenant à la courbe k^3. Soient A_1 et A_2 les points où le premier et le second plan coupe g_2. Les droites $a_1 = A_1 R_1$, $a_2 = A_2 R_2$ appartiennent à la surface G_3. Soient B_1 et B_2 les points où g_1 recontre a_1 et a_2. Soient B_1' et B_2' les points correspondant aux points B_1' et B_2' dans l'involution Γ_1 et A_1', A_2' les points correspondant aux points A_1, A_2 dans l'involution Γ_2. Les plans $R_1 = B_1' A_1' R_1$, $R_2 = B_2' A_2' R_2$ se coupent dans la droite d qui passe par les éléments doubles D_1, D_2 de l'involution $G_1 G_1'$, $G_2 G_2'$ sur la courbe k^3.

La droite a_2 coupe le plan R_1 au point Q_1. On trouvera ce point sur la droite commune aux plans $(g_2 R_2)$ et R_1 et passant par les points $(d . A_2' R_2)$ et A_1' ainsi que sur la droite commune aux plans $(g_1 R_2)$ et R_1 et passant par les points $(d . B_2' R_2)$ et B_1'. D'une manière analogue on trouvera le point Q_2 comme le point d'intersection de la droite a_1 avec le plan R_2. Ce point est situé sur la droite passant par les points $(d . A_1' R_1)$ et A_2' et aussi sur celle passant par les points $(d . B_1' R_1)$ et B_2'. Le plan R_1 coupe la surface G_3 dans la conique k_1 passant par les points A_1', B_1', R_1, Q_1. De même le plan R_2 la coupe dans la conique k_2 passant par les points A_2', B_2', R_2, Q_2. Les coniques k_1, k_2 se rencontrent sur la droite d. Par consé-

quent on peut les construire linéairement. Nous le ferons pour k_1. Les coniques passant par les points A_2', B_2', R_2, Q_2 forment sur d une involution. Les coniques passant par les points A_1', B_1', R_1 et par les couples de points de cette involution forment un faisceau. Elles se rencontrent alors toutes encore une fois en U_1. Par conséquent la conique k_1 passe aussi par U_1 et elle est complètement déterminée par les points A_1', B_1', R_1, Q_1, U_1.

Soit F_1 le point d'intersection des droites $A_1' B_1'$ et d. Déterminons le second point F_2 auquel la droite d coupe la conique déterminée par les points F_1, A_2', B_2', R_2, Q_2. Les droites $F_1 A_1'$ et $F_2 R_1$ forment un élément dans le faisceau mentionné. Par conséquent le point U_1 est situé sur la droite $R_1 F_2$; il est, par exemple, le second point d'intersection de cette droite avec la conique déterminée par les points A_1', B_1', R_1 et par les points d'intersection de la droite d avec les droites $A_2' B_2'$, $R_2 Q_2$.

Àfin de construire un autre point R de la courbe k^3 situé dans un plan arbitraire R passant par la droite g_1, coupons ce plan par la droite d au point E. La droite $B_1' E$ rencontre k_1 encore une fois en point V_1. Soit E' le point d'intersection des droites $A_1' V_1$ et d, et V_2 le point d'intersection des droites $E' A_2'$, $E B_2'$. La droite $V_1 V_2$ coupe g_1, g_2 et k_1; elle est donc située sur la surface G_3. Soit C_1 le point où elle rencontre g_1. Désignons par C_1' le point qui correspond au point C_1 dans Γ_1. Le point cherché R est point d'intersection des droites $C_1' E$ et $V_1 V_2$. D'une manière analogue soit C_2 le point d'intersection des droites $V_1 V_2$ et g_2 et C_2' son point correspondant dans l'involution Γ_2. Le point R est aussi point d'intersection des droites $C_2' E'$ et $V_1 V_2$. On peut effectuer par analogie la construction du point réel situé sur k^3 dans un plan arbitraire passant par g_2. La courbe k^3 est alors engendrée par la série des droites $V_1 V_2$, . . . sur G_3 et par un faisceau des plans qui est projectif à cette série et qui possède la droite d comme axe.

Inversement on peut trouver le point D où un plan arbitraire D passant par la droite d rencontre encore une fois la courbe k^3. On coupe le plan indiqué par les droites g_1, g_2 aux points E_1, E_2 et on trouve dans Γ_1 le point E_1' correspondant à E_1 et dans Γ_2 le point E_1' correspondant à E_2. Le point cherché D est point d'intersection de la droite $E_1' E_2'$ et du plan D.

6. Si l'on admet des constructions quadratiques, la construction des points sur la courbe k^3 devient très simple. Si l'on projette Γ_2 de la droite g_3 sur la droite g_1, on obtient une involution Γ^* qui a avec Γ_1 un couple réel $G_{12} G_{12}'$ commun. Les plans $D_1 = (g_3 G_{12})$, $D_2 = (g_3 G_{12}')$ sont harmoniques par rapport aux couples $G_1 G_1'$, $G_2 G_2'$.

Par conséquent la courbe k^3 est coupée par le premier plan au point réel D_1, par le second plan au point réel D_2, et ces points sont situés sur la droite d. Soient G_{22} et G_{22}' les points où la droite g_2 rencontre les plans D_1 et D_2, N et N' les points où la droite g_3 rencontre les droites $G_{12} G_{22}$

et $G_{12}' G_{22}'$. Le point D_1 dans le plan D_1 est le point d'intersection des tangentes menées de G_3 et de G_3' à la conique u_1 qui a comme tangentes la droite g_3 et les droites d'intersection du plan D_1 avec les plans $(g_1 G_2)$, $(g_1 G_2')$, $(g_2 G_1)$, $(g_1 G_1')$. Les droites $G_{12} N'$ et $G_{22} N'$ sont conjuguées à la droite $(G_{12} G_{22})$ par rapport à u_1. Par conséquent la droite $(G_{12} G_{22})$ est la polaire du point N' par rapport à u_1, cette conique est alors tangente en point N à la droite g_3. Soit t_0 la seconde tangente menée du point N' à u_1. Les tangentes menées à u_1 rencontrent g_3 et t_0 en couples de points qui se projettent d'un point arbitraire sur $G_{12} G_{22}$, par une involution des droites conjuguées par rapport à u_1. Il s'ensuit pour un point quelconque L sur la droite g_3, que la droite menée par le point G_{12} et conjuguée à la droite $G_{12} L$ par rapport à u_1 rencontre la droite menée par le point G_{22} et conjuguée à la droite $G_{22} L$ par rapport à u_1 en point L_0 qui est situé sur la tangente t_0. Il s'ensuit de même que la droite $L L_0$ est tangente à la courbe u_1.

Puis faisons passer par la droite g_3 un troisième plan arbitraire D_0. Soient O_1 et O_2 les points, où les droites g_1 et g_2 rencontrent ce plan, et soit O_3 le point d'intersection de la droite $O_1 O_2$ avec g_3. Désignons enfin par O_1' le point qui correspond au point O_1 dans Γ_1 et par O_2' le point qui correspond au point O_2 dans Γ_2. La droite $O_1' O_2'$ rencontre D_1 en O_{13} et D_2 en O_{23}. La droite $G_{12} O_3$ est alors conjuguée par rapport à u_1 à la droite $G_{12} O_{13}$, la droite $G_{22} O_3$ est conjuguée à la droite $G_{22} O_{13}$, par conséquent le point O_{13} est situé sur la tangente t_0. L'involution (G_{12}) des droites conjuguées par rapport à u_1 et passant par le point G_{12} est ainsi déterminée par les couples $G_{12} N$, $G_{12} N'$; $G_{12} O_3$, $G_{12} O_{13}$ et de même l'involution (G_{22}) des droites conjuguées et passant par le point G_{22}, par les couples $G_{22} N$, $G_{22} N'$; $G_{22} O_3$, $G_{22} O_{13}$.

On tire de ces considérations la construction suivante du point D_1: Après avoir construit les points N, N', O_3, O_{13}, nous avons la courbe u_1 suffisamment déterminée, puis qu'elle est tangente à la droite g_3 en point N, à la droite $t_0 = (N' O_{13})$ en point d'intersection avec la droite $G_{12} G_{22}$ et à la droite $o_1 = (O_3 O_{13})$. Si nous désignons par O_3' le point correspondant au point O_3 dans l'involution Γ_3 et par $P_3 P_3'$ un autre couple quelconque de cette involution, nous construirons d'autres tangentes o_1', p_1, p_1' menées des points O_3', P_3, P_3'. Maintenant la droite passant par les points $(o_1 p_1)$ et $(o_1' p_1')$ rencontrera la droite passant par les points $(o_1 p_1')$ et $(o_1' p_1)$ en point cherché D_1. Dans le plan D_2 une courbe analogue u_2 est déterminée par la tangente g_3 en point N', par la tangente $N O_{23}$ en point situé sur $G_{12}' G_{22}'$ et par la tangente $o_2 = (O_3 O_{23})$. Nous pouvons alors construire les tangentes o_2', p_2, p_2' menées à la courbe u_2 des points O_3', P_3, P_3' respectivement. Or, la droite passant par les points $(o_2 p_2)$, $(o_2' p_2')$ coupe la droite passant par les points $(o_2 p_2')$, $(o_2' p_2)$ au point D_2. Ensuite on construit d'autres points sur k^3 dans les plans passant par la droite $d = D_1 D_2$.

7. Au moyen de la droite d on peut de même déduire la construction suivante de la courbe donnée k^3. Envisageons de nouveau la qua-

drique G_3, qui joint les droites g_1, g_2 à k^3. Soit R un plan arbitraire passant par la droite g_3. Déterminons y, comme en cas précédent, un point réel R de la courbe k^3, puis menons par ce point une droite r qui rencontre g_1 et g_2 en points A_1 et A_2 et par conséquent appartient à la surface G_3. Soient A_1', A_2' les points qui correspondent dans les involutions Γ_1, Γ_2 aux points A_1, A_2. La droite d est située dans le plan $R\,A_1'\,A_2'$. La surface G_3 rencontre R en conique k^* qui passe par le point R, par les traces H_1, H_2 des droites g_1, g_2 dans R et par les points G_3, G_3' sur g_3. Par ces conditions la conique k^* est complètement déterminée. Construisons deux autres points réels quelconques sur k^*. Lorsqu'on désigne par 1 le point où se rencontrent $H_1\,R$ et g_3, par $1'$ son point correspondant dans Γ_3, par $1''$ le point harmonique à 1 par rapport aux points H_1, R; $1'\,1''$ est la polaire du point 1 par rapport à la courbe k^*. Si l'on fait passer une droite par le point d'intersection des droites $1'\,1''$, $H_2\,R$ et par le point H_1, cette droite rencontrera la droite $H_2\,1$ en point Q^* qui est situé sur k^*. D'une manière analogue on construit par exemple le point S^*, où se rencontrent encore une fois la courbe k^* et la droite qui joint le point R au point d'intersection des droites $H_1\,H_2$ et g_3. Les transversales s, q menées des points S^*, Q^* aux droites g_1, g_2 sont situées sur G_3. Soient S_1, S_2 et Q_1, Q_2 les points où la première et la seconde transversale rencontrent les droites g_1, g_2. Désignons par S_1', Q_1' les points qui correspondent aux points S_1, Q_1 dans Γ_1 et par $S_2'\,Q_2'$ les points qui correspondent aux points S_2, Q_2 dans Γ_2. Les droites s, q de la surface G_3 coupent k^3, chacune dans un point S resp. Q et les plans $S_1'\,S_2'\,S$, $Q_1'\,Q_2'\,Q$ passent aussi par la droite d. Il s'ensuit que les points d'intersection S_0, Q_0 des droites $S_1'\,S_2'$, $Q_1'\,Q_2'$ avec le plan $R\,A_1'\,A_2'$ sont situés sur la droite d qui en est déterminée. Les points S, Q sur k^3 sont de même déterminés comme les traces des droites $(S_1\,S_2)$, $(Q_1\,Q_2)$ dans les plans $(S_1'\,S_2'\,d)$, $(Q_1'\,Q_2'\,d)$. Par cela on a déterminé la projectivité de la série des droites r, s, q, . . . sur G_3 avec les faisceaux de plans ayant comme axes g_1, g_2, g_3, d. On fait correspondre aux droites r, s, q, dans chaque faisceau de plans les éléments qui contiennent les points R, S, Q. Chaque telle projectivité engendre la courbe k^3 qui est aussi formée par la projectivité de n'importe quels trois faisceaux de plans envisagés.

8. On peut indiquer une autre construction des points de la courbe k^3 au moyen des quadriques G_3, G_2 dont la première joint les droites g_1, g_2, la seconde les droites g_3, g_1 à la courbe k^3. Menons par la droite g_1 un plan arbitraire qui coupe g_2 dans le point H_2 et g_3 dans le point K_3. Dans ce plan on construit le point réel R de la courbe k^3 de la manière indiquée dans ce qui précède. La droite $R\,H_2$ est située alors sur G_3, la droite $R\,K_3$, sur G_2. Les droites g_1, g_2, g_3 déterminent une quadrique G, sur laquelle la série des droites ϕ . . . qui coupent g_1, g_2, g_3 forment une involution perspective avec l'involution Γ_3. Cette involution des droites I_3 coupe g_2 dans l'involution des points Γ_2'' et g_1 dans l'involution des points Γ_1'. Les élé-

ments doubles dans I_3 sont formés par les droites situées sur la surface G_3. Soit H_1 le point d'intersection des droites $R\,H_2$ et g_1 et soit H_1' son point correspondant dans Γ_1'. Déterminons maintenant le couple $L_1\,L_1'$ dans Γ_1' qui est harmonique par rapport à $H_1\,H_1'$. De même désignons par H_2' le point qui correspond dans Γ_2'' à H_2 et par $L_2\,L_2'$ le couple de Γ_2'' qui est harmonique par rapport à $H_2\,H_2'$. Si un point parcourt la droite g_3 dans un certain sens, la transversale ϕ menée par ce point décrit G et son point d'intersection avec g_2 parcourt g_2 dans un sens déterminé. Enfin le point d'intersection de cette transversale et de g_1 se déplace aussi dans un certain sens. Supposons que, en parcourant la droite g_1 dans le sens indiqué, on rencontrera d'abord le point H_1, puis L_1 et par conséquent enfin H_1' et L_1'. De même soit H_2, L_2, H_2', L_2' la suite des points sur g_2 dans le sens indiqué. Les droites $H_1\,H_2$, $L_1\,L_2$, $H_1'\,H_2'$, $L_1'\,L_2'$ déterminent alors une quadrique avec une involution des droites $(H_1\,H_2)$. $(H_1'\,H_2')$, $(L_1\,L_2)$. $(L_1'\,L_2')$ dont les éléments doubles passent par les points G_3, G_3' sur k^3. Cette surface est évidemment G_3 parce qu'elle joint les points R, G_3, G_3' aux bisecantes g_1, g_2 et contient par conséquent la courbe k^3.

On construit d'une manière analogue la surface G_2. On détermine dans la série $\phi, \ldots$ des droites sur la surface G l'involution perspective avec Γ_2, qui coupe g_3 dans une involution Γ_3' et g_1 dans une autre Γ_1''. Si la droite $R\,K_3$ rencontre la droite g_1 au point K_1, on détermine dans Γ_1'' le couple $K_1\,K_1'$ et le couple $M_1\,M_1'$, qui est harmonique par rapport au précédent, dans Γ_3' de la même manière le couple $K_3\,K_3'$ et le couple harmonique $M_3\,M_3'$. On joint ces points dans les sens respectifs et on obtient ainsi quatre droites sur G_2: $R\,K_1$, $K_3'\,K_1'$, $M_3\,M_1$, $M_3'\,M_1'$.

Si un plan arbitraire passant par g_1 rencontre la droite g_2 en point X_2 la droite g_3 en point Y_3, on construit sur g_1 les points X_1, Y_1 pour qu'il soit $(H_1\,L_1\,H_1'\,X_1) = (H_2\,L_2\,H_2'\,X_2)$ et $(K_1\,M_1\,K_1'\,Y_1) = (K_3\,M_3\,K_3'\,Y_3)$; alors la droite $X_1\,X_2$ située sur la surface G_3 coupe la droite $Y_3\,Y_1$ située sur la surface G_2 dans le point X de la courbe k^3.

Cette construction n'est pas complétement linéaire puis que la construction des couples harmoniques dans une involution donnée est quadratique.

9. Ce qui est plus compliqué c'est la construction d'une courbe gauche du quatrième ordre et de la première espèce qui est donnée par quatre couples $G_1\,G_1'$, $G_2\,G_2'$, $G_3\,G_3'$, $G_4\,G_4'$ des points imaginaires conjugués situés sur les droites g_1, g_2, g_3, g_4. Il s'agit de faire passer par ces huit points deux surfaces quadratiques. Les premiers trois couples déterminent une courbe cubique k_4^3 et on construit une quadrique Q_4 qui passe par k^3 et par les points $G_4\,G_4'$. De même on fait passer une autre quadrique Q_3 par les points $G_3\,G_3'$ et par la courbe cubique k_3^3 qui est déterminée par les couples $G_1\,G_1'$, $G_2\,G_2'$, $G_4\,G_4'$. La courbe cherchée est alors l'intersection de deux surfaces Q_4, Q_3.

Pour atteindre ce but on fait passer par la droite g_1 deux plans R_1, R_2 et on détermine par la manière indiquée dans ce qui précède les points réels d'intersection de ces plans avec les courbes k_4^3, k_3^3. Désignons par R_1, R_2 les points d'intersection situés sur k_4^3 et par S_1, S_2 ceux, situés sur k_3^3. Puisqu'on peut construire les cônes K_1, K_2 qui projettent k_4^3 des points R_1, R_2 et les cônes analogues qui projettent k_3^3 des points S_1, S_2, on peut construire d'autres points arbitraires sur k_4^3 et k_3^3.

Le premier cône K_1 rencontre le plan $(g_4 R_1)$ en deux droites, le second cône K_2, en une conique. Ces droites rencontrent la conique outre le point R_1 en deux points R_3, R_4 situés sur la courbe k_4^3. La construction de la droite $(R_3 R_4)$ ainsi que celle de l'involution des points conjugués sur cette droite sont linéaires. De même on peut construire linéairement la conique v_4 qui passe par les points R_1, R_3, R_4, G_4, G_4' et qui est située sur la surface Q_4. Pour la surface Q_3 on construira d'une manière analogue la conique w_3 dans le plan $(g_3 S_1)$.

On peut faire la construction de la surface Q_4 aussi d'une autre manière. On détermine d'abord, d'après ce qu'on vient de dire, deux surfaces qui joignent la courbe k_4^3, l'une aux droites g_1 g_2, l'autre aux droites g_1 g_3. Soit de nouveau R un point réel sur k_4^3. Le plan R_4 déterminé par le point R et par la droite g_4 coupe les surfaces mentionnées dans deux coniques m_4, n_4 qui passent par le point R et par la trace de la droite g_1 dans le plan R_4. Par conséquent on peut linéairement construire la droite qui joint les deux autres points *1*, *2* communs aux courbes m_4, n_4, ainsi que l'involution des points qui se trouvent sur cette droite et qui sont conjugués par rapport à m_4, n_4. On a ainsi déterminé la conique w_4 passant par les points R, *1*, *2*, G_4, G_4' et située sur Q_4. Sa construction est linéaire. Au moyen de deux quadriques qui joignent k_3^3, l'une aux droites g_1, g_2, l'autre aux droites g_1, g_4. on construit d'une manière analogue la courbe w_3 située sur Q_3 et dans le plan passant par la droite g_3 et par un point réel S sur k_3^3 qu'on a construit d'abord.

10. Pour construire une quadrique P donnée par quatre couples G_1 G_1', G_2 G_2', G_3 G_3', G_4 G_4' de points imaginaires conjugués et par un point réel A, on détermine d'abord, d'après ce qu'on vient de dire, les surfaces Q_4, Q_3. Puis on peut linéairement construire les coniques q_4, q_3 dans les quelles le plan $H = (R\,S\,A)$ coupe les surfaces Q_4, Q_3 ainsi que la conique q du faisceau (q_3, q_4) qui passe par le point A et qui est située sur la surface P. Choisissons maintenant un point arbitraire sur q p. ex. le point A lui-même et menons y une transversale a à deux droites quelconques de $g_1, \ldots g_4$, par ex. à g_1, g_2. Soient J et K les points d'intersection de ces deux droites avec la transversale et E, F leurs points d'intersection avec le plan H. Désignons par J_1, J_2 les points doubles de l'involution des points conjugués sur $(E\,F)$, par rapport à la conique q. On peut linéairement déterminer cette involution par des couples de points.

Dans le plan $(F\,E\,J)$ les points G_1, G_1' et J_1, J_2 déterminent un faisceau de coniques qui coupe la droite $J\,F$ dans une involution ayant les points J, F comme un couple. On y détermine un autre couple quelconque $L\,L'$, en choisissant L arbitrairement sur la droite $J\,F$ et en construisant L' comme le second point d'intersection de la droite $J\,F$ avec la conique qui passe par les points L, G_1, G_1', J_1, J_2. Cette construction est de nouveau linéaire. Au moyen de l'involution $J\,F.\,L\,L'$ on peut construire la conique u située sur la surface P et dans le plan $(A\,g_2)$. Cette conique passe par A, par A_2 second point d'intersection de la droite $(A\,F)$ avec la conique q, par les points G_2, G_2'. Elle coupe la droite $J\,F$ dans un couple de points de l'involution $J\,F\,.\,L\,L'$. Par ces conditions elle est complètement déterminée. Toutes les coniques passant par les points A, G_2, G_2' et par les couples de points de cette involution forment un faisceau. Elles se rencontrent alors encore en un point réel V. L'une entre elles se compose des droites g_2, a; par conséquent le point V est situé sur la droite a comme un point d'intersection de a avec la conique qui passe par les points A; G_2, G_2'; L, L'. Le point V est alors linéairement déterminé et la conique u est donnée par les points A, A_2, G_2, G_2' et V. Si la droite $A\,E$ rencontre pour la seconde fois la conique q en point A_1, la conique déterminée par les points A, A_1, G, G_1', V est aussi située sur la surface P.

L'influence de Radiation α sur le Sucre du Sang.

Par

Dr. Fr. Vanýsek,
assistent de la clin. méd. de prof. Pelnář.

Du laboratoire radiologique à Jáchymov.

(Avec 2 figures dans le texte.)

Présenté le 23 Octobre 1925.

L'application des injections intraveineuses de l'émanation de radium a montré que l'émanation de radium dosée de 6—10 millicuries est antagoniste à l'adrénaline à mesure que l'effet constrictoire de celle-ci n'ait pas lieu l'injection de l'émanation ayant précédé. Par contre en plus petites doses elle fait l'organisme sensible pour l'effet de l'adrénaline, c'est-à-dire que l'injection pareille ayant précédé il y a du tremblement et tous les effets de l'adrénaline sont augmentés même au moment de l'injection. Les injections hypodermiques des petites doses (½ millicurie) ont l'effet vasodilatatoire en améliorant les oscillations des vaisseaux et causent quelques fois même des perspirations fortes. (Observations de M. Tesař.) Elles possèdent donc l'effet de la pilocarpine en stimulant les terminations du vague.

Pour pouvoir décider la question quelle part les radiations α prennent — elles aux observations mentionnées, on a du étudier l'influence de α radiation isolée sur le système nerveux vegétatif.

Pour étudier l'effet des particules α on a employé des injections intraveineuses de la solution de ionium qui est porteur de la radiation seule et à cause de son long demi-temps très constant quant a l'effet. M. l'ingénieur Koblic de Jáchymov a réussi à obtenir le ionium en plus grandes quantités. C'est à lui que je suis reconnaissant d'avoir bien voulu m'en concéder et de m'avoir donné beacoup de conseils précieux pour mon travail.

Cependant nous avons étudié l'influence des particules α sur le sucre du sang. D'abord il fallait naturellement éliminer l'influence troublante du porteur et de la radiation des particules — c'est à dire éliminer le sustrait saline de la matière. On y arrive très facilement en comparant les effets de

ionium actif à l'effet de ionium privé des particules α — c'est à dire à l'isotope inactif de celui — là — au thorium.

Les expériences sont faites avec lapins.

Exemples.

1º Lapin 1, pèse de 1520 *gr*

Sucre du sang à jeun: 1·125 $^0/_{00}$.

Après l'injection de 10 *mg* de chlorure de thorium en 2 *cm* de solution physilogique

après	15	min.	1·125$^0/_{00}$
,,	60	,,	1·125$^0/_{00}$
,,	120	,,	1·125$^0/_{00}$

2º Lapin 2. Sucre à jeun = 1·00$^0/_{00}$.

Après l'injection intraveineuse de 4 *mg* de chlorure de thorium en 0·8 *ccm* de solution physiologique .

après	20	min.	0·88$^0/_{00}$
,,	50	,,	1·00$^0/_{00}$

3º Lapin 3. Sucre à jeun 1·115$^0/_{00}$.

Après l'injection intraveineuse de 4 *mg* de chlorure de thorium en 0·8 *cm* cubes de solution physiologique

après	30	min.	0·88$^0/_{00}$
,,	60	,,	1·115$^0/_{00}$

Il est évident qu'après l'injection du thorium la surface de sucre ne change pas ou il y a une petite baisse du sucre pendant les premiers 30 minutes. Après l'injection du ionium nous observons une croissance surprenante du sucre du sang et il ne faut attribuer cet effet qu'à l'action des particules α. La séparation chimique entre le ionium et son isotope le thorium n'est pas à exécuter. Dans la préparation offerte par M. l'ingénieur Koblic ces deux éléments se trouvent en rélation de 3 : 7. Les injections du ionium contenaient aussi du thorium, mais comme nous avons mentionné, sa coopération ne possède pas d'effet troublant.

L'action des particules α sur le sucre du sang:

1º Lapin 4, pèse de 1.280 *g*.

L'injection intraveineuse de 1·2 *mg* de ionium Cl + 2·8 *mg* de thorium Cl en 0·8 *cm* cubes de solution physiologique:

Sucre du sang à jeun				1·125$^0/_{00}$
30	min	après	l'injection	0·88$^0/_{00}$
60	,,	,,	,,	1·60$^0/_{00}$
120	,,	,,	,,	1·40$^0/_{00}$

2º Lapin 5 pèse de 1·820 *g*

Sucre du sang à jeun 0·95‰

30 min. après l'injection interaveineuse de

1·2 *mg* de ionium 1·00‰
après 60 min. 1·40‰
„ 120 „ 1·40‰

Les lapins tolèrent bien la dose de ionium appliquée, seulement le nombre des leucocytes dans le sang décroit à certaine mesure, comme a publié Dr. Pirchan dans son travail.

3. Lapin 6. Pèse de 1.370 *g*

Sucre du sang à jeun 1·00

Après l'injection intraveineuse de 3 *mg* de ionium Cl, 7 *mg* de thorium Cl en 2 *cm* cubes de solution physiologique

Sucre du sang après 15 min. 1·43‰
40 min. 1·72‰
60 min. 1·34‰

9 jours après l'injection le lapin périt avec symptômes d'anémie croissante à mesure que le jour de la mort il ne possédait qu'un million des globules rouges, 200 leucocytes et 14% d'hémoglobine. Nous nous sommes demandés si cette dose létale n'a pas paralysé les terminations fines du sympathique après la période d'action prolongée. Mais 48 heures après l'injection le sucre du sang était normal et l'action irritante de l'adrénaline sur le sympathique se manifestait en plein effet.

Sucre du sang a jeun: 1·00‰

Après l'injection hypodermique de 0,2 *ccm* de solution de l'adrénaline (1 : 1000).

Sucre du sang 30 min. après : 1·62‰
60 minutes après : 2·46.‰

Selon les expériences de Koblic le demi-temps de ionium est de 30.000 ans. Si 1 *mg* de radium, dont le demi-temps est de 1.580 ans, fait sortir 37,200.000 particules α dans une seconde, il est facile a compter que 1 milligramme de ionium fait sortir 1,900.000 de particules α dans une seconde.

Au lieu de déterminer la dose de ionium en *mg* nous préférons de comparer le nombre d'atômes explosants dans un *kg* du poids de l'animal.

La dose létale est donc circa 3,000.000 de particules explosantes dans un *kg* du poids de l'animal. Elle tue en 9 jours.

L'action des particules α dans une seconde dosées de 1,000.000—
—3,500.000 dans un *kg* du poids ressemble complètement à l'effet de

l'adrénaline. On a même vu que l'injection précédente de l'adrénaline sensibilise l'organisme à l'effet suivant des particules α à mesure que le sucre du sang manifeste l'augmentation plus forte.

Lapin 7. Pèse de 1.600 *g*.

Pendant deux jours suivants il a obtenu l'injection hypodermique de 0·2 *ccm* de l'adrénaline (1 : 1000), le troisième jour on lui a injecté le ionium.

Sucre du sang précédant à l'injection

(à jeun) : 1·00‰

Après l'injection intraveineuse de 3 *mg* de ionium Cl + 7 *mg* de thorium Cl en 2 *cm* cubes de solution physiologique

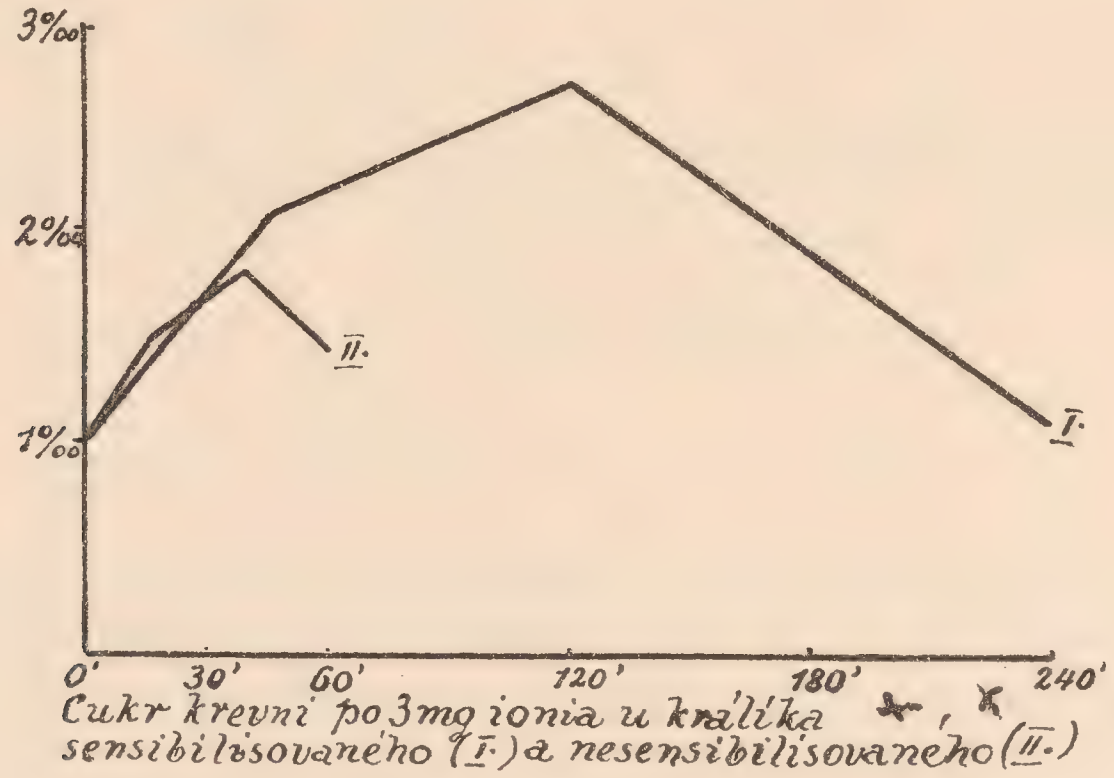


Fig. 1.

Sucre du sang 42 min. après 2·10‰
120 ,, ,, 2·70‰
240 ,, ,, 1·12‰

Le haussement du sucre du sang était très fort comparer lapin 1er (après l'injection de la même quantité de ionium) le lapin était après l'injection très inquiet — 25 min. après il y a eu un collapse, l'animal était froid, il n'y avait pas de sang, roulant des veines élargies, dans la 40^{ième} minute après l'injection le lapin se mit à se rétablir, cependant il a péri dans 8 jours de l'anémie grave.

Autre exemple de la sensibilisation après l'adrénaline.

Dans l'expérience mentionnée lapin 5 a obtenu le jour avant l'injection de ionium l'injection hypodermique de l'adrénaline. Il pèse de $^1/_3$ de plus que le lapin 4. La dose de ionium étant la même, deux heures après l'injection l'hyperglycémie est la même dans les deux cas.

Le lapin sans l'adrénaline il a obtenu 1,480.000 particules α sur 1 *kg* de poids.

Le coefficient glycémique après deux heures $\frac{1{\cdot}40}{1{\cdot}125} = 1{\cdot}25$.

Le lapin sensibilisé par l'adrénaline il n' a obtenu que 1,040.000 particules α sur 1 *kg*, mais le quotient glycémique après deux heures il est $\frac{1{\cdot}40}{0{\cdot}95} = 1{\cdot}57$.

L'analogie de l'effet des particules α avec l'action de l'adrénaline est encore plus profonde, parce qu'il y a l'antagonisme entre l'insuline et les particules α, comme nous connaissons l'antagonisme entre l'insuline et l'adrénaline sur le sucre du sang.

On dit que l'insuline possède l'effet vagotrope la radiation α devrait avoir l'effet sympathicotrope analogue à l'adrénaline.

Exemple: Lapin 8. Pèse de 1.600. gr.

Sucre du sang à jeun $1{\cdot}00^0/_{00}$. Après l' injection hypodermique d'une unité de l'insuline.

90 min. après $0{\cdot}375^0/_{00}$
130 ,, ,, $0{\cdot}350^0/_{00}$

Interruption de l'expérience — nourriture donnée à l'animal

Le lendemain:

Sucre à jeun : $0{\cdot}9^0/_{00}$

Injection d'une unité de l'insuline

Fig. 2.

Sucre 60 min. après $0{\cdot}53^0/_{00}$

Injection de 1·2 *mg* de ionium Cl

60 min. après + 25 min. $0{\cdot}375^0/_{00}$
60 ,, ,, + 35 ,, $0{\cdot}49^0/_{00}$
60 ,, ,, + 110 ,, $0{\cdot}375^0/_{00}$

1,200.000 particules α baissent l'effet de l'insuline de sorte qu'elles ramènent l'élévation du sucre du sang de $0{\cdot}1^0/_{00}$ au moment de l'hypoglycémie maximale.

Autre exemple: Lapin No 9 pèse de 1550 *g*.

Sucre du sang à jeun : $1^0/_{00}$

L'injection hypodermique d'une unité de l'insuline.

Sucre 30 min. après . . . . . $1^0/_{00}$

45 min. après, l'injection intraveineuse de 1·2 *mg* de ionium Cl.

45 min. après + 15 min. le sucre du sang $0{\cdot}45^0/_{00}$
45 „ „ + 60 „ „ du „ $0{\cdot}55^0/_{00}$
45 „ „ + 95 „ „ du „ $0{\cdot}45^0/_{00}$

L'effet des particules α était dans ces deux cas tout à fait ressemblant.

L'influence sympathicotrope de la radiation α est selon ce que nous avons dit très vrai semblable: Les particules α en dose appliquée causent l'élévation du sucre du sang égale à l'élévation après l'adrénaline et diminuent l'éffet de l'insuline comme l'adrénaline.

Construction de la quadrique **P** donnée par la section non-diamétrale K, le cône tangent **L** et le point a.

(Résumé de l'article tchèque.)

Par

B. PROCHÁZKA.

Présenté le 30 Septembre 1925.

Désignons

par π le plan de la section K,

par v le pôle du plan π par rapport à **P**,

par L_1 la courbe d'intersection du plan π et du cône **L**.

Pour résoudre le problème posé, nous trouvons

1. le pôle v, ensuite 2. le centre Ω de **P**.

1.

Les courbes K et L_1 sont bitangentes aux points x, y. Les plans tangents τ_x, τ_y du cône **L** aux points x, y sont en même temps les plans tangents de **P** à x, y. Ils se rencontrent dans la polaire V, conjuguée à $W \equiv \overline{x\,y}$ par rapport a **P**. Or, le point cherché v se trouve sur V. C'est le sommet du cône **K**, tangent à **P** suivant la conique K. Il s'ensuit que le plan tangent τ à **P** au point arbitraire r de K rencontre V dans v. Mais on n'a pas besoin de τ au cours de la construction suivante. On trouve la conique d'intersection R de **P** et du plan $\varphi \equiv (V\,a)$ (R est déterminée moyennant deux points, d'intersection $(K\,\varphi)$, désignés par b, d, deux tangentes $(\mathbf{L}\,\varphi)$ et le point a.) La tangente T_{b_R} de R à b est en même temps la droite d'intersection des plans φ et τ. Elle rencontre V au point $v \equiv (V\,T_{b_R})$.

2.

Désignons par O le centre de K. Parce que v est le pôle de π par rapport à **P**, la droite $D \equiv v\,o$ est le diamètre de **P**. Or, chaque plan ϑ pas sant par D rencontre **P** dans une conique de centre Ω. Cette conique est a'ailleurs plus que suffisamment déterminée par deux points $(\vartheta\,R)$ et deux points $(\vartheta\,K)$, dont nous connaissons aussi les tangentes $(\vartheta\,\mathbf{K})$.

Remarque. Il se peut que l'une ou toutes les deux figures **K** et **L** soient imaginaires. Dans ce cas deux ou quatre éléments de R sont imaginaires. Nous avons résolu le problème pour deux éléments imaginaires conjugués. Si l'on a affaire aux quatre éléments imaginaires (deux points conjugués et deux droites conjuguées) on opère d'après la methode des MM. Procházka-Mikan, publiée dans le journal „Časopis pro pěstování math. a fys.“ T. LIV., p. 226. On pourrait aussi suivre la marche recommandée par la méthode ingénieuse de M. prof. Dr. Sobotka, publiée dans le même journal T. LIV. p. 331.

Послѣтретичная Тирренская террасса въ области Чернаго моря.

Н. И. Андрусовъ.

Présenté le 22 mai 1925.

Рукопись „Послѣтретичная Тирренская террасса въ обласи Чернаго моря“ была написана Н. И. въ Прагѣ въ 1923 году и является извлеченіемъ изъ ряда рукописей о послѣтретичныхъ отложеніяхъ южной Россіи, написанныхъ въ разное время, отчасти еще въ Россіи отчасти заграницей. Изъ всѣхъ многочисленныхъ рукописей, оставленныхъ Н. И., предлагаемая работа была наиболѣе подготовлена къ печати, т. ч. могла быть напечатана въ томъ видѣ, въ какомъ была написана, съ внесеніемъ незначительныхъ редакціонныхъ поправокъ.

Появленію этой работы въ свѣтъ въ значительной мѣрѣ содѣйствовали профессоръ В. Ласкаревъ въ Бѣлградѣ, который прочиталъ рукопись и внесъ въ нее рядъ редакціонныхъ поправокъ и профессоръ Р. Кеттнеръ въ Прагѣ, любезно согласившійся сдѣлать переводъ на Чешскій языкъ и содѣйствовавшій ея напечатанію. Считаю своимъ долгомъ, принести здѣсь названнымъ лицамъ, свою глубокую благодарность.

Д. Андрусовъ.

* * *

Во многихъ пунктахъ побережья Чернаго и Азовскаго морей, на болѣе или менѣе значительной высотѣ надъ уровнемъ моря, расположены клочки послѣтретичныхъ *морскихъ* отложеній.

Изъ своихъ собственныхъ изслѣдованій я убѣдился, что всѣ *морскія* террассы, которыя тянутся отъ окрестностей Судака по южному берегу Керченскаго полуострова[1]) и по западному берегу Керченскаго пролива до Чокракскаго озера — всѣ одновременны.

---

[1]) Н. Андрусовъ: О возрастѣ морскихъ послѣтретичныхъ террассъ Керченскаго полуострова. Ежегодникъ по Геологіи и Минералогіи Россіи, издаваемый подъ редакціей Н. Криштафовича. Т. VII, вып. 6. Стр. 1—29, 1905.

Н. Андрусовъ: Террассы окрестностей Судака. Зап. Кіев. общ. Ест. Т. XXII, 1912.

Н. Андрусовъ: Послѣтретичныя отложенія у Синопа. Изв. Акад. Наукъ. 1917.

Менѣе извѣстны морскія послѣтретичныя отложенія Таманскаго полуострова и еще менѣе и неполно изучены террассы Кавказскаго и Малоазіатскаго побережій и южной половины западнаго берега Чернаго моря.

По всѣмъ видимостямъ, всѣ послѣтретичныя *морскія* отложенія Чернаго моря принадлежатъ одной террассѣ. Послѣднія изслѣдованія, несомнѣнно, подтверждаютъ причисленіе Черноморскихъ террассъ къ одной зонѣ, а именно къ зонѣ съ *Strombus Bubonius* Lmk. Средиземноморской области. Проф. Деперэ раздѣляетъ эту зону на двѣ: нижнюю и верхнюю. По нѣкоторымъ соображеніямъ наши черноморскія террассы относятся къ нижней или Тирренской террассѣ.

Разсмотримъ ближе фауну террассъ Керченскаго полуострова и черноморскаго побережья между Судакомъ и Феодосіей.

Въ общемъ фауна этихъ террассъ напоминаетъ современную, черноморскую. Однако уже и въ прежнія времена (когда черноморская фауна не была еще въ достаточной мѣрѣ изучена), все-же можно было установить нѣкоторыя различія.

Въ настоящее время, по работамъ Милашевича можно дать слѣдующій списокъ черноморской фауны:

Patella pontica Mil., *Fissurella* graeca L., *Gibbula* aloida Gm., euxinica Andrus., divaricata L., *Phasianella* pontica Mil., *Scalaria* communis Lam., tenuicostata Michaud., *Natica* fusca Blainv., *Calyptraea* chinensis L., *Homologyra* atomus Phil., *Littorina* neritoides L., *Truncatella* subcylindrica L. var. laevigata Risso, *Rissoia* splendida Eichw., venusta Phil., euxinica Mil., vicina Mil., dolium Nyst., lactea Michaud., *Setia* valvatoides Mil., *Hydrobia* ventrosa Montagu, maritima Mil., *Adeorbis* subcarinatus Montagu, *Cerithium* ponticum Mil. (vulgatum Brug. in Kryn.), *Cerithiolum* reticulatum Da Costa, *Cerithidium* submamillatum Rayn. et Ponzi (pusillum Jeffr.), *Cerithidiopsis* minima Brus., euxinica Mil., *Biforina* perversa L., var. obesula Mont., var. perva Mil., *Caecum* trachea Mont. (elegans Perjaslavzeva), genua Mil., *Eulima* incurva Ren., *Odostomia* novegradensis Brus., rissoiformis Mil., acuta Jeffr., plicata Mont., *Eulimella* turris Forb., acicula Phil., Pinteli de Folin, *Turbonilla* pupaeformis Mil. (elegantissima Ostr.), delicatula Mont. (gracilis Phil. non Brocchi), *Parthenina* costulata Mil., tenuistriata Mil., (terebellum non Phil.), emaciata Brus. (gracilis Phil., non Brocchi), incerta Mil. (turbonilloides B. D. D. non Brus.), fenestrata Forbes, indistincta Mont., *Trophon* breviatus Jeffr., *Nassa* reticulata L., var. modesta Mil., var. pontica Monter., *Cyclonassa* neritea L., var. minor Mil., var. mamillata Mil., kamyschensis Chenu., Brusinai Andrus., *Raphitoma* fuscatum Desh.. *Mangelia* pontica Mil. (taeniata Desh. in Ostr.), *Retusa* truncatula Brug., *Cylichnina* variabilis Mil. (umbilicata Mtg. in Ostr.) ovoides Mil., *Haminea* navicula Da Costa., *Alexia* myosotis Drap.,

Chiton marginatus Penn., *Anisochiton* fascicularis L., *Arca* lactea L., *Mytilus* galloprovinciolis Lam., *Mytilaster* lineatus Gm. (scaber Kryn., minimus Poli), monterosatoi Dautz (Marioni Loc.), *Modiola* adriatica Lam., phaseolina Phil., *Ostrea* taurica Kryn. (edulis in Gregori etc., adriatica Lam., lamellosa in Ostr.), sublamellosa Mil., *Pecten* ponticus B. D. et D. (sulcatus Lam., incolor Sow., glaber L. var. pontica), *Divaricella* divaricata L. (commutata Phil., trifaria Kryn.), *Loripes* lacteus L. (leucoma Turt.), *Montagua* bidentata Mont. (Arcinella laevis Phil.), *Kellya* compressa Mil., *Tellina* donacina L., exigua Poli., fabula Goronovius, *Gastrana* fragilis L., *Syndesmya* alba Wood., fragilis Risso, ovata Phil. (Amphidesma lactea Kryn., Erycina ovata in Midden.), *Donax* Julianae Andrus. (anatinum Lam., trunculus L.), venustus Poli., *Donacilla* cornea Poli (Donax elliptica Kryn., Mesodesma donacilla Desh.), *Mactra* corallina L. (stultorum L.), subtruncata Da Costa (var. triangula Renier), *Meretrix* rudis Poli, *Gouldia* minima Montagu., *Venus* gallina var. corrugatula Kryn., var. minor B. D. D., var. exarata Mil., var. alba B. D. D., *Tapes* rugatus B. D. D., lineatus Mil., discrepans Mil., proclivis Mil., *Venerupis* irus L. (decussata in Ostr.), *Petricola* lithophaga Retzius, *Cardium* edule L., simile Mil. (scabrum Phil. in Ulj., fasciatum Mtg. in Jeffr. et Weink), exiguum Gm., paucicostatum Sow., *Corbulomya* maeotica Mil. (Swainsoni Midd., mediterranea Da Costa in Ostr.), *Solen* marginatus Penn., *Barnea* candida L., *Teredo* navalis L., *Gastrochaena* dubia Penn., *Pholas* dactilus L., *Thracia* papyracea Poli.[2])

Фауна послѣтретичныхъ террассъ Керченскаго полуострова[3]) и берега между Феодосіей и Судакомъ[4]) извѣстна, конечно, меньше и не была столь подробно изучена, какъ современная фауна Чернаго моря.

Милашевичъ выдѣлилъ путемъ точнаго изученія современнаго состава черноморской фауны рядъ новыхъ видовъ и разновидностей, свойственныхъ Черному морю.

Нѣкоторые изъ нихъ существуютъ и въ Средиземьи, какъ напр. *Pecten ponticus* B. D. D. (*glaber* L. var. *pontica* B. D. D.), тогда какъ такіе виды, какъ *Mangelia pontica* Mil. (*taeniata* Desh. in Ostr.), *Ostrea taurica* Kryn. (*adriatica* Lam., *lamellosa* in Ostr.), *Corbulomya maeotica* Mil. (*Swainsoni* Midd., *mediterranea* Costa in Ostr.), *Cerithium*

---

[2]) К. С. Милашевичъ: Фауна Россіи и сопредѣльныхъ странъ по коллекціямъ Зоолог. Муз. Академіи Наукъ. Томъ 1, Моллюски Чернаго и Азовскаго морей. Петрогр. 1916.

[3]) На Керченскомъ полуостровѣ: берегъ между озеромъ Качикскимъ и Узунларскимъ, у маленькаго озера близъ бывшаго Таклинскаго маяка, у озера Тобечикскаго, у озера Чокракскаго.

[4]) У Новаго Свѣта, къ Зап. отъ Судака два обнаженія между Алчакъ-Каею и Меганомомъ, къ В. отъ Феодосіи.

ponticum Mil. (*vulgatum* Brug. in Kryn)., *Cardium simile* Mil. (*fasciatum* Mtg. in Jeffr.), хотя и возведены въ новые виды, тѣмъ не менѣе они могутъ считаться за далеко ушедшія разновидности формъ, образовавшихся изъ средиземноморскихъ.

Donax Julianae Andrus., найденный мною также и въ послѣтретичныхъ террассахъ, конечно, происходитъ изъ Средиземья, но существуетъ-ли въ немъ и въ настоящее время, не извѣстно.

Среди видовъ, которые тождественны или почти тождественны съ черноморскими, въ террассахъ между Судакомъ и Чокракомъ попадаются виды, которые въ настоящее время уже не встрѣчаются на днѣ Чернаго моря, — а именно *Pecten varius* L., *Arca barbata* L., *Noae* L., *Venus verrucosa* L., *Solen ensis* L., *Tellina incarnata* L., *nitida* Poli., *Cardium tuberculatum* L., *Tapes Calverti* Newt.[5]), *Psammobia depressa* Pen., *Nucula nucleus* L., *Dosinia exoleta* L., *Chenopus* sp.

Изъ этихъ видовъ черноморской береговой террассы, только *Tapes Calverti* является формою вымершею. Къ сожалѣнію этотъ видъ въ средиземноморскихъ ископаемыхъ фаунахъ имѣетъ значительное вертикальное распространеніе (Casa Campanaro y Cotrone — Quaternaire antesicilien Gignoux — до самой верхней четвертичной террассы — Monastirien Depéret.[6]) Такимъ образомъ, на основаніи присутствія этаго вида, мы не можемъ дать опредѣленнаго заключенія о возрастѣ черноморскихъ террассъ.

Гораздо больше данныхъ даютъ намъ 13 видовъ, перечисленныхъ въ вышеприведенномъ спискѣ. Присутствіе этихъ видовъ указываетъ на болѣе высокую температуру воды и на болѣе высокую ея соленость въ сравненіи съ современнымъ Чернымъ моремъ. По всей вѣроятности эта соленость превосходила $2^0/_0$; въ этомъ случаѣ условія существованія нашей фауны были-бы сходны съ условіями существованія современной береговой фауны Мраморнаго моря, которая выдерживаетъ до $2{\cdot}2^0/_0$ опрѣснѣнія.

Такимъ образомъ, четвертичная фауна черноморской террассы съ *Tapes Calverti* и *Cardium tuberculatum* представляетъ фауну по сравненію съ современной черноморской обогащенную нѣсколькими средиземноморскими элементами, привыкшими къ болѣе теплой и болѣе соленой водѣ.

Бросимъ теперь взглядъ на плейстоценовыя отложенія западнаго Средиземья. Вопросъ о томъ, представляетъ-ли Калабрійскій ярусъ — нижній плейстоценъ или верхній пліоценъ, мы пока оставимъ безъ разсмотрѣнія.

---

[5]) B. Newton: Q. J. of Geol. Soc. 1904. (Прежде описывалась подъ именемъ Tapes Dianae Req.)

[6]) Ch. Depéret: C. R. de l'Acad. d. Sc., vol. 156 (1913), N 9, N 14; vol. 157 (1913), N 14, N 15; vol. 166 (1918), N 12, N 22; vol. 167 (1918), p. 418—422 et p. 979—984; vol. 168 (1919), p. 868—873; vol. 170 (1920), p. 159—163; vol. 171 (1920), p. 212—218.

Четвертичныя отложенія зап. Средиземья по Жинью[7]) распадаются на 2 большія террассы; Деперэ дѣлитъ каждую изъ нихъ еще на 2; такимъ образомъ всего мы имѣемъ 4 террассы залегающія на разничной высотѣ и отличающіяся одна отъ другой фауною.

Самая старая изъ нихъ (по высотѣ залеганія самая высокая — отъ 100 до 90 метровъ надъ у. м.) сохраняетъ прежнее названіе Сицилійской. Сицилійскія отложенія (типичное развитіе на сѣверномъ берегу Сициліи) характеризуются обильной примѣсью сѣверныхъ элементовъ *Cyprina islandica* L., *Mya truncata* L., *Buccinum undatum* L., *Trichotropis borealis* Brod. et Sow. etc.).

Слѣдующая террасса по возрасту болѣе новая, но лежащая метровъ на 40—35 ниже предыдущей, получила названіе Милацкой террассы.

Она отличается полнымъ отсутствіемъ сѣверныхъ элементовъ и великорослостью средиземноморскихъ формъ (*Chama placentina, Mytilus galloprovincialis* Lam. var. *herculea* etc.), что указываетъ на болѣе теплый климатъ. Климатъ въ Милацкую эпоху не былъ, однако, такимъ теплымъ какъ въ слѣдовавшую за ней Тирренскую эпоху.

Тирренской террассой Деперэ называетъ террассу, лежащую на высотахъ отъ 28 до 32 метровъ над у. м. въ Зап. Средиземьи. Она соотвѣтствуетъ старшему отдѣленію прежней эпохи пластовъ съ *Strombus bubonius* и характеризуется большимъ притокомъ пришельцевъ съ Сенегальскаго участка Атлантическаго океана (*Strombus Bubonius, Tritonidea viverrata* etc.) достигающими окрестностей Марселя.

Болѣе новая террасса, лежащая метровъ 18—20 надъ у. м., получила отъ Деперэ названіе Монастырской. Въ ней атлантическіе элементы сохраняются только на Алжырскомъ берегу Средиземнаго моря, а на сѣверномъ берегу Средиземья — исчезаютъ.

Кромѣ описанныхъ 4-хъ террассъ на берегахъ Средиземнаго моря различаютъ еще болѣе низкія террассы, м. п. одну на высотѣ 6-ти метровъ. Палеонтологической характеристики этой террассы не приводится.

Такимъ образомъ, мы видимъ, что Тирренская террасса соотвѣтствуетъ эпохѣ, когда температура въ зап. Средиземьѣ достигла максимума, что дало возможность сенегальской фаунѣ проникнуть въ Средиземное море.

Сравнивая террассы Крымскаго побережья съ террассами Средиземнаго моря, мы приходимъ къ заключанію, что аналогичное повышеніе температуры въ области Чернаго моря, дало возможность теплой средиземноморской фаунѣ съ *Cardium tuberculatum* и *Tapes Calverti* проникнуть въ Черноморскій бассейнъ и, что т. о. морская черноморская террасса съ *Tapes Calverti* etc. можетъ быть приравнена Тирренской террассѣ западнаго Средиземья.

---

[7]) M. Gignoux: Formations marines pliocènes et quaternaires de l'Italie du sud et de la Sicilie. Thèse fac. sc. Lyon N 53, 1913.

Обратимся теперь къ послѣтретичнымъ террассамъ остальныхъ береговъ Чернаго моря. Недостатокъ данныхъ не позволяетъ описать ихъ съ такою-же точностью.

Прежде всего мы находимъ ихъ на Таманскомъ полуостровѣ на восточномъ берегу Керченскаго пролива. Здѣсь мы ихъ находимъ въ 2-хъ—3-хъ верстахъ отъ мыса Каменнаго,[8]) гдѣ несогласно на нижнесарматскихъ сланцевыхъ глинахъ (50⁰ на ССВ) лежатъ сѣрые кварцевые пески съ маленькими галечками, а среди нихъ слой морского ракушника, исключительно съ современными черноморскими раковинами (*Mytilus galloprovincialis* etc.), къ которымъ примѣшаны въ маломъ количествѣ каспійскія раковины, какъ то: *Didacna crassa* Eichw., *Monodacna pontica* Eichw., *Dreissensia polymorpha* Pall., *Nerithina lithurata* Eichw.

Это обнаженіе было осмотрѣно мною. Другое было описано Лепплэ[9]) у основанія косы Тузла. Тутъ послѣтретичные морскіе ракушники лежатъ посреди нѣ песковъ безъ окаменѣлостей на высотѣ около 9 метровъ.

На Кавказскомъ побережьи морскіе послѣтретичные ракушники извѣстны въ 6-ти верстахъ отъ Сочи (Дагомыса), около Туапсе и въ 5-ти верстахъ отъ Адлера, гдѣ они были описаны Григоровичемъ-Березовскимъ.[10]) Первыя указанія на нихъ даны были Красновымъ.

На Малоазіатскомъ берегу описаны различныя террассы, числомъ до 3-хъ; лишь въ немногихъ случаяхъ въ нихъ указываются морскія раковины и, весьма вѣроятно, значительная часть ихъ (мнѣніе Коссмата[11]) континентальнаго происхожденія, на подобіе трехъ террассъ описанныхъ мною въ окрестностяхъ Судака въ Крыму.[12])

Чихачевъ[13]) упоминаетъ, что у деревни Кадикей близъ Самсуна въ разстояніи ½ версты отъ берега на долеритовомъ основаніи, одѣтомъ тонкою корою нуммулитового известняка разбросано много

---

[8]) Abich: Einleitende Grundzüge d. Geologie d. Halbinseln Kertsch und Taman. (Mémoires de l'Académie Imperiale d. Sciences de St. Petersbourg. T. IX. N 4.)

Н. Андрусовъ: Геологическія изслѣд. на Таманскомъ полуостровѣ. Мат. для геологіи Россіи, томъ XXI, 1903. Стр. 322.

[9]) Le Play in Demidoff: „Voyage autour de la Russie méridionale etc. Vol. IV, p. 182.

[10]) Постпліоценовыя морскія отложенія Черноморскаго побережья. Зап. Новорасс. Общ. Ест. Т. XXIV., вып. 2. 1902.

[11]) K. Kossmat: Geologische Untersuchungen in d. Erzdistricten d. Vilaets Trapesunt. Mitteilungen d. Geologischen Ges. 111. 1910. 1—2 Heft.

[12]) Н. Андрусовъ. Террассы Судака. Зап. Кіев. общ. Ест. Т. XXII. 1912.

[13]) Авторъ считаетъ, что три раковины отсюда принадлежатъ къ верхнетретичнымъ, а именно Cardium edule, Buccinum neriteum и Ostrea uncinata, но, изъ нихъ первыя двѣ формы принадлежатъ къ современнымъ Черноморскимъ видамъ, а устрица тоже должно быть, таже, что встрѣчается въ послѣтретичныхъ пластахъ.

Tchichatchef: Asie Mineure. IV. Géologie, p. 218.

Tchichatchef: Mém. s. l. dèpôts tert. d. l. Sicilie. Bull. d. l. Soc. géol. d. France. (2.) XX, p. 266.

раковинъ; почти всѣ онѣ принадлежатъ къ современнымъ черноморскимъ формамъ.

Перешеекъ, которымъ полуостровъ Синопъ соединяется съ континентомъ, сложенъ гл. обр. изверженными породами. Во многихъ мѣстахъ начиная отъ уровня моря они прикрыты горизонтально залегающими известковистыми песками, переслаивающимися съ раковинными известняками.

Гамильтонъ, Мурчисонъ и Форбсъ считали эти отложенія аралокаспійскими, Д. Браунсъ относилъ ихъ къ неогену, однако я[14]) на основаніи коллекціи собранной у Синопа моимъ старшимъ сыномъ Леонидомъ Андрусовымъ, могу утверждать, что пласты эти одинаковаго возраста съ Судакскими и Керченскими морскими террассами: — имъ добыты въ этихъ пластахъ — *Cardium tuberculatum* L., *Donax, Mactra subtruncata* Da Costa, *Venus gallina* L. Присутствіе *Cardium tuberculatum* имѣетъ рѣшающее значеніе при опредѣленіи возраста этихъ отложеній.

По всей вѣроятности въ будущемъ на малоазіатскомъ побережьи еще будутъ найдены пункты съ морскими послѣтретичными моллюсками.

На западномъ побережьи Чернаго моря *морскія* террасы исвѣстны къ югу отъ Варны. Вообще-же на этомъ побережьи они очень мало изучены.

* * *

Перейдемъ теперь къ вопросу о томъ на какой высотѣ залегаютъ описанныя нами морскія террассы Чернаго моря.

Начнемъ съ Крыма, гдѣ этотъ вопросъ разрѣшается проще.

Здѣсь террасса съ *Cardium tuberculatum* выступаетъ на побережьи только на востокъ отъ линіи Новый Свѣтъ — Чокракъ. Встрѣчается она только отдѣльными клочками, а въ промежуткахъ, по крайней мѣрѣ на сушѣ, — отсутствуетъ.

Это отсутствіе отчасти объясняется явленіями размыва, благодаря которымъ, въ промежуткахъ между обнаженіями террассъ, выступаютъ болѣе древнія породы.

Однако *морская* террасса отсутствуетъ иногда также въ такихъ мѣстахъ, гдѣ по условіямъ залеганія мы бы должны были ее встрѣтить и гдѣ она не могла быть смыта, — фактъ, который указываетъ на явленія опусканія земной коры въ этихъ мѣстахъ со времени отложенія террассы съ *Cardium tuberculatum*.

Разсмотримъ для примѣра западный берегъ Керченскаго пролива. Отъ мыса Такильбурунъ къ сѣверу морской берегъ подымается до высоты 40 саж. (85·3 метр.) и состоитъ изъ сармата падающаго на ЮВ. Къ сѣверу онъ ограничивается почти вертикальнымъ сдвигомъ отъ спаніодонтовыхъ

---

[14]) Н. Андрусовъ: Послѣтретичныя морскія отложанія у Синопа. Изв. Акад. Наук., 1917.

и чокракскихъ пластовъ; далѣе къ сѣверу расположено (между нимъ и обрывомъ сармата съ паденіемъ на СЗ) почти высохшее соленое озерко. Другое озерко, такое-же маленькое, но болѣе сохранившееся, расположено къ сѣверу отъ сарматскаго обрыва, между нимъ и обрывомъ изъ мэотическихъ, понтическихъ и киммерійскихъ пластовъ, изогнутыхъ синклинально. У южнаго края синклинали лежитъ слой лёсса, у подножья котораго (до 5-ти футовъ надъ уровнемъ моря) обнажается небольшая толща морского послѣтретичнаго ракушника. Въ остальныхъ пунктахъ береговъ обоихъ озеръ морскіе ракушники нигдѣ не выступаютъ.

Къ сѣверу отъ этой синклинали (Янышгакылской) лежитъ большое Тобечикское соленое озеро. На берегу Керченскаго пролива въ сѣверо-восточномъ концѣ этого озера начинается длинная Тобечикская, послѣ-третичная террасса, пласты которой, залегающіе видимо горизонтально, образуютъ весь обрывъ отъ уровня моря до высоты 2—3 саж. н. у. м. (4, 2—6, 4 м.).

Если бы морскія послѣтретичныя террассы образовались путемъ равномѣрнаго опусканія уровня моря, они должны были бы появиться и на берегахъ Тобечикскаго соленаго озера; между тѣмъ морскія террассы на берегахъ озера несмотря на благопріятный реліефъ нигдѣ не выступаютъ.

Тобечикская морская терраса тянется по бергу моря отъ сѣвернаго конца озера на трехъ верстномъ протяженіи къ дервнѣ Эльтыгень, причемъ она поднимается до высоты 8—9 саж. (17—19 метр.) и прикрыта лёссовидной глиной. Террасса залегаетъ несогласно на крутопадающихъ нижнесарматскихъ глинахъ, которыя мѣстами обнажены. Съ приближеніемъ къ деревнѣ Эльтыгень высота террассы постепенно понижается достигаетъ уровня моря и, наконецъ, она, вмѣстѣ съ перекрывающей ее лёссовидной глиной, скрывается подъ уровнемъ моря.

Этимъ объясняются всѣ факты залеганія послѣтретичныхъ пластовъ на Керченскомъ полуостровѣ: отъ дер. Эльтигень на сѣверъ на берегахъ Керченскаго пролива, слои съ *Cardium tuberculatum* нигдѣ не выступаютъ —ни на берегахъ Чурубашскаго соленаго озера, ни у Керченской бухты. Во всей этой мѣстности мы констатируемъ, что подъ уровень моря уходитъ не только послѣтретичная морская террасса, но и перекрывающая ее субаэральная глина. Почти въ предѣлахъ г. Керчи эти глины выступаютъ у самаго уровня моря и уходятъ подъ уровень моря. Яснымъ подтвержденіемъ изложенныхъ нами фактовъ являются данныя многочисленныхъ буровыхъ скважинъ на артезіанскую воду проведенныхъ въ синклинали Еникале — Керчъ, сложенной изъ Мэотическихъ, Понтическихъ, Киммерійскихъ и Надрудныхъ пластовъ. Уровень мѣстности, гдѣ расположены скважины, лежитъ ниже десяти сажень н. у. м. Между тѣмъ здѣсь буровыя скважины обнаружили лёссъ до 6—7 саж. мощности, налегающій на комплексъ глинъ и песковъ (надрудныя глины), покрывающихъ въ свою очередь киммерійскіе рудные пласты.

Даже предположивши высоту устья скважины въ 10 саж., мы получили бы для нижней границы лёсса высоту въ 2—3 саж.

На этой высотѣ мы могли бы ожидать встрѣтить морскую террасу, въ дѣйствительности этого нѣтъ — лёссъ лежитъ непосредственно на надрудныхъ пластахъ и т. о. берегъ послѣтретичнаго моря лежалъ нѣсколько отступя отъ современнаго берега. Залеганіе лёссовидной глины на уровнѣ и подъ уровнемъ моря указываетъ на явленія опусканія нѣкоторыхъ участковъ земной коры со времени ея отложенія.

Но еще убѣдительнѣе говорятъ данныя буренія въ самомъ Керченскомъ проливѣ. Результаты этихъ буровыхъ работъ, которые производились для выясненія возможности проведенія желѣзнодорожнаго моста черезъ одно изъ наиболѣе узкихъ мѣстъ Керченскаго пролива (у Еникале или у Керченской крѣпости), были изложены мною въ Извѣстіяхъ Академіи Наукъ за 1918 г.; здѣсь я изложу только общіе результаты.

Близъ западнаго берега пролива (Еникальскаго) подъ тонкимъ слоемъ воды (около 20 футовъ) толща современныхъ морскихъ осадковъ (отъ 29 до 45 футъ мощностью) залегаетъ непосредственно на дислоцированныхъ слояхъ верхняго Сармата.

Скважины пробитыя къ западу отъ 18-ти футовой банки мембранипороваго известняка (M 3д) до глубины 22-хъ сажень, прошли только послѣтретичныя отложенія троякаго состава:

3. Разнообразныя морскія осадки простирающіеся отъ дна моря до глубины 4-хъ сажень, содержащіе фауну тождественную съ современной фауной сѣверной части Керченскаго пролива (*Ostrea, Mytilus galloprovincialis* Lam., *Cardium edule* L., *Venus gallina* Lam., *Nassa reticulata* L., *Cerithiolum reticulatum* Da Costa.

2. Подъ этими пластами лежатъ обычно черные пески и илы съ фауной состоящей изъ дрейссенсій (*Dreissensia polymorpha* Pall.), кардидъ (*Monodacna pontica* Eichw., *Monodacna colorata* Eichw. var. и гастероподъ (*Clessinia variabilis* Eichw., *Micromelania* cf. *caspia* Eichw., *Lithoglyphus, Vivipara* sp. etc.).

1. Подъ этими пластами лежатъ грубые детритусовые раковинные пески, переслаивающіеся съ кварцевыми песками, которые снова содержатъ остатки морской фауны. Эта фауна вполнѣ аналогична фаунѣ морской послѣтретичной террасы съ *Cardium tuberculatum* L. и *Tapes Calverti* Newt., къ остаткамъ которыхъ присоединяются *Ostea* sp., *Pecten glaber* L., *Corbula* sp. Изъ этого можно вывести, что слои съ *Cardium tuberculatum,* на днѣ Керченскаго пролива залегаютъ на 22 сажени ниже уровня террассъ, которыя они же образуютъ на берегахъ Керченскаго пролива и въ окрестностяхъ Судака, причемъ совершенно не измѣняютъ своей фаціи; между тѣмъ такая разница въ глубинахъ для Чернаго моря достаточна для перемѣны харакера осадковъ (по глубинѣ).

Такимъ образомъ на Керченскомъ полуостровѣ положеніе Тирренской террассы въ достаточной степени доказываетъ ея перемѣщеніе, хотя

и незначительное по вертикали, подъ вліяніемъ скромныхъ замирающихъ дизлокацій, начавщихся въ Мэотическую эпоху и постепенно закончившихся въ серединѣ послѣтретичнаго времени.

Цѣлый рядъ фактовъ въ другихъ областяхъ Чернаго моря подтверждаютъ это.

Присутствіе морскихъ террассъ съ Cardium tuberculatum ограничивается линіей, идущей отъ Варны къ Чокракскому соленому озеру. На югъ отъ этой линіи, по берегамъ Чернаго моря отъ Новаго Свѣта до Керченскаго пролива, по берегамъ Керченскаго пролива, у Азовскаго моря на Чокракскомъ соленомъ озерѣ и на Таманскомъ полуостровѣ, во многихъ мѣстахъ констатирована послѣтретичная террасса, причемъ ея расположеніе обязано малымъ дислокаціямъ; въ подобныхъ условіяхъ выступаютъ по всей вѣроятности террассы Кавказскаго и Малоазійскаго побережій. Наоборотъ къ сѣверу отъ упомянутой линіи нигдѣ морская террасса не выступаетъ.

Въ южной части Крыма Севастопольская фіордоподобная бухта и Балаклавскій ковшеобразный заливъ несутъ на себѣ всѣ признаки погруженія уровеня моря, болѣе поздняго, чѣмъ террасса съ *Cardium tuberculatum*.

Севастопольская бухта представляетъ полный аналогъ южнорусскихъ лимановъ, происхожденіе которыхъ блестяще было объяснено Н. Соколовымъ затопленьемъ низовъ рѣчныхъ долинъ моремъ. И здѣсь мы видимъ главную бухту и рядъ меньщихъ второстепенныхъ бухтъ съ отвѣсно спускающимися подъ воду крутыми берегами.

Западный конецъ Севастопольской бухты принимаетъ въ себя рѣчку Черную, которая течетъ по низменному плоскому дну долины съ крутыми берегами, являющимися продолженіемъ сѣвернаго и южнаго берега самой бухты.

Это плоское дно долины составлено новѣйщими осадками подымающимися у Макухинскаго водобора (Севастопольскаго водопровода) на 4 саж. н. у. м.

На нѣкоторой глубинѣ, во всякомъ случаѣ у уровня моря, къ которому приближается къ устью долина Черной рѣчки, начинаются современные морскіе черноморскіе осадки.

Они простираются у устья Черной рѣчки (по письменнымъ свѣдѣніямъ Двойченко) до минусъ 18 саж., а у Макухинскаго водобора до минусъ 9 саж., у хут. Врангеля на минусъ 5 саж.

Не очень далеко отъ устья Черной рѣчки буренія произведенныя въ Севастопольской бухтѣ около затонувщаго броненосца „Марія“ дали нѣсколько сажень (свѣдѣнія въ настоящее время отсутствуютъ) осадковъ съ морскими современными раковинами.

Подъ 18-ти саженной толщей современныхъ морскихъ осадковъ, у устья Черной рѣчки, лежитъ небольщая толща осадковъ безъ морскихъ окаменѣлостей, но съ *Dreissensia polymorpha*. Очевидно это таже толща

пластовъ, которую мы открыли въ Керченскомъ проливѣ подъ новѣйшими морскими осадками и надъ пластами съ *Cardium tuberculatum.*

Таже послѣдовательность пластовъ уже раньще была открыта И. Мушкетовымъ на пересыпяхъ различныхъ соленыхъ озеръ береговъ западнаго Крыма.

Вообще на всемъ участкѣ побережья Чернаго моря отъ мыса Херсонеса и до Варны мы нигдѣ не видимъ пластовъ съ *Cardium tuberculatum,* ни выше, ни ниже уровня моря на доступныхъ намъ близъ берега моря глубинахъ.

Всѣ морскія отложенія, находимыя на пересыпяхъ соленыхъ озеръ Зап. Крыма и Новороссіи, относятся къ самымъ младщимъ отложеніямъ Чернаго моря съ современной морской фауной. Подъ ними лежатъ пласты съ *Dreissensia polymorpha,* относящіеся, по всей вѣроятности, къ эпохѣ съ *Monodacna pontica.*

Такимъ образомъ на этомъ пространствѣ, по крайней мѣрѣ, въ полосѣ непосредственно прилегающей къ берегу, пласты съ *Cardium tuberculatum* отсутствуютъ, а слои съ *Dreissensia polymorpha* налегаютъ непосредственно на коренныя породы. Слѣдовательно этотъ участокъ земной коры, когда-то бывщій сущей и находившійся надъ уровнемъ моря, и уровень, соотвѣтствующій Тирренской террассѣ съ *Cardium tuberculatum,* въ настоящее время лежатъ на нѣсколько сажень ниже уровня моря.

Изъ всего изложеннаго явствуетъ, что берегъ Тирренскаго Чернаго моря въ сѣверо-западной части лежалъ на югъ, — въ юго-восточной — на сѣверъ отъ современной береговой линіи, и, что т. о. присутствіе Тирренской террассы обуславливается не передвиженіемъ уровня моря, а самостоятельными, хотя и слабыми передвиженіями сущи.

Это заключеніе подтверждается суммой всѣхъ другихъ явленій, которыя я надѣюсь изложить въ слѣдующихъ статьяхъ. Наши заключенія противорѣчатъ обобщеніямъ Депере касательно гармоничности движеній уровня моря въ послѣтретичную эпоху почти на всемъ земномъ щарѣ.

Въ заключеніе я даю краткій обзоръ тѣхъ данныхъ, которыя имѣются въ нащемъ распоряженіи, о послѣтретичныхъ отложеніяхъ въ области Чернаго моря.

Нижеприводимая таблица изображаетъ послѣдовательные этапы седиментаціи послѣтретичныхъ отложеній въ Черномъ Морѣ. Она составлена гл. обр. на основаніи послѣдовательности пластовъ на днѣ Керченскаго пролива и на Керченскомъ полуостровѣ.

(Сверху внизъ):

1. *Новѣйшія морскія отложенія* Чернаго моря, съ фауной тождественной съ *современной* черноморской; нигдѣ не лежатъ выще современнаго уровня моря. Образуютъ плоскія прибрежья, низкія косы, пересыпи.

2. *Отложенія съ Monodacna pontica* съ фауной тождественной (или почти тождественной) съ фаунами устьевъ или лимановъ большихъ рѣкъ:

Днѣстра, Дона, Буга. По типу сходна съ *Каспійской*, но отличается отъ нея въ видовомъ отношеніи, особенно по части кардидъ: бросается въ глаза отсутствіе кардидъ типа *Didacna crassa* и присутствіе нѣсколько отличныхъ формъ *Monodacna* (*M. pontica, colorata*).

Въ эпохи 1—3 Каспій былъ несомнѣнно отдѣленъ отъ Понта. Надводныхъ отложеній типа 2., можетъ быть за исключеніемъ устьевъ Донанѣтъ. Не исключена возможность, что въ это время Черное море цѣликомъ обратилось въ большой Каспіеподобный лиманъ.

3. *Морская террасса*, съ нѣсколько обогащенной черноморской фауной (около 14-ти новыхъ отличныхъ видовъ, наиболѣе выдающіеся *Cardium tuberculatum* и *Tapes Calverti*), сопоставляется нами съ *Тирренской террассой*. На участкѣ отъ устья Дуная до Балаклавской бухты берегъ ея лежалъ на югъ отъ современнаго, что объясняется болѣе высокимъ его положеніемъ и происходившимъ въ это время прорытіемъ рѣчныхъ долинъ; на юго-востокѣ мѣстами береговая линія моря Тирренской террассы, лежитъ выше уровня моря, мѣстами ниже. Это положеніе ея зависитъ отъ слабыхъ тектоническихъ перемѣщеній.

Фаунистическій харакеръ террассы указываетъ на *междуледниковое ея происхожденіе*, вѣроятно она образовалась въ *послѣсаксонскую эпоху*, тогда какъ замѣщеніе ея пластами съ *Dreissensia* и *Monodacna* указываетъ на *полонскую-рисскую* ледниковую эпоху.

4. Ниже морской террассы, на Чокракскомъ озерѣ лежитъ настоящая *Каспійская террасса* съ *Didacna crassa*. Различныя клочки ея мы кромѣ того знаемъ вдоль Кавказскаго побережья, въ южной Бессарабіи, на днѣ Бугскаго лимана и у Таганрога; фауна погребенная въ этихъ пунктахъ нѣсколько различная, но принадлежитъ въ сущности одному періоду времени. Разсмотрѣнію этихъ образованій мы посвятимъ особую статью.

Découvertes nouvelles dans le Silurien inférieur d_α ($Dd_{1\alpha}$) en Bohême.

II.

Par

Celda Klouček.

Présenté le 20 Novembre 1925.

En 1924 l'auteur présenta une note du même nom, où il communiqua sa découverte d'une localité paléontologique nouvelle où il trouva la faune à *Euloma-Niobe* (Trémadoc); cette localité — c'est les minières délaissées de Ouzký près de Holoubkov (Bohême de la SW). La faune est contenue dans les minerais de fer (hématite rouge) très durs, d'origine sédimentaire à gangue siliceuse.

Les recherches à Ouzký durant l'année 1925 ont fourni à l'auteur une série d'espèces de Trilobites nouveaux et un grand nombre de formes nouvelles de Brachiopodes etc., qui ont tous un caractère „tremadoc"; l'auteur a pu trouver le passage latéral des minerais de fer à des phtanites. Toutes ces données ont conduit l'auteur à attribuer le niveau des minerais de fer de Ouzký—qu'on attribuait jusqu'à 1924 à la bande d_β ($Dd_{1\beta}$), à la *bande* d_α plus *précisément* au assises $d_{\alpha 2}$ ($Dd_{1\alpha}$ moyen), ce qui est prouvé par les caractères pétrographiques et paleontologiques de ce niveau; au plus on peut paralléliser le niveau de Ouzký d'après sa faune, a assises $3a_\beta$ — $3a_\gamma$ des pays scandinaves.

Jusqu'à présent on a trouvé à Ouzký 13 espèces de Trilobites et plus de 25 espèces de brachiopodes etc., donc en somme à peu près 40 espèces, tandis qu'à Úvaly (à l'E de Prague) on n'a trouvé que 28—30 espèces et à Olešná (SW de la Bohême) seulement 23—25 espèces. La plupart des espèces, surtout des espèces de Trilobites est commune aux trois localités citées à faune du Tremadoc, en Bohême.

Nota: Avant 1914 (quand l'auteur découvrit la faune d' Olešná) la Faune du Tremadoc à Euloma et Niobe n'était pas connue en Bohême; seulement l'échantillion unique de Harpides Grimmi Barr en faisait soupçonner l'existence. La faune à Euloma et Niobe que K. Holub (localité Klabava près de Rokycany (dans le SW de la Bohême) trouva en 1907 et décrivit en 1911—12 provient des assises d_β ($Dd_{1\beta}$) et appartient au *sommet* du Tremadoc ne contenant qu'un seul genre cambrien Euloma (2 variétés) — les autres genres appartenant à des formes siluriennes.

Prague, Novembre 1925.

The Occurrence of Dvi-Manganese (At. No. 75) in Manganese Salts.

By

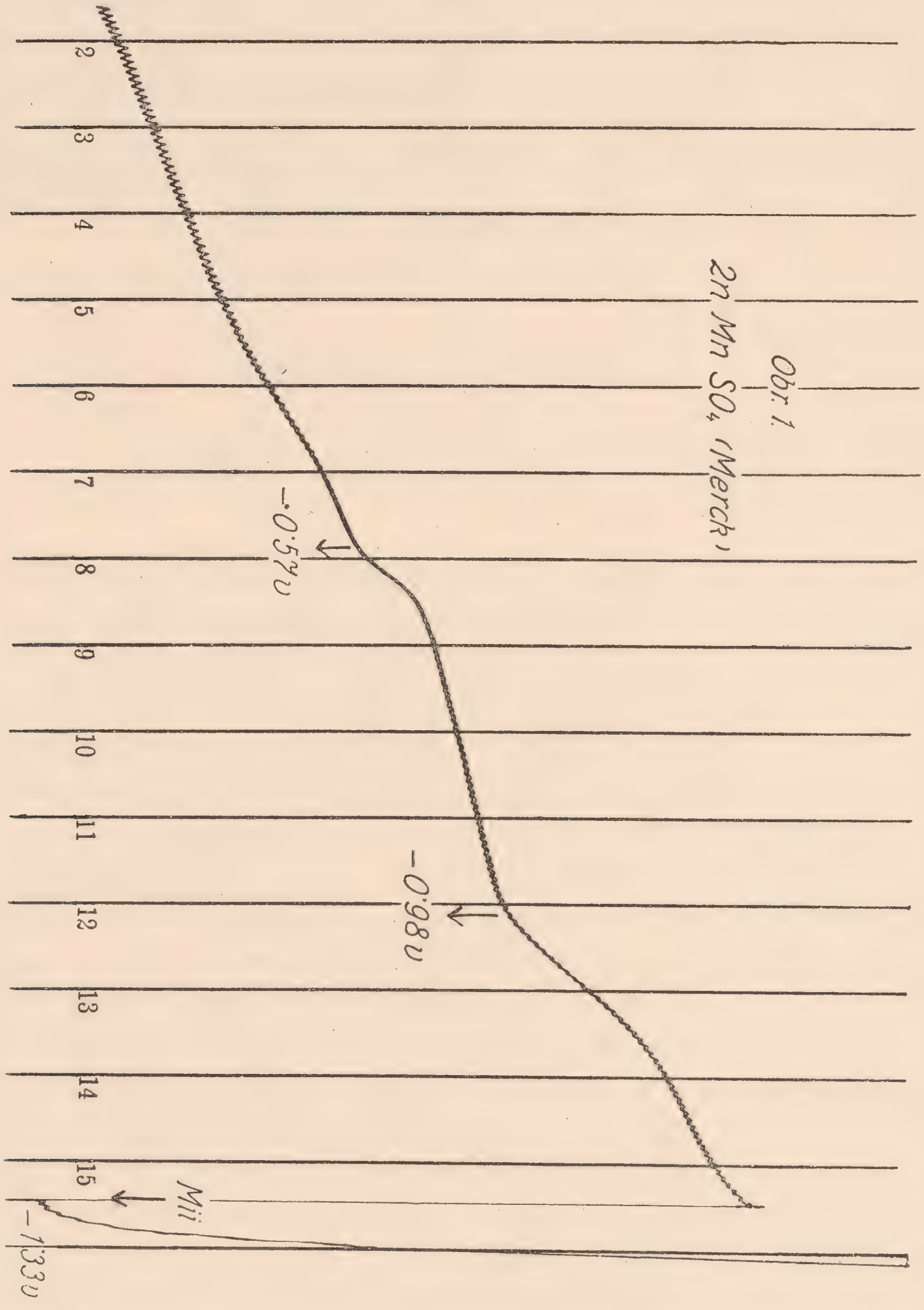
V. Dolejšek and **J. Heyrovský.**

(Presented the 6th November 1925.)

From the polarographic electro-analytical investigations of manganese solutions by means of the Dropping Mercury Cathode the comparatively large amount (1 : 20,000) of impurities present in even the purest specimens (e. g. Kahlbaum's or Merck's "pro analysi") becomes apparent [comp. Rec. Trav. Chim. Pays Bas, 44. 1925, Brauner's Jubilee Volume, (pp. 488—600)]. According to the position of the deposition potential wave (see Fig. 1.) the impurity was at first thought to be zinc (l. c. p. 520). However, on closer examination the saw-like character of the undulations showed that this increase of current must be due to the deposition of a metal or metals not alloying with mercury (l. c.). At the potential where the prominent wave of the manganese impurity appears, i. e. at — 1.000 volt from the calomel zero, zinc, nickel, cobalt and iron may be depositedfrom their 10^{-5} norm. solutions at the cathodic potentials of 1.00, 1.06, 1.20 and 1.27 volts respectively from the calomel electrode. However, from the height of the wave on the polarographic curve it is known that the impurity in the manganese solutions amounts to 0.5—4.0 $\times 10^{-4}$ equivs. per litre. As analytical tests for Zn, Ni, Co and Fe in these solutions give negative results these metals cannot be present in concentrations greater than 10^{-5} equivs per litre. Hence the persistent impurity was suspected to be analogues of manganese — eka-manganese (43) and dvimanganese (75).

The separation which was first attempted in May 1925 consisted of dipping strips of zinc or platinum foils connected to zinc rods into concentrated manganous solutions; this would cause all metals having potentials less negative than zinc to be deposited. The deposit was scraped off, dissolved in a few drops of HCl, evaporated to dryness, or precipitated by NaOH, and its X-ray spectrum examined.

Prof. M. Siegbahn's apparatus was used, as described in his monograph. The $L\beta_1$ line (Siegbahn's notation) of the element 75 was at once observable, the $L\alpha_1$ line being masked by the $K\alpha_1$ line of zinc.



Owing to this superposition, the Zn $K\alpha_1$ line wave-length is not determinable accurately. Although this evidence did not seem sufficient to establish the new element yet the authors have used it, in conjunction with the electrolytical method, to deduce some chemical properties of dvi-manganese. The impurity (1 : 100,000) causing the first wave was easily shewn to contain no element 75, since it disappeared entirely from the graph when H_2S was passed through the acidified solution, and the traces of precipitate thus formed gave on X-ray analysis no line of the element 75. The second wave was not affected by passing H_2S through

the acidic, or the sodium acetate solution, and when the solution was precipitated by NaOH only the precipitated hydroxides showed the 75 line. Owing to the considerable amount of zinc which was introduced (by the scraping) into the solution any further polarographic investigation was inapplicable and no progress was made until a few weeks ago when the procedure was so modified that it yielded, in one operation, a pure X-ray spectrum of three lines of the 75 L series.

The method is as follows: — into a nearly saturated solution of pure manganous sulphate a small crucible containing manganese amalgam (prepared electrolytically) is introduced together with a large platinum foil which is connected to the manganese amalgam. After several days the platinum foil is removed, rinsed with water and the deposit washed off with concentrated HCl. The solution thus obtained is diluted with water, neutralised with sodium carbonate and slightly acidified with acetic acid. H_2 S is then passed to remove Zn Ni, Co and other metals of the first two analytical groups. The solution remaining then contains manganese with ca. 1—2 % dvi-manganese, as shewn from the spectrometric evidence of the hydroxides precipitated from this solution by sodium hydroxide.

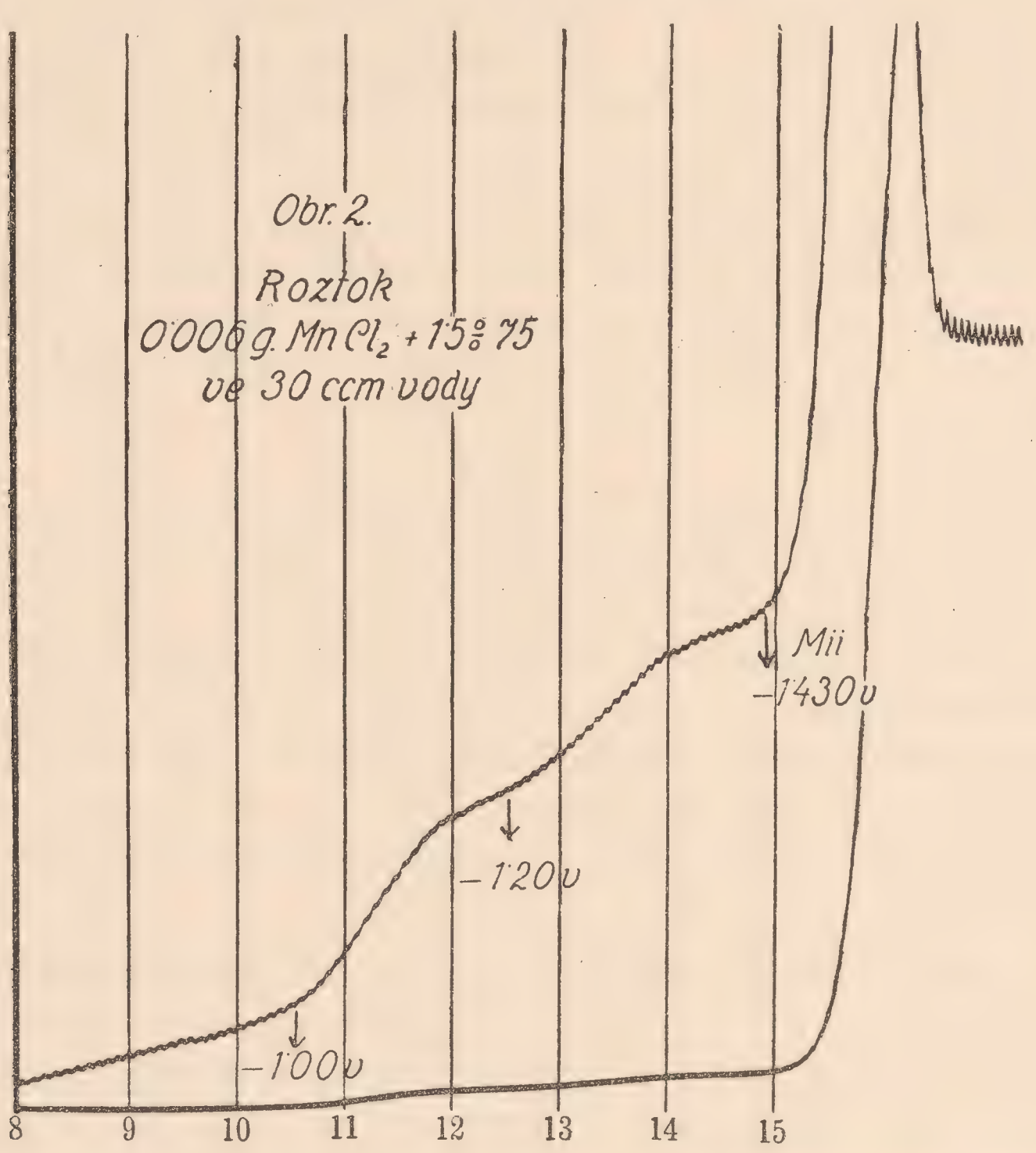
The simultaneous polarographic examination of the manganous solution always reveals two impurity waves which constitute 2—3 % of the manganous content (see Fig. 2). Here, of course, very small traces of the hydroxides are sufficient to produce a large polarographic wave. One appears at the potential of—1.00 v., the other at—1.20 v. when the height of the wave corresponds to 2×10^{-5} equivs per litre. One wave is evidently due to the element 75; whether the other is caused by the element 43 could not be determined as the coil used would not withstand the necessary powerful exposure for the 43 K series.

Concentrated acidic chloride solutions are greenish although nickel has been carefully removed; the dry green chloride darkens rapidly to black on standing. Neutral chloride solutions containing 75 deposit a yellowish-brown precipitate on standing in air, probably due to oxidation; this precipitation is avoided in the electrolytic method where the solutions are kept in an atmosphere of hydrogen. This seems to indicate that higher valency compounds of 75 are more stable than those of manganese. In agreement with this is the fact that the manganous chloride prepared from potassium permanganate (Merck's "pro analysi") gives a polarographic wave six times as high as that from an equi-concentrated solution of $MnSO_4$.

This chemical behaviour coincides with that mentioned by Dr. G. Druce in his recent communication (Chem. News 131. p. 273. 1925.) whose results indicate the presence of 75 in manganese compounds. However, as his spectrometric data are not given with accuracy and the communi-

cation is of a preliminary character, bearing on one experiment only, criticism must be deferred until more particular data appear.

The provisional spectroscopic results are: — $L\alpha_1 = 1430.$ XU, $L\beta_1 = 1235.3$ XU, $L\beta_2 = 1204.3$ XU, and $L\gamma_1 = 1059.$ XU. The Cu Kβ line was used as reference (M. Siegbahn and V. Dolejšek, Zeit. f. Phys. X. 1922, 159). No lines of other elements appeared in the spectrum of the four different final specimens (of which six spectrographs were obtained) except the Cu K-lines (see Fig.). The $L\alpha_1$ line could not be measured with the same exactness as the others since only the most recent specimens were entirely free from zinc.



W. Noddack, I. Tacke and O. Berg claim (Naturwiss. 1925, 26, 567) to have discovered the element 75 (in 5% yield) in a certain Columbite specimen, although they searched for it in manganese and platinum ores and related minerals such as wolframite, tantalite, vanadite, etc. They did not discover any except in one wolframite — a thallium containing ore. As published, their spectroscopic evidence is not conclusive, since two of their lines of the 75 L series, according to their own data, coincide with those of wolfram; moreover their observed $75\ L\beta_2 = 1204.8$ XU. and their $75\ L\beta_3 = 1216$ XU. happen to coincide exactly with Tl $L\alpha_1 = 1204.7$ XU., $L\alpha_2 = 1216.0$ XU. In view of the accuracy of their measurements their observed lines agree with those of thallium better

than with those calculated for 75 (i. e. 1204.1 and 1216.9). They do not state whether their specimen was free from thallium, a common impurity in such minerals, which if present in the smallest quantity would accumulate with the insoluble sulphides owing to the fact that their columbite contains arsenic. The presence of their dvi-manganese in the insoluble sulphide disagrees entirely with the properties of their "Eka-mangane" which, as they predict, cannot be precipitated by H_2S, and indeed, they report, that such is the case with eka-manganese. According to the method of the present authors dvi-manganese is not precipitated by H_2S from acidic or from sodium acetate solutions and thus could never accumulate with the insoluble sulphides. Hence the detection of the dvi-manganese in this columbite is contradictory to all they state in their communication about the chemical character of this element.

The faint line which they regard as 75 $L\alpha_2$ cannot be relied upon since then the much stronger lines 75 $L\beta_4$ ane 75 $L\gamma_1$ should be visible in their spectrum.

The only free $L\alpha_1$ line they recorded, which by the ordinary Siegbahn dispersion is indistinguishable from the Zn $K\alpha_1$ line, (difference ca. 1X. U.) might be, at the abnormal magnification they used, a hitherto unobserved line covered by the zinc doublet.

From the scientific point of view the chemical character of the element 75 seems to the present authors more suitably expressed by the old Mendelejev designation of "Dvi-manganese" than by "rhenium" as proposed by the German authors.

The authors wish to express their indebtedness to the Czech Academy of Sciences and Arts for the grant they have received to construct their apparatus.

Institute for Experimental Physics
and Institute for Physical Chemistry,
Charles University, Prague.

Appréciation éléctrocardiographique de l'état du myocarde des athérosclérotiques.

Par

MUDr. ANT. VANČURA.

Présenté le 28 Novembre 1925.

1. On a étudié l'éléctrocardiogramme de 189 cas des athérosclérotiques, classés au point de vue clinique en trois groupes d'après la période de la défaillance du coeur.

2. L'intervalle du complexe ventriculaire *QRS* est entre 0·05″—0·17″. Il dépend de la tension artérielle, car il est plus large chez les grandes hypertensions; mais surtout de le suffisance du myocarde, il grandit au cours de la défaillance du coeur.

3. L'hauteur moyenne de l'onde *R* est plus basse que celle du coeur sain et elle abaisse au cours de l'insuffisance cardiaque.

4. La préponderance éléctrique du ventricule gauche se présente plus souvent plus haute est le tension artérielle; elle est précisée plutôt par l'augmentation du myocarde du ventricule gauche que par sa plus grande prédominance fonctionnelle, car sa fréquence ne dépend pas de la défaillance du coeur.

5. En cas de préponderance du ventricule droit, il existe un obstacle dans la petite circulation. (Emphysema pulm., Bronchitis chron., Sclérose de valves mitr., Sclerosis art. pulm.)

6. Le crochetage ou la brisure de l'onde *R* dans une dérivation apparaît très souvent chez les athérosclérotiques et on ne lui peut attribuer qu'une valeur rélative. S'il apparaît en deux ou trois dérivations, c'est toujours signe d'une altération du myocarde.

7. L'onde *T* est en général plus basse que normalement, et elle aplatit encore au cours de le défaillance du myocarde. L'onde *T* négative apparaît surtout à l'électrocardiogramme des coeurs déficients. On doit faire chez les athérosclérotiques la pronose avec réserve, quand même

la négativité se manifeste dans une seule dérivation, La négativité en deux ou trois dérivations a toujours une signification pronostique fâcheuse.

8. L'onde *P* est aplatie dans la deuxième et trosième groupe; c'est une marque de la défaillance du myocarde des oreillettes, qui est très souvent la cause de la fibrillation auriculaire.

9. L'int. *P—R* reste aux extrémités du normal.

10. Le bloc d'une branche du système de conduction se manifeste en 5 ces et ne dépend pas de l'insuffisance du coeur.

11. Le „bloc d'arborisation" de Rothschild et d'Oppenheimer était diagnostiqué 14 fois. Dans le I^{ère} groupe 0, II^{ème} gr. 5, III^{ème} gr. 9; 4 patients sont morts quelque temps après; c'est un symptôme de l'altération du système de conduction accompagnée par la défaillance du myocarde. Il apparaît surtout dans le cas de l'occlusion des art. coronariennes et de ses branches.

12. Le rythme:

I^{ère}	groupe:	86 %	norm.	5 %	fibrillation		9 %	extrasystoles
II^{ème}	„ :	66 %	„	20 %	„		14 %	„
III^{ème}	„ :	34 %	„	26 %	„		14 %	„
				26 %	„	+ extr.		

13. La défaillance du myocarde des athérosclérotiques se manifeste à l' éléctrocardiogramme: par l'allongement de l'int. *QRS*; par l'abaissement de l'onde *R*; par les anomalies de forme de l'onde *R*: crochetage, brisures, surtout si c'est en plus qu'une dérivation; par l'abaissement de l'onde *T*; l'onde *T* plus basse que 1 *mm* en deuxième dérivation a une signification pronostique fécheuse; par la négativité de l'onde *T*, spécialement quand cette négativité est marquée eu deux on trois dérivations. La défaillance du myocarde des oreillettes se manifeste par l'abaissement de l'onde *P* et la fibrillation auriculaire.

14. On peut apprendre de l'éléctrocardiogramme des athérosclérotiques non seulement les altérations du rythme, mais aussi les altérations du système de conduction et des notions importantes pour apprécier le dégré de la défaillance du myocarde et en déduire la pronose.

Complexe ventriculaire d'électrocardiogramme et sa valeur pronostique dans les aortites chroniques d'origine syphilitique.

Par

F. Herles, R. Tatterová et J. Šerf.

Presénte le 8 Octobre 1925.

Résumé:

L'enregistrement électrocardiographique dans les 84 cas des aortites chroniques syphilitiques nous fournit de précieuses indications pour le pronostic. Des variations typiques, importantes au point de vue pronostique apparaissent dans le complexe ventriculaire. Nous l'avons comparé aux téléradioscopies correspondantes. (Voir tab. I^{e} dans le texte.) En résumant nos observations, nous voyons que:

A. 1^{0}. Une hypertrophie peu characterisée du ventricule gauche peut être accompagnée d'une part d'une *prépondérance électrocardiographique* non caractérisée, d'autre part d'une prépondérance manifeste du ventricule gauche; s'il n'y a pas d'autres signes défavorables, le pronostic peut être dans l'ensemble favorable.

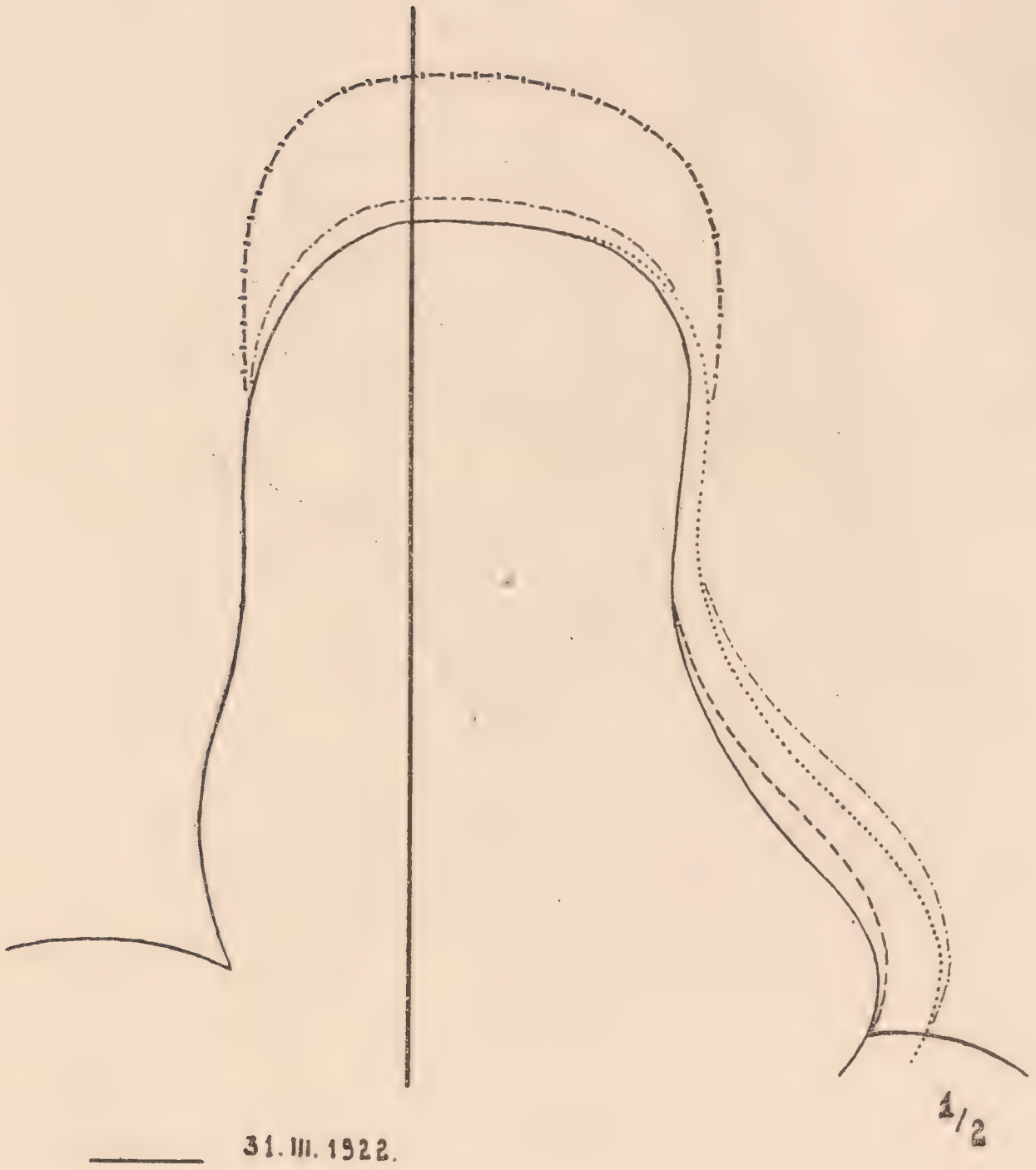
2^{0}. Une hypertrophie nette, mais non excentrique du ventricule gauche tend à la préponderance du ventricule gauche, toutefois sans que les indications pronostiques soient mauvaises.

3^{0}. Une dilatation prononcée du ventricule gauche, ou même du coeur entier, présente rarement une prépondérance quelconque sur l'électrocardiogramme. Dans ces cas, la prépondérance du ventricule gauche est un meilleur indice pronostique que l'absence de prépondérance.

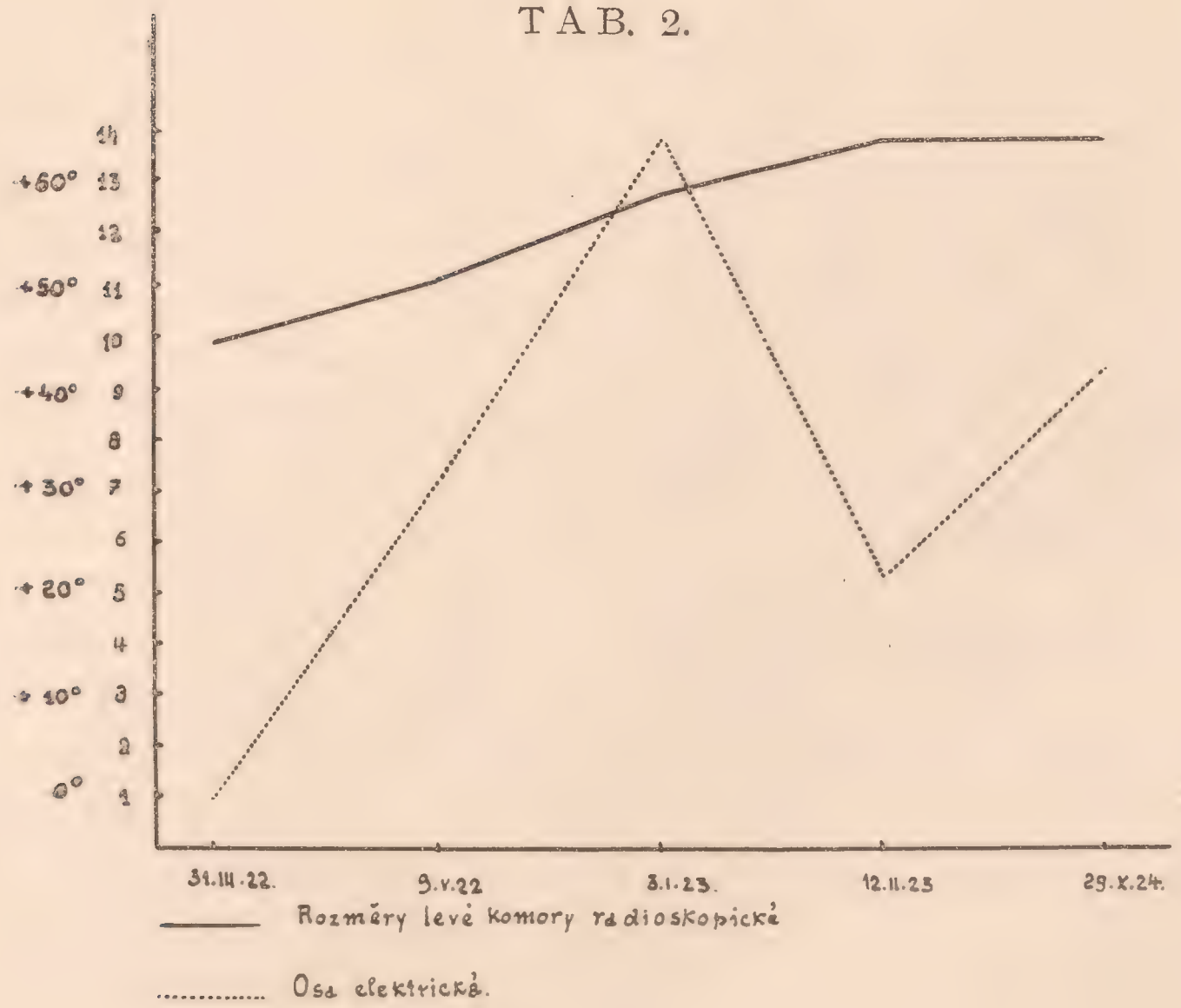
4^{0}. L'absence du prépondérance impose un pronostic très grave. Près de 63% des dissections montrant une dilatation du ventricule gauche provenaient de cas n'ayant pas présenté de prépondérance.

B. La hauter du complexe Q R S n'a pas de valeur pronostique pour une seule observation. Cependant, des observations répétées peuvent avoir une grande importance pronostique. La diminution progressive de la hauteur du complexe est considérée comme un indice très grave, par contre, l'augmentation de hauteur de ce complexe est un bon signe. (Voir tab. III^{e} et IV^{e}).

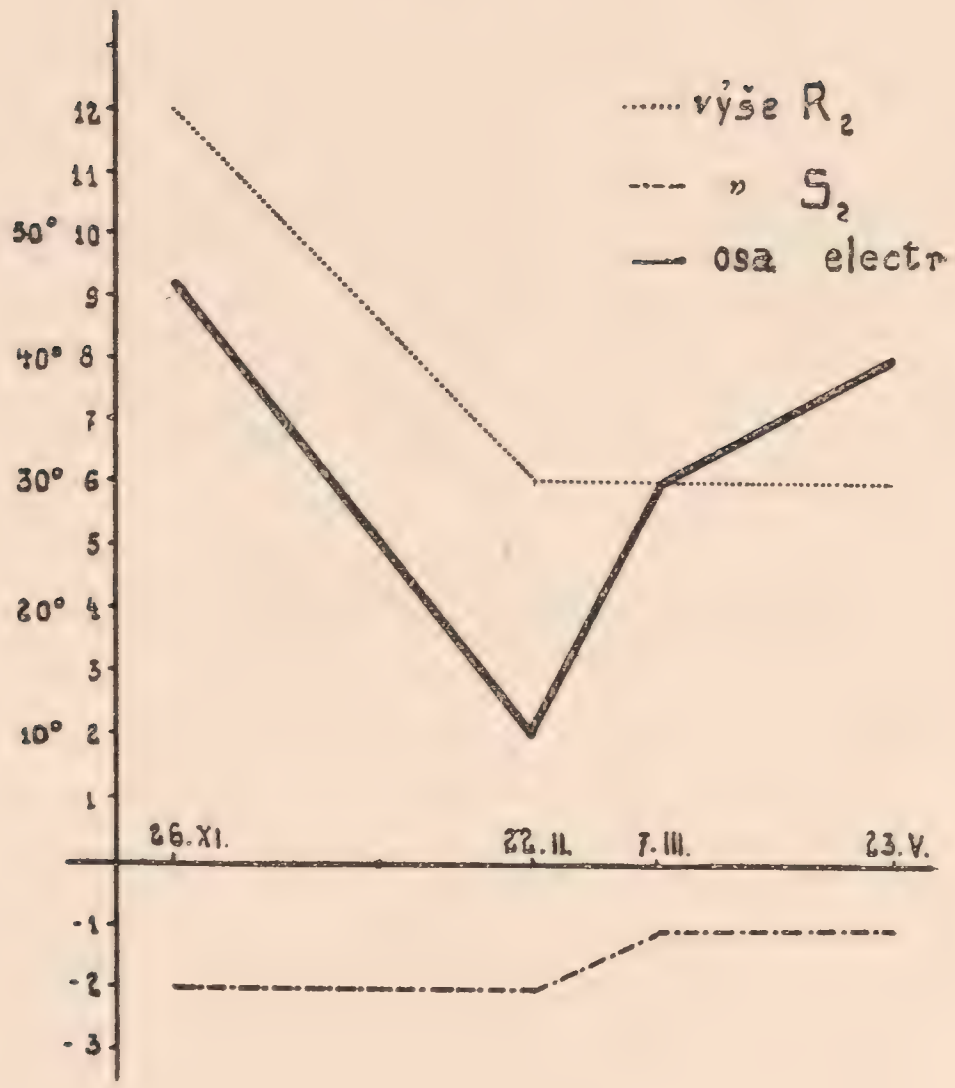
OBR. 2.


1/2
31. III. 1922.
9. V. 1922.
3. I. 1923.
12. II. 1923.
29. X. 1924.

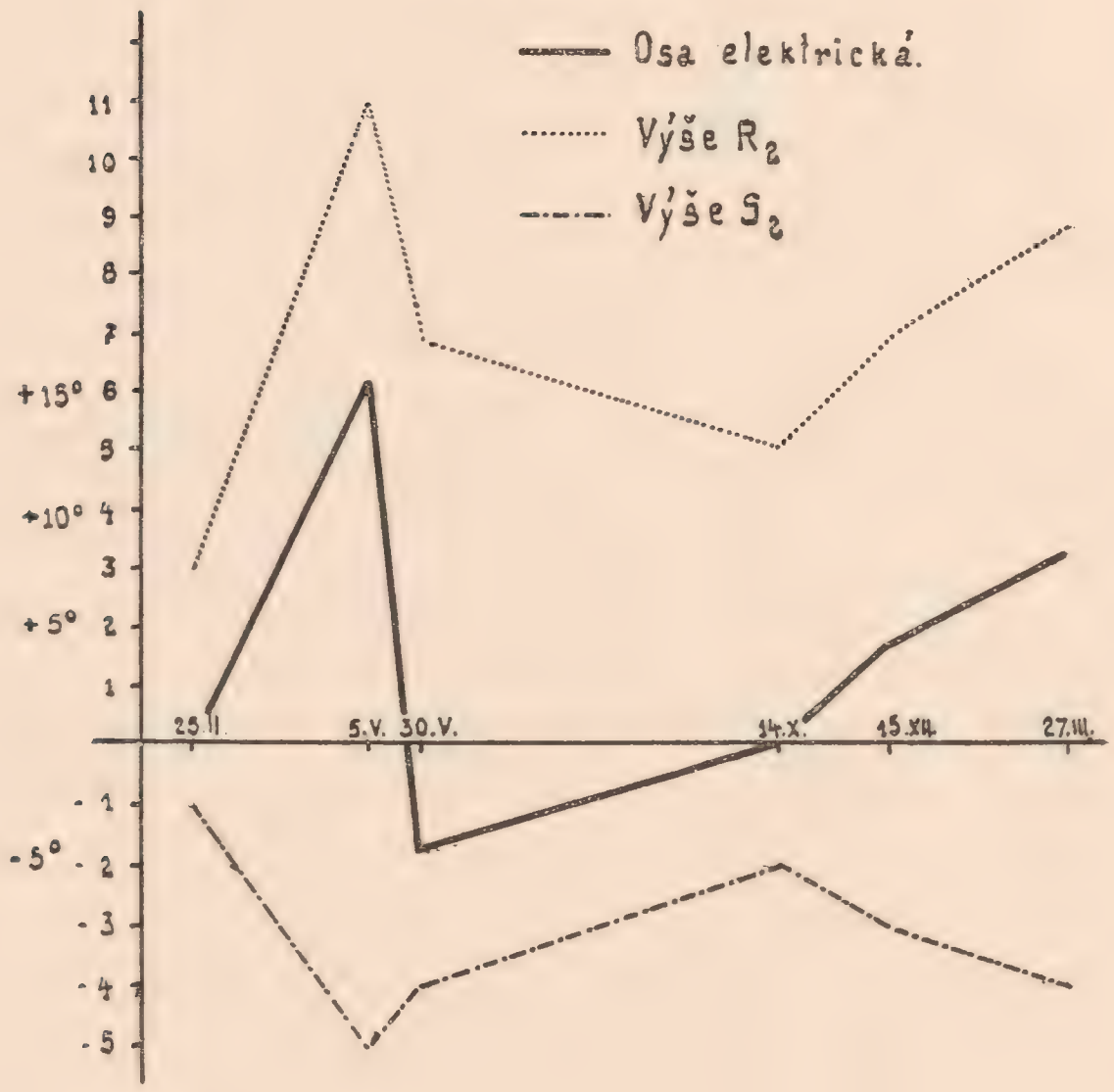
TAB. 2.


14
+60° 13
12
+50° 11
10
+40° 9
8
+30° 7
6
+20° 5
4
+10° 3
2
0° 1
31.III.22.
9.V.22
3.I.23.
12.II.23
29.X.24.
Rozměry levé komory radioskopické
Osa elektrická.

TAB. 3.


výše R_2
» S_2
osa electr
12
11
50° 10
9
40° 8
7
30° 6
5
20° 4
3
10° 2
1
-1
-2
-3
26.XI.
22.II.
7.III.
23.V.

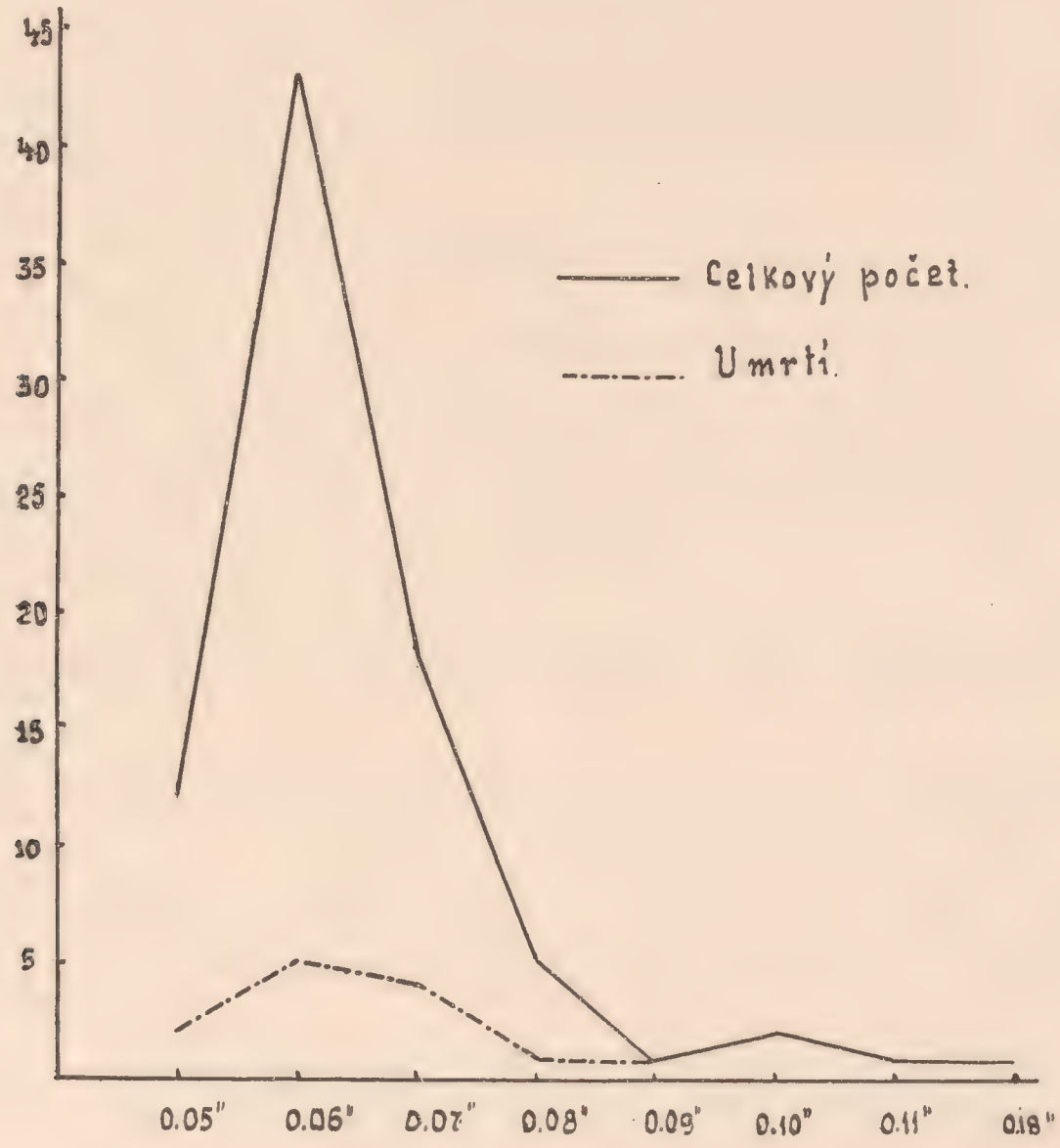
TAB. 4.


Osa elektrická.
Výše R_2
Výše S_2
11
10
9
8
7
+15° 6
5
+10° 4
3
+5° 2
1
-1
-5° -2
-3
-4
-5
25.II.
5.V.
30.V.
14.X.
15.XII.
27.III.

C. La largeur normale du Q R S oscille autour de 0·06″. Le nombre des décès augmente en même temps que cette longueur augmente. Les valeurs supérieures à 0·08″ sont considérées comme dénonçant des cas nettement graves. (Voir tab. V^{e}.)

D. La *longueur de l'ergosystole* (d'après J. de Meyer), soit la distance entre le fin de l'onde *S* et le sommet de l'onde *T* est de 0·17″—0·20″ normalement dans tous les cas qui montreut une largeur du complexe initial sous 0·08″. Une ergosystole plus longue nous a indiqué une plus grande mortalité. Nous ne formulons cependant pas de conclusions définitives.

TAB. 5.



E. La *négativité des ondes T* rend le pronostic plus grave que dans le cas où les ondes *T* sont positives dans toutes les dérivations. On trouve la plus grande mortalité chez les cas qui présentent une onde *T* négative dans les deux premières dérivations (50%), mais une mortalité moins importante dans les cas où l'onde *T* est négative dans tous les 3 dérivations (25%). La mortalité la plus minime se trouve dans les cas où l'onde *T* est négative dans la deuxième et la troisième dérivation. La négativité de la 3^{e} dérivation a également une certaine importance.

La hauteur de l'onde T supérieure à 2·5 *mm* dans la deuxième déviation permet dans l'ensemble un pronostie favorable.

F. L'onde — D, soit la différence entre le potential électrique et l'abscisse isóélectrique a apparu dans 50% des cas.

G. La fibrillation auriculaire chex les aortiques est un indice éminément défavorable.

Les mollusques nouveaux du Bourdigalien tchèque.

(Laboratoire de la section géol.-palaeontol. du Musée national à Prague.)

Par

JAR. PETRBOK.

Présenté le 28 Novembre 1924.

Helix (Acanthinula) paludinaeformis Sandb. var.

Differt a typo statura angustiore et anfractibus minus numerosis.
Tuchořice en Bohême.

Wenz (1914) parlant du type: „Die Form schwankt nicht unbeträchtlich in der Grösse“ et cite les rapports suivants:

la hauteur: 4·0 *mm*, le diamètre: 3·4 *mm* ; des rouleaux : 6
„ : 3·1 „ , „ : 3·0 „ ; „ . : $4\frac{1}{2}$

---

la hauteur: *3·4 mm*, le diamètre: *2·5 mm* ; des rouleaux : $4\frac{2}{3}$ *var de Tuchořice.*

J'enregistre ici la description du type: *Testa globoso conica, apice obtusa, basi convexa, umbillicata. Anfractus quinque convexi, suturis impressis disjuncti, costulis transversalibus latis, distantibus inter quas subtiliores intermediae sunt, ornati, ultimus ventrosus, praecedentibus omnibus altior. Apertura lumaris, marginibus acutis, columellari reflexo. Hochheim en Allemagne.*

Les escpèces systematiquement les plus proches de *Acanthinula paludinaefornis* sont l'espèce récente *Acanthinula spinifera* Mousson de *Palma* et *Acanthinula tuchořicensis* Klika fossille du *Bourdigalien* de *Tuchořice*.

En examinant les exemplaires décrits, nous nous appercevons de la grande variabilité de cette espèce, dont les formes diverses se distinguent par le nombre diffèrent de tours, par leur grandeur différente, par le rapport inégal de la hauteur à la longueur et les relations de ce rapport au nombre des tours.

Azeca Daneši sp. n.

Testa oblongoovata, inflata, apice obtuso, laevis, valve nitida, cum spira depressa. Anfractus sex, parum convexi, sutura non profunda disjuncti, ultimus major dimidio testae; apertura rotundatotriquetra, cum peristoma rectum infra intus incrassatum, cum 1 crasso obtuso dente, supra tenue; columella lata incrassata, subtus decisa, obtuse denticulata; peristoma caret lamella palatali.

Cette nouvelle espèce se distingue des deux autres espèces tchèques, avec lesquelles il est possible de la comparer, c'est-à dire d'*Azeca pumila* Slavík et *d'Azeca monocraspedon* Slavík à première vue par le raccourcissement du disque, et de toutes les deux ainsi que *d'Azeca vitrea* Klika par l'absence du liteau d'étage.

La hauteur: 3·5 *mm*, le diamètre: 2·0 *mm*.

Tuchořice en Bohême; le travertin du *Bourdigalien*.

Azeca monocraspedon Slavík est une espèce valable tout à fait à bon droit de plein droit indépendante, ce qui a été dont la validité était justement défendu contre *Sandberger* et contre *O. Boettger*, par Klika (1892) tout quoique *Wenz* l'a omise de nouveau*) (comme d'ailleurs plusieures autres espèces de Bohême).

Azeca monocraspedon Slavík est svelte et les tours croissent régulièrement, tandis-que dans de la groupe *d'Azeca Daneši* Pbk- *pumila* Slav; le dernier tour croit d'une manière frappante c'est à-dire plus chez la première moins chez l'autre.

Je donne le tableau suivant pour faciliter l'étude et la détermination de nos 4 espèces de genre *Azeca*:

Coquille
- *petite*
  - ventrue
    - disque abattu, distinctement le dernier tour distinctement plus de ½ de la hauteur ..... *Daneši*
    - disque plus malléable, le dernier tour à peine plus de ½ de la hauteur ..... *pumila*
  - svelte ..... *monocraspedon*
- *grande* ..... *vitrea.*

*) Il la note comme: Azeca (Azera) monocraspedon monocraspedon. Slavík et comme: Azeca (Azeca) monocraspedon pumila Slavík, surement sans raison (lit. num. 14.).

Planorbis declivis Al. Braun for. scalaris.
syn. Ptychospira delopecta Slavík.

La description des formes individuelles de *scalaris* est superflue. Bien plus important est le réglement des relations des exemplaires individuels sclariformes aux formes typiques. Ces formes scalariformes *Slavík* dénomme *Ptychospira delopecta nov. gen. et nov. sp.* et d'après trois exemplaires a fait le schéma de la construction illustrée et la plus proche parenté cherchait au genre *Pupa.*

J'ai ajouté cette forme à l'espèce *Planorbis declivis* à cause de l'accord de la sculpture superficielle, identique à celle du type (qui a les rainures obliques et épaisses, tandis que *Planorbis Ungeri* les a plus espacées et moins denses) à cause du grand nombre des tours (*Planorbis declivis 6, Planorbis Ungeri* 5) ainsi qu'à cause des relations du dernier tour au avant-dernier qui est 3 : 1 (chez *Planorbis Ungeri* 2 : 1) et à cause des modifications du dernier tour sur la coupe verticale.

Hauteur cca: 3 *mm*, $2\frac{1}{2}$ *mm*, $2\frac{1}{2}$ *mm*; largeur cca: $1\frac{1}{2}$ *mm*, 2 *mm*, $1\frac{1}{2}$ *mm.* On ne peut pas confondre les autres espèces tchèque avec celle-là à cause des différences du petit nombre de tours et des relations de la hauteur à la longueur.

Tuchořice en Bohême; travertin du Bourdigalien.

Bibliographie.

Les mollusques des travertins tertiaires tchèques ont été traités methodiquement par A. E. Reuss (1852, 1860, 1861), O. Boettger (1870), Landberger (1870—75), K. Flach (1887—1890) en manière plus detaillée par A. Slavík (1864, 1868)) et B. Klika (1890, 1892), qui dans son oeuvre dernière: „*Měkkýši třetihorních usazenin sladkovodních v sz. Čechách*" (Archiv pro přírodov. výzkum Čech VII-4 = Les mollusques des sédiments tertiaires d'eau douce du NO de la Bohême; indique la bibliographie complète (19 num.) jusqu' à cette année.

A partir de cette date ont paru les suppléments suivants:

1. Dr. J. F. Babor: *Beiträge zur Kenntnis der tertiären Binnenconchylienfauna Böhmens I.* (Sitzb. d. k. böhm. Gesel. d. Wissensch. Praha 1897).

2. Z. Frankenberger: *Die Clausilien des böhmischen Tertiärs* (Nachrichtenbl. d. D. Mal. Gesellsch. Frankfurt 1914).

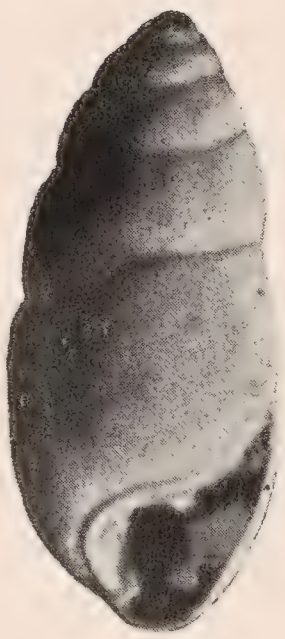
3. W. Wenz: *Zur Altersfrage der böhmischen Süsswasserkalke* (Jahrb. d. Nass. Ver. f. Naturk. Wiesbaden 1917).

4. C. R. Boettger u. W. Wenz: *Zur Systematik der zu den Helicidensubfamilien Campylaeinae und Helicinae gehörigen tertiären Landschnecken.* (Arch. f. Molluskenkunde. Frankf. a. M. 1921.

5. Z. Frankenberger: *Systematický přehled recentních i fossilních Tacheí.* (Sbor. Klub. přírodov. v Praze 1911. Praha 1912.)

6. Z. Frankenberger: *Zur Frage der rezenten u. fossilen Tacheen* (Nachrbl. d. D. Mal. Ges. Frankf. a. M. 1915).

JAR. PETRBOK:
Les mollusques nouveaux du Bourdigalien tchèque.



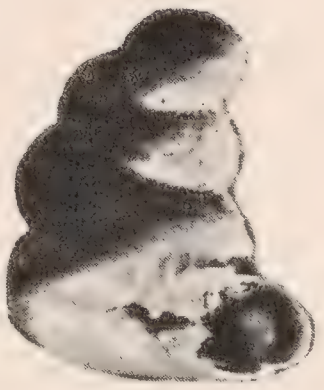
1

2

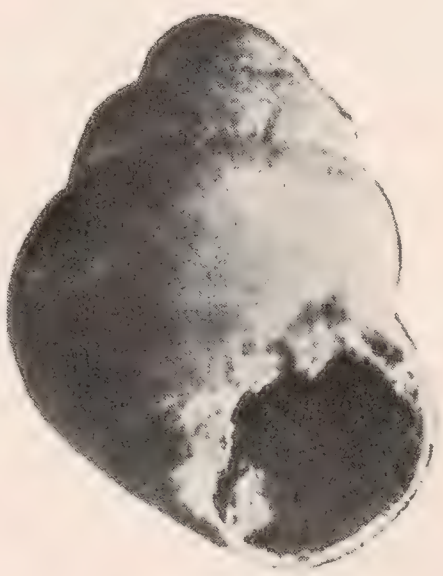
3

4

5



6



7

8

9

10

Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême. 1925.

7. Z. Frankenberger: *Příbuzenské vztahy měkkýšů našich třetihor a Wegenerova theorie o vzniku kontinentů.* (Časop. Čes. Musea. Praha 1916.)

8. Thuma Fr.: *Über Helix (Obba) Fr. hyperbolica Sandbg. u. d. Süsswasserkalk von Kolozruk i. Böhmen.* (Verh. d. k. k. geol. Reichsanst. Wien 1916.

9. Ph. Mr. Jos. Novák: *České třetihory* („Živa" 1911).

10. Jos. Kafka: *Studie v oboru třetihorního útvaru v Čechách.* (Arch. p. přír. výzk. Čech XIV. 1908).

11. Thuma. Fr.: *Tertiärer Süsswasserkalk von Stolzenhahn im Erzgebirge und seine Fauna.* (Der Kohleninteressent. 1922).

12. Slavík Alf.: *Neuer Beitrag zur Kenntniss der tertiären Süsswasserkalkschichten von Tuchořic.* (Landesforschung von Böhmen. Prag 1864—68.)

13. Schlosser M.: *Zur Kenntnis der Säugethierfauna der böhm. Braunkohlenformation.* (Gesellsch. z. Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst u. Literatur in Böhmen. Praha, 1901.)

14. W. Wenz: *Gastropoda extramarina tertiaria* (Fossilium Catalogus. Pars 21: IV. ser. 1094, 1095).

Explication du tableau.

1. *Azeca pumila* Slavík (l'orig.) cca 13×.
2. *Azeca Daneši* sp. n. (l'orig.) cca 13×.
3. *Azeca monocraspedon* Slavík (l'orig.) cca 10×.
4. *Planorbis declivis Al. Braun for. scalaris* (l'orig.) cca 7·2×.
5. *Planorbis declivis Al. Braun typ.* (de Klika) cca 3×.
6. *Planorbis declivis Al. Braun for. scalaris* (l'orig.) cca 7×.
7. *Acanthinula paludinaeformis Sandbg. var.* (l'orig.) cca 10·5×.
8, 9. *Acanthinula paludinaeformis Sandbg.* typ. (de Sandberger) cca 6×.
10. *Acanthinula paludinaeformis Sandbg. typ* (de Wenz) cca 12×.

Sur le conoïde droit rationnel circonscrit à une sphère

Par

Dr. JOSEPH KLÍMA.

Présenté le 23 Octobre 1925.

Le conoïde dont les génératrices touchent une sphère $\mathbf{K}^2$, coupent une droite B et sont parallèles à un plan π, est une surface gauche du quatrième ordre et de genre un, quand B a une position générale par rapport à la surface $\mathbf{K}^2$.

Dans le présent travail on étudie les propriétés du conoïde circonscrit à une sphère, dont la directrice rectiligne B est perpendiculaire au plan directeur π et qui, en même temps, est tangente à la sphère $\mathbf{K}^2$ au point s. Pour le plan horizontal de projection prenons le plan π et le plan vertical de projection soit parallèle au plan $(o\,B)$, où o est le centre de la sphère $\mathbf{K}^2$ (fig. 1).

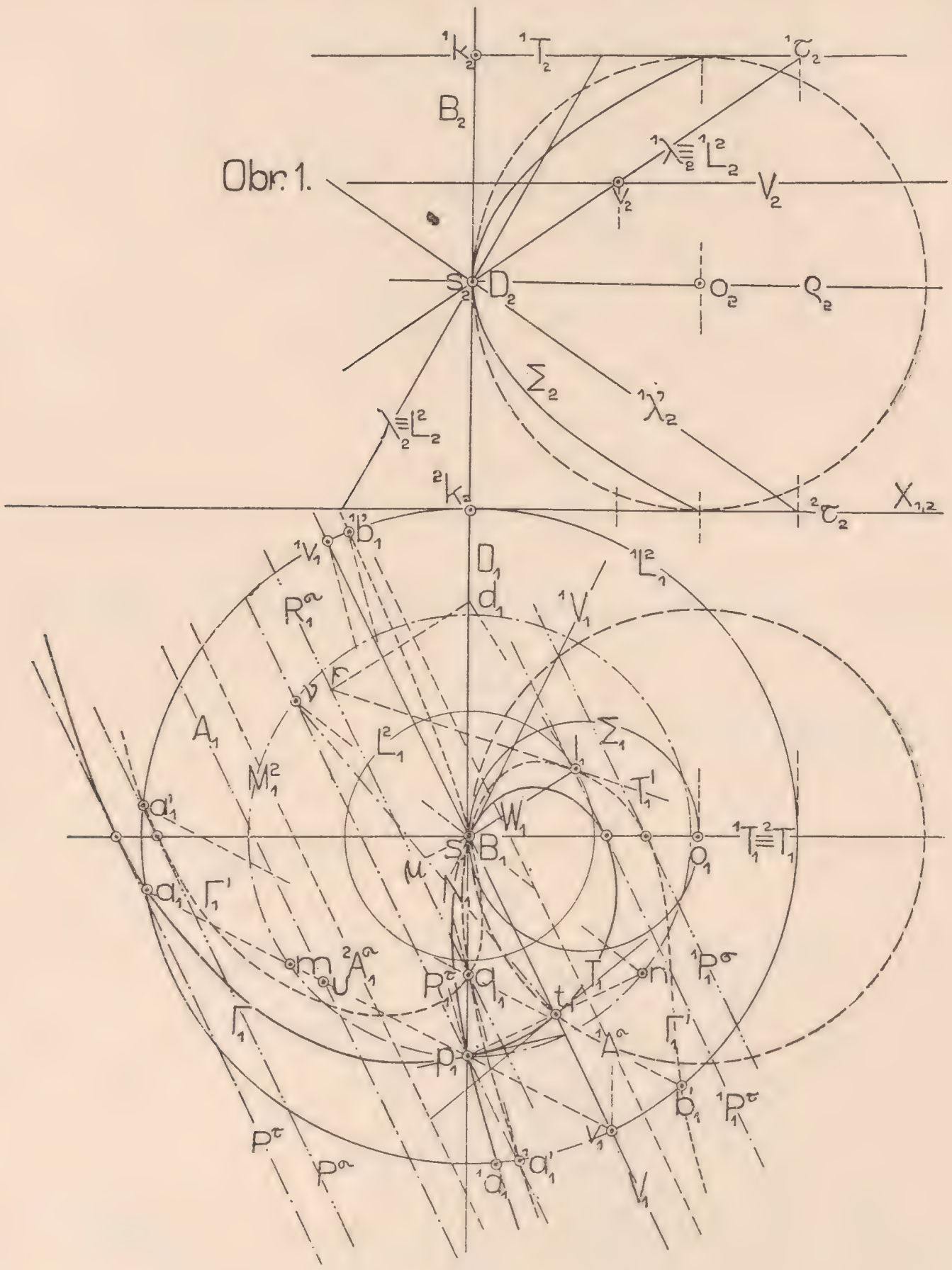
Dans le plan horizontal $\varrho \parallel \pi$, qui passe par le centre de la sphère, le conoïde contient une génératrice double D; par suite, ce conoïde est rationnel. Les plans tangents ${}^1\tau$, ${}^2\tau$ de la sphère $\mathbf{K}^2$, qui sont parallèles au plan π, sont les plans torsaux, dont les sommets ${}^1k\ {}^2k$ se trouvent sur B et les génératrices singulières sont ${}^1T$, ${}^2T$. Les deux autres sommets se trouvent aux points circulaires du plan horizontal sur sa droite à l'infini A_∞, qui est aussi la directrice rectiligne de la surface gauche. Les plans torsaux qui appartiennent à ces sommets sont les plans minimaux passant par la droite B et leurs droites à l'infini, ${}^+J$ et ${}^-J$, sont les génératrices singulières du conoïde. Le conoïde touche la sphère le long de la courbe gauche du quatrième degré nomée la fenêtre de Viviani. Un plan quelconque λ qui passe par la génératrice double D coupe la surface en une ellipse L^2, dont la projection horizontale est le cercle $L^2{}_1$, au centre B_1. Donc, cette surface est, de même, surface des normales du cylindre de révolution à la base $L^2{}_1$, construite le long de sa section elliptique L^2.

La section du conoïde par le plan tangent τ, contennant la génératrice V, a pour projection horizontale Γ_1 une courbe circulaire du troisième

degré, dont le point B_1, est le foyer et dont le point double est le point ϕ_1, projection horizontale du point d'intersection $\phi \equiv (\tau\, D)$. On en déduit que Γ_1 est la cissoïde du cercle M_1^2 dont le point B_1 est le centre et $\overline{B_1\, \phi_1}$ le rayon et de la droite A_1, symétrique de V_1 par rapport à ϕ_1, pour le pôle ϕ_1.

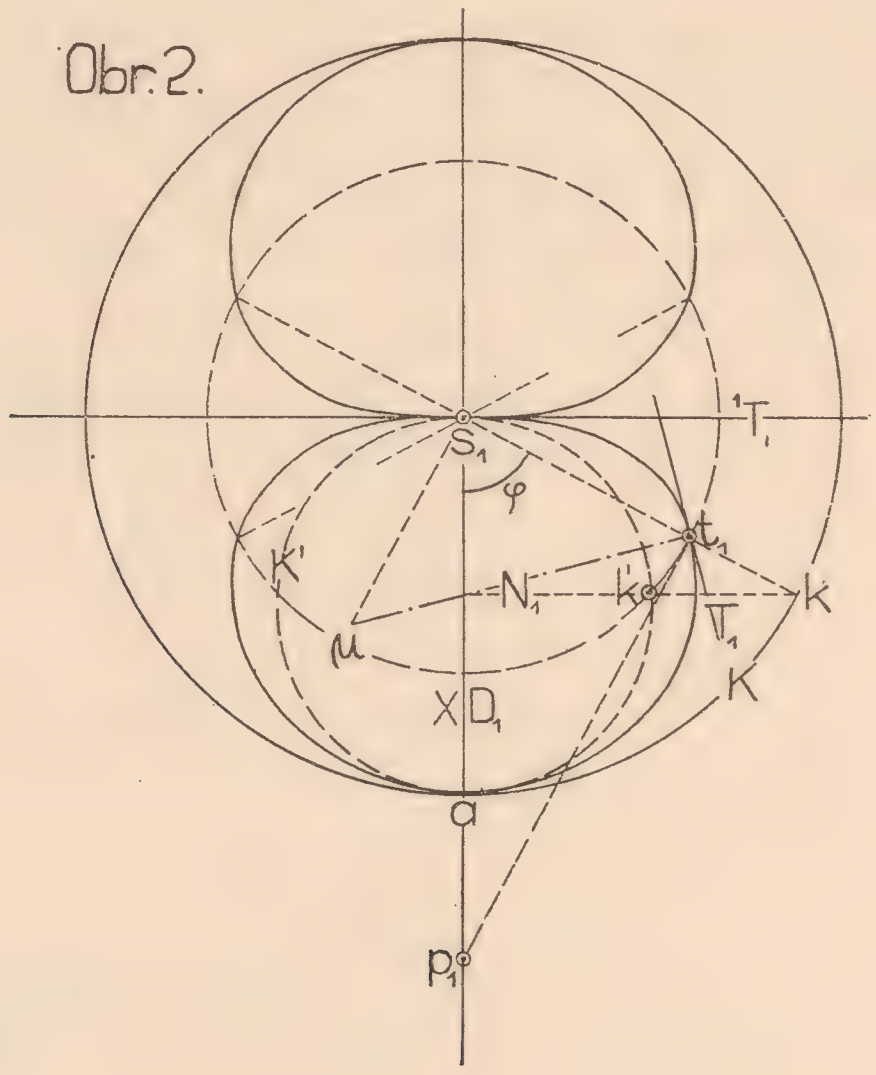
Le conoïde a trois plans de symétrie, à savoir ϱ et les plans qui passent par la droite B, dont l'un est perpendiculaire et d'autre parallèle au plan vertical de projection. Le point s est le centre du conoïde.

Obr. 1.



La courbe Γ_1 coupe la droite V_1 au point t_1, projection horizontale du point de contact t du plan τ avec le conoïde, et t_1 est le pied de la perpendiculaire abaissée du point ϕ_1 à V_1. En se basant sur la construction de la normale N_1 au point t_1 de la cissoïde, on détermine la projection horizontale T_1 de la tangente osculatrice (asymptotique) T au point t du conoïde. La normale N_1 découpe, sur la normale $s_1\, \mu$ au vecteur $\overline{s_1\, t_1}$, une longueur égale à la moitié de $\overline{\phi_1\, t_1}$ ce qu'on utilise pour déduire l'équation de la projection horizontale des courbes asymptotiques du conoïde.

Si l'on choisit dans le plan horizontal de projection le système de coordonnées polaires de sorte que s_1 soit l'origine et l'axe $X \equiv D_1$, voici

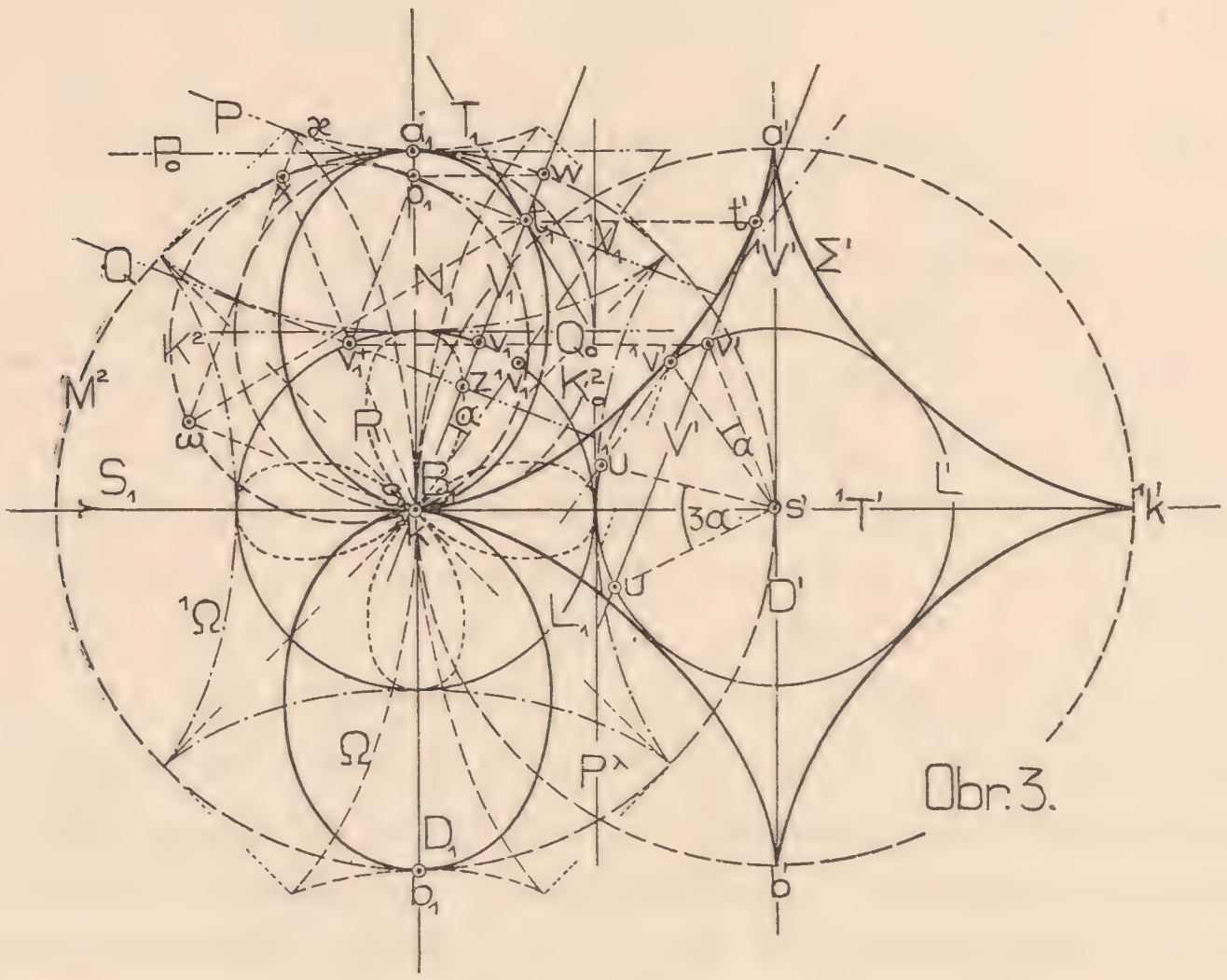


l'équation de la projection horizontale des courbes asymptotiques:

$$\varrho^2 = a^2 \cos \varphi$$

ou dans le système orthogonal

$$(x^2 + y^2)^3 = a^4 x^2.$$

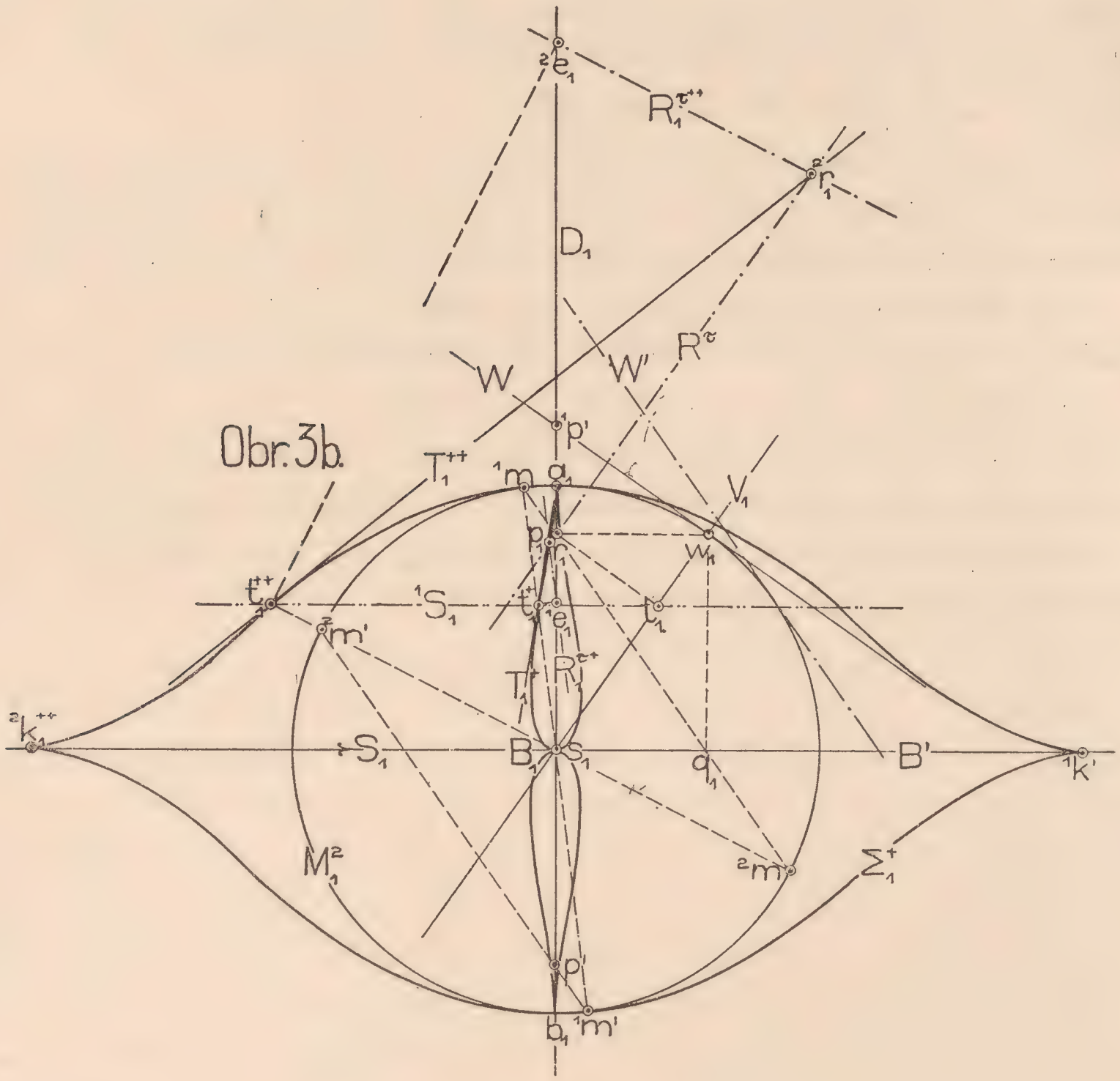


Ce sont des courbes tricirculaires du sixième ordre (fig. 2), qui ont, à l'origine s_1 un point double tangentiel, en lequel la tangente se confond

avec la projection horizontale deux génératrices singulières. Suit la construction de points de la courbe; le rayon de courbure au sommet est $\frac{2}{3}\,a$.

Ensuite, on construit la projection horizontale Γ_1' de la section d'un plan quelconque σ (fig. 1.) à l'aide de la section plane avec le plan tangent τ qui est parallèle à σ. Γ_1' est une courbe circulaire du quatrième ordre, le foyer est s_1; on détermine les tangentes au point double, les asymptotes et la tangente au point arbitraire l_1.

On obtient de courbes intéressantes, si l'on éclaire la surface par les rayons lumineux S parallèles au plan de symétrie $(o\,B)$. Soit s' l'ombre



portée par le centre s sur le plan horizontal de projection (fig. 3). Sur la surface gauche il existe une ellipse L dont l'ombre portée sur le plan horizantal de projection π est la circonférence L'. Le plan λ de l'ellipse L passe par la droite D et il est conjugué harmonique au plan $\varrho \parallel \pi$ par rapport au plan lumineux passant par la droite D et le plan $(D\,B)$. Donc la trace horizontale P^{λ} divise la distance $\overline{s_1\,s'}$ en deux parties égales. Les circonférences L_1 et L' ont les rayons égaux à r.

L'ombre portée Σ' de la surface sur le plan horizontal de projection est une hypocycloïde, engendrée par un point de la circonférence du cercle au rayon $\frac{r}{2}$, qui roule sur la circonférence intérieure du cercle au rayon

2 r. $\boldsymbol{\Sigma}'$ est symétrique à D' et à ${}^1T'$ et possède, sur ces droites, des points de rebroussement a', b', ${}^1k'$ et ${}^2k'$.

La projection horizontale $\boldsymbol{\Sigma}_1$ de la ligne d'ombre propre est une courbe dont l'équation est, dans le système polaire qui a le pôle s_1 et l'axe D_1:

$$\varrho = 2\,\mathrm{r}\cos^2\varphi$$

dite la courbe de deux oeufs (Doppeleilinie). Cette courbe est la polaire d'une aequidistante $\boldsymbol{\Omega}$ de l'asteroïde, le point double tangentiel s étant le pôle. La courbe de deux oeufs $\boldsymbol{\Sigma}_1$ est aussi une partie de la conchoïde de la rosace à quatre branches R, son centre étant pris comme pôle.

La surface possède encore une courbe $\boldsymbol{\Sigma}^+$ d'ombre portée par la surface sur elle même qui est du 12e ordre. Voici la construction de la projection horizontale $\boldsymbol{\Sigma}_1^+$ qu'on en déduit (fig. 3 b).

On abaisse, d'un point arbitraire w_1 du cercle $M_1{}^2$ au centre s_1, les perpendiculaires aux axes D_1 et B' ; soient p_1, q_1 les pieds de ces perpendiculaires ; abaissons, de plus, du point p_1 la perpendiculaire au rayon $s_1\,w_1$. Par le pied t_1 de cette dernière perpendiculaire on mène la droite ${}^1S_1 \parallel S_1 \equiv B'$, qui rencontre les rayons $s_1\,{}^1m$ et $s_1\,{}^2m$,où ${}^1m$ et ${}^2m$ sont les points d'intersection de la diagonale $p_1\,q_1$ avec le cercle $M_1{}^2$, aux points t_1^+ et t_1^{++} de la projection horizontale $\boldsymbol{\Sigma}_1^+$ de l'ombre portée par la surface sur elle-même. Cette courbe est symétrique par rapport aux axes D_1, B', et possède le point double tacnodal s_1 et deux points de rebroussement ${}^1k'$, ${}^2k_1^+$ On construit aussi les tangentes en des points arbitraires t_1^+, t_1^{++}.

On the Relation of Blood-Sugar to Physical Training and Mental Work.

By

V. SUK,

M. D., Ph. D., Professor, Masaryk University, Brno, Czechoslovakia.

Presented the 20th November 1925.

In the course of investigations on bodily changes in students after physical training and strenuous mental work the writer made several hundred blood examinations with the end in view to determine exactly the structural and chemical changes of blood after a certain ammount of work, mental as well as physical. The respective physiological, anthropometric and medical observations will be published in a separate paper, the present communication deals with the chemical blood examination only, i. e. with the determination of blood sugar in three groups of students. It is a well known fact that the quantity of the blood-sugar depends on the whole metabolism of the body, but the respective numerous factors are still undetermined and the mutual influences unkown; the pancreas with its islands of Langerhans, the secretion of the posterior lobe of the pituitary gland, the suprarenal glands, the thyreoid, the glycogenic function of the liver and the influence of the nervous system are amongst the items. Now, it has been shown that the blood-sugar of the normal individual varies between 0·06 and 0·12 % and that the respective individual figure is almost constant provided that the relative factors, meals, fasts, muscular work etc. are the same. It was now of interest to examine the sugar content of the blood before and after physical training and the same before and after mental work. But this of course was only possible with the recently devised microchemical methods of determining the sugar content; they work exactly and allow an estimation of almost infinitesimal quantities. The method used for this investigations was the well known one of Ivar Bang but with Frejka's Modification as described below.

The following three groups of students were examined:

Group I.: University students, Teachers' College for Physical Education; they were examined before and after the summer training which lasts about three months. During this summer term the students visit very few theoretic university lectures, most of the time is spent in the open or in the covered gymnasiums with physical training, gymnastics and all sorts of sport. In the course of this summer training there is very little mental work.

All of the examined were males, average age 22 years.

For the sake of brevity we shall call this group: "Group I.".

Group II.: High School (classical college, on the Continent generally called gymnasium), Students from the eighth class studying very hard for their final examination to get their certificate of admission to the university. The last three months before the end of the term they had practically no physical training, no sports etc., they had to spend the whole time in strenuous mental work, "hard plodding" or "digging" as it is called in America.

They were examined the first time three months before their final school examinations and the second time after three months on the last day of their respective final examination.

All of them were males, average age 19 years.

We shall call them "Group II.".

Group III.: High School students, the same school as before but the seventh class, i. e. the last but one. They had before the end of the term very much mental work, not as much "plodding" as the eighth class, still, the last three months require strenuous studying and the students have during this time very little time for physical training or sports etc. All of them were males, average age 18 years.

Thus we have three groups of students, group I., university students with three months hard training and groups II. and III., high school students, with three months strenuous mental work. All the examined students belonged to about the same social milieu and were living practically under the same average conditions; they were every one of them examined medically by the writer with the utmost care and cases with the slightest indications of any trouble were excluded. Hence we had individuals in normal state of health. The examination took place in all cases in the afternoon several hours after meal and when perfectly rested. This was of course essential for the different physiological examinations and the more for the determination of the changes of blood. The method of obtaining blood was in all cases the same i. e. by venous puncture, and the part from which it was taken was the median basilic vein, but the bandage around the arm was loosend the very moment the blood began to drop. This is very important in order to avoid any congestion of blood which might introduce an error into the work, especially with regard to the structural changes.

The method selected for the microchemical determinations, after many preliminary trials, was the Bang-Frejka method, i. e. the older well known Bang's method[1]) but with different modifications as devised by J. Frejka, Professor of Organic Chemistry in our Faculty. As this method has not yet been published in English it seems necessary to state the whole process of determining according to this new method; after an experience of three hundred determinations the writer may be permitted to say that the method concerned holds good for an exact determination of even slight differences in the content of blood-sugar.

Bang-Frejka's method:

Solutions necessary. Nr. 1. Alkaline Copper Solution. Dissolve 100 *gr* of potassium bicarbonate in about 700 c. c. of water and transfer to a liter flask; add 100 c. c. of a 4·4 % copper sulfate solution, mix well and also add 60 grams of potassium-chloride and 100 grams of potassium carbonate. When everything is properly dissolved, add water to make up to a volume of 1 liter.

Nr. 2. Potassiumchloride-uraniumacetate solution. Dissolve 440 grams of potassiumchloride in 1 liter of water, add 3 grams of finely pulverised uraniumacetate and 1·5 c. c. of 25 % hydrochloric acid, mix and make up to a volume of 2 liters.

Nr. 3. Potassiumiodate solution, 2 per cent.; dissolve 2 grams of potassium iodate in water and make up to a volume of 100 c. c.

Nr. 4. Decinormal hydrochloric acid (it is very important to have a carefully prepared and accurate solution).

Nr. 5. Potassium iodide cryst.

Nr. 6. Starch solution. Dissolve 1 gram of starch in 10 c. c. of water and add to this a 30 per cent solution of potassiumchloride up to a volume of 100 c. c. The solution is durable.

Technic.

Transfer about 10 c. c. of solution Nr. 2 to a 25 c. c. volumetric flask with ground stopper and weigh minutely on the analytical balance of 0·1 mg sensibility; add to this from 10 to 12 drops of fresh blood (about 0·5 c. c.) and weigh once more, the difference between the two weighings being the weight of blood to be analysed. Mix well, fill with solution Nr. 2. up to a volume of 25 c. c. and let stand for at least 1 hour; in the course of our investigations these blood-mixtures were left over night and the next morning we set to work on the sugar determinations as follows: the mixture is poured upon a dry analytical filter of 6 *cm* diameter and the perfectly clear filtrate collected in a dry flask. Then transfer 10 c. c. of this filtrate to a 50 c. c. boiling-flask, add 2 c. c. of solution Nr. 2. and 3 c. c. of solution Nr. 1, place the boiling-flask over a gas burner on wire gauze covered with asbestusplate, this plate having a circle cut in it of the same diameter

---

[1]) See references.

as the bottom of the boiling-flask so as to fit it exactly. Now heat the mixture and regulate the gas-flame to ensure that the mixture starts boiling after 1½ minutes, which is of importance. To this end use a gas gauge or a simple V-shaped gas-indicator of glass tubes filled with water and mark on it the respective height of the water column, the height being determined by one or two preliminary trials. Keep the mixture boiling for exactly two minutes more and then transfer at once to a cold water bath and let it cool. While removing the boiling flask from the gas jet it is of the utmost importance to introduce in it a bent thin glass tube connected with a carbonic acid feeding apparatus so that the very moment

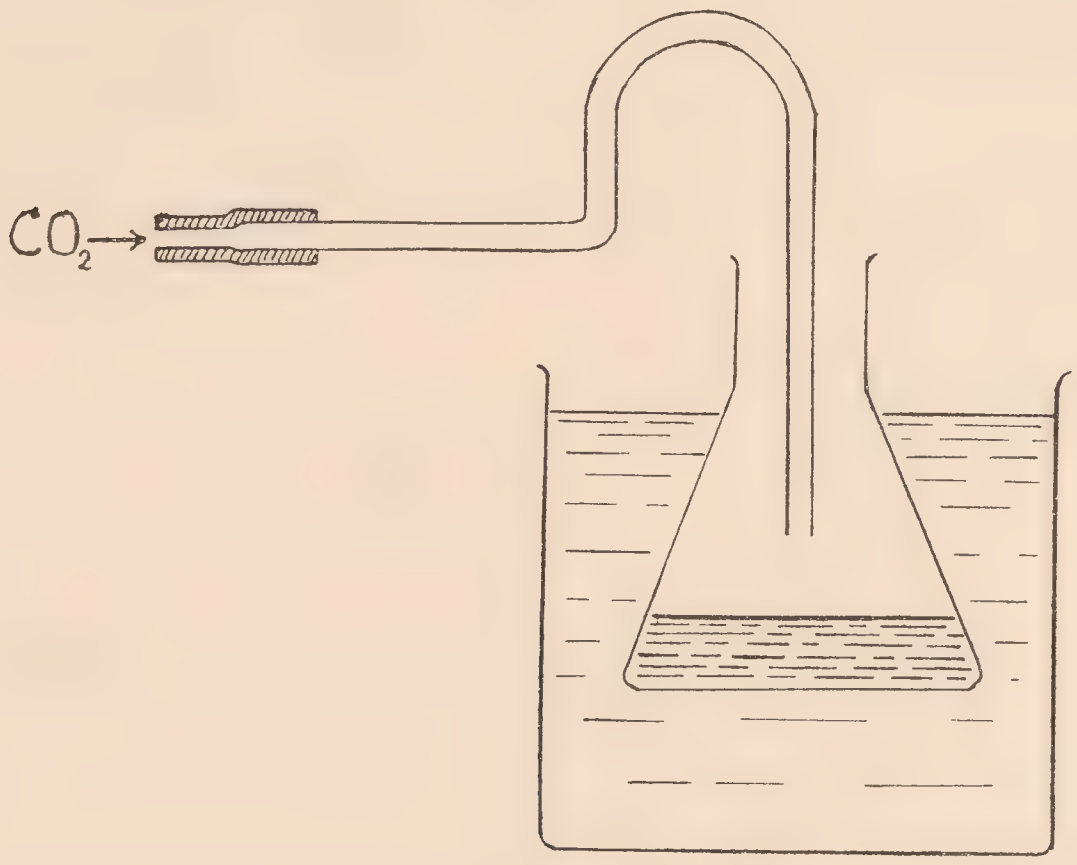


Fig 1. The connection of the boiling-flask with the carbonic acid feeding apparatus.

the flask is removed from the heat the carbonic acid is conveyed into the flask; the end of the glass tube must not touch the surface of the liquid. Fig. 1. Remove the perfectly cooled flask from the bath, add two to three drops of the starch solution (solution Nr. 6.) and titrate quickly with n/200 Iodine solution; it is essential that adequate attention be given to the proper mixing of each drop of the titration liquid. Titrate to a distinctly light blue coloration, the original color being light green. The necessary n/200 Iodine solution is prepared as follows: Dissolve in a 100 c. c. volumetric flask about 2 grams of potassium iodide in about 20 c. c. of water, add to this 2 c. c. of solution Nr. 3. and then exactly 5 c. c. of decinormal hydrochloric acid. Make up to a volume of 100 c. c. This solution is not stable and has to be prepared every day anew.

Repeat the whole process with the remaing 10 c. c. of filtrate and take the average of both titrations.

Calculation. This is very simple. The amount of c. c. of the n/200 Iodine solution used in the titration gives us in the table Nr. 1. the corresponding amount of glucose, and this has to be multiplied by $^5/_2$ ($^{25}/_{10}$) to get the

sugarcontent of the respective blood quantity. The amount of glucose in percents is then calculated according to the following formula:

$$\frac{\text{sugar content of the respective blood quantily} \times 100}{\text{total weight of the particular blood sample.}}$$

TABLE Nr. 1.

Determination of glucose according to Bang.

I n/200 J c. c.	II Glucose mg	I. n/200 J c. c.	II. Glucose mg
0·30	0·05	1·70	0·40
0·40	0·07	1·80	0·42
0·50	0·10	1·90	0·45
0·60	0·12	2·00	0·47
0·70	0·15	2·10	0·50
0·80	0·17	2·20	0·52
0·90	0·20	2·30	0·55
1·00	0·22	2·40	0·57
1·10	0·25	2·50	0·60
1·20	0·27	2·60	0·62
1·30	0·30	2·70	0·65
1·40	0·32	2·80	0·67
1·50	0·35	2·90	0·70
1·60	0·37	3·00	0·72

Altogether the writer made over 300 blood-sugar determinations and from this number 270 can be used for the present investigation.

The results of these numerous determinations of the sugar content of the blood in the three groups of young men are very interesting and are shown in the following representation

Figure 2. illustrates graphically these results and summing up we may state the following facts:

1. The Group I. of 30 young men, University Students, had at the beginning of these investigations an average sugar content of the blood 0·078 (57 microanalytical determinations) and after three months hard training with practically no mental work at all the determinations show us almost the same figure, 0·077 (58 determinations), *the sugar content did not change at all.*

2. The Groups II. and III. although they have been examined separately might for comparison be well taken together. We have then 48 young men, high school students, with a sugar content of 0·086 and 0·084 respectively at the beginning of these investigations and after an

equal interval of three months with practically no physical training whatever but very strenuous and continual mental work, 32 of the whole lot (the remaining 16 failed to come to the second examination) *show a remarcable decrease of the sugar content to 0·062 in both groups* (62 determinations), i. e. by 38 % and 36 % respectively!

GROUP:	AVERAGE PERCENTAGE OF BLOOD-SUGAR: → 0,05 0,06 0,07 0,08 0,09	NUMBER OF CASES:	NUMBER OF BLOOD-SUGAR DETERMINATIONS
I.	0,078 0,077	30 29	57 58
II.	0,086 0,062	21 18	40 35
III.	0,084 0,062	27 14	53 27

1st DETERMINATION
2nd " AFTER 3 MONTHS.

Fig. 2. Sugar content of the blood. Three groups of students I. with three months physical training, II. and III. with the same period of mental work.

3. All of the examined and in the present investigation included students were in normal state of health, at the beginning as well after the interval of three months, individuals with symptoms of pathologic conditions being excluded.

The following tables 1. and 2. show the detail figures of both determinations of the sugar content in all Groups.

Table 1 gives us the figures of the Group I., University students with three months physical training. For the first determination we had 30 individuals, for the second one 29. Both determinations compared show the following very interesting discrepancies:

1. we had 14 individuals with increase of the sugar content, the average being 10·07 percentage-units, and

2. 14 individuals with decrease of the sugar content, the average being 10·57, thus we had the same number of cases of decrease as well as increase and the respective differences show almost the same average figure,

TABLE I.

First and second determination of the sugar content in Group I. (Detail figures).

Record Nr.	First Determination	Second Determination after three months	The second determination shows		
			increase	decrease	no change
1	77	65	—	8	
2	80	65	—	15	
3	72	87	15	—	
4	72	77	5	—	
5	85	61	—	24	
6	78	91	13	—	
7	95	70	—	25	
8	83	80	—	3	
9	92	99	7	—	
10	78	72	—	6	
11	—	—	—	—	
12	91	74	—	17	
13	85	80	—	5	
14	—	—	—	—	
15	—	—	—	—	
16	63	80	17	—	
17	76	90	14	—	
18	85	75	—	10	
19	71	82	11	—	
20	89	85	—	4	
21	63	80	17	—	
22	75	83	8	—	
23	78	84	6	—	
24	73	72	—	1	
25	72	—	—	—	
26	63	73	10	—	
27	76	76	—	—	no change
28	74	80	6	—	
29	78	68	—	10	
30	68	70	2	—	
31	79	67	—	12	
32	83	75	—	8	
33	78	88	10	—	
Number of cases:	30	29	14	14	1
Average:	78	77	10·07	10·57	
Standard Deviation:	8·09	8·55			

TABLE II.

First and second determination of the sugar content in Group II and III

(Detail figures)

Record Nr.	First Determination	Second Determination after three months	The second determination shows		
			increase	decrease	
		Group II.			
1	106	—	—	—	
2	89	75	—	14	
3	93	53	—	40	
4	79	85	6	—	
5	64	62	—	2	
6	79	59	—	20	
7	70	—	—	—	
8	94	82	—	12	
9	85	68	—	17	
10	96	62	—	34	
11	87	62	—	25	
12	84	—	—	—	
13	101	76	—	25	
14	88	47	—	41	
15	95	62	—	33	
16	89	47	—	42	
17	82	53	—	29	
18	94	51	—	43	
19	69	84	15	—	
20	—	—	—	—	
21	—	43	—	—	
22	82	51	—	31	
23	83	—	—	—	
Number of cases:	21	18	2	15	
Average:	86	62	—	27	

Record Nr.	First Determination	Second Determination after three months	The second determination shows		
			increase	decrease	
		Group III.			
1	76	49	—	27	
2	120	—	—	—	
3	90	73	—	17	
4	57	—	—	—	
5	86	68	—	18	
6	82	—	—	—	
7	73	—	—	—	
8	89	—	—	—	
9	88	—	—	—	
10	81	69	—	12	
11	86	55	—	31	
12	93	80	—	13	
13	81	—	—	—	
14	85	—	—	—	
15	89	53	—	36	
16	75	56	—	19	
17	76	69	—	7	
18	66	59	—	7	
19	69	63	—	6	
20	81	—	—	—	
21	100	—	—	—	
22	118	50	—	68	
23	83	—	—	13	
24	—	—	—	—	
25	76	—	—	—	
26	79	—	—	—	
27	83	57	—	26	
28	—	—	—	—	
29	94	—	—	—	
Number of cases:	27	14	—	14	
Average:	84	62	—	22	

3. 1 individual with no change at all.

With regard to the equalness of increase and decrease of the sugar content it is of interest to state that the standard deviation found from the both series of determinations is practically the same, 8·09 and 8·55 respectively. Therefore we may perhaps say that in both series of determinations the approved Bang-Frejka's method worked true and that also the range of individual variation was the same.

Now table 2 with the detail figures of Group II. and III., — students with three months mental work — shows quite different features. The determinations in the Group II. and III. disclose such an striking conformity of results that without doubt the respective average figures illustrate exactly the differences between the sugar content at the beginning and that after three months interval.

The details of this table are plain. With the only two exceptions (Case Nr. 4 and 19 of the Group II.) with an increase of the sugar content, *all the remaining data on weight in both groups, i. e. 30 out of 32 show a marked decrease of the sugar content after an interval of three months. Both groups II. and III. were students with mental work, whereas Group I. were 30 students with physical work.*

The writer does not hesitate to accentuate, that in his opinion *this considerable decrease of the sugar content is due to mental work.* In connection with this it is of much interest to state, by way of parenthesis, that the enumeration of erythrocytes discloses something quite different. The data obtained are arranged in the following form:

The number of red corpuscles

by groups:

	Number of cases	Average Number of Erythrocytes
Group I. Students with physical training		
First counting	29	4·5 mill.
Second counting after three months physical training	29	4·8 ,,
Group II. and III. Students with mental work		
First counting	31	4·8 ,,
Second counting after three months mental work	31	4·8 ,,

In the Group I. we see a decided increase following three months physical training, on the other hand no change at all in the Group II. and III.

Without doubt, the higher count of 0·3 mill. erythrocytes in the Group I. is due *to new formation of corpuscles and thus increasing the aëration surface, very important for physical work*; the well known fact of increase following change of residence to higher altitudes is a similar item and not very difficult to understand.

Quite a different task is to explain the well marked decrease by 36—38% of sugar content of the blood after three months of sedentary life with strenuous mental work. Before all we have to state that the urine of all cases has been examined by the ordinary laboratory tests but no dextrose has been detected. We know that the renal threshold for sugar varies considerably in different persons, and even under various conditions, but apparently this did not change at all. Now with regard to the usual tests of the tolerance for sugar it is important to remember, that the resulting hyperglycemia after administering 100 grams of glucose rapidly subsides, the sugar content of the blood reaching normal values after a couple of hours in other words the *normal organism does away with any deviation from the normal very quickly*. In our series of cases we have in 30 individuals out of 32 a decrease of 36—38% of the sugar content. As stated before, the examination took place under the same conditions, i. e. in the afternoon, several hours after meal, at complete rest, but of course, the examination lasted several days, from 4 to 6 persons. being examined daily. This small interval of a few days is of no consequence, because all of them were examined *before the beginning of the summer vacations, therefore before the end of the physical training and mental work respectively.*

It is very difficult to arrive at a definite explanation of this interesting fact, the respective factors important for the amount of sugar in the blood being almost inextricabelly connected. According to the writer's opinion the results of the present investigation show clearly that *mental work does affect the whole metabolism of the body and that the degree of this influence is quite considerable.*

W. B. Cannon in his book on "Bodily Changes" has shown that powerful emotions may produce glycosuria and this glycosuria may be considered as evidence of increased sugar in the blood. Now, since Cl. Bernard's time we know the influence of the nervous system, but in connection with this it is of utmost importance to state, that the so called Cl. Bernard's piqûre was without effect in badly fed or fasting animals and that in such cases the post mortem examination has shown a liver practically without glycogen (Dock's and Naunyn's experiments).[2])

Then perhaps it is not to far fetched to state that the remarcable decrease of sugar content in the Group II. and III. of our students *is due to scarcity of glycogen in the liver, and that one of the causes is the influence*

---

[2]) See Abderhalden, ref. Nr. 5.

of the nervous system on the glycogenfunction of the liver. We say with intention *one* of the causes for as Abderhalden says: "einer der grössten Fehler in der Erforschung bestimmter Funktionen ist ohne Zweifel der, dass fast gewaltsam versucht wird, eine einzige Möglichkeit für ihre Erklärung festzulegen", and the question in itself dissolves into many different parts.

In the present paper we have shown the difference between the influence of strenuous mental work and physical training on the content of sugar in the blood, our remaining anthropometric, medical and physiological investigations, to be published presently, confirm this statement and we might be permitted to say, that the modern extremists' teachings on the equality of manual labour and intellectual work are completely wrong. Our investigations point quite to the contrary and this might account for so many instances so often met with, that intellectual workers, well nourished, hardy, strong and able to bear fatigue suffer more from different smaller ailments colds etc. and some disorders of metabolism than the ordinary labourer.

REFERENCES.

1. Ivar Bang, Der Blutzucker, Wiesbaden 1913.

2. J. Frejka, Stanovení glukosy mikroanalysou. Časopis českých lékařů 1918, str. 738, 753.

3. J. Frejka, Mikroanalytické stanovení glukosy redukčními methodami Lékárnické listy XVII.

4. Walter B. Cannon, Bodily Changes in Pain, Hunger, Fear and Rage New York and London, 1923.

5. E. Abderhalden, Physiologische Chemie, Berlin 1923.

Quelques remarques sur les points à coordonnées entières à l'intérieur d'un cercle.

Par

VOJTĚCH JARNÍK.

Présenté le 6me Octobre 1925.

Soit, pour $x > 0$, $A(x)$ le nombre des points à coordonnées entières („Gitterpunkte"), situés à l'intérieur du cercle $u^2 + v^2 = x$ et sur sa circonférence. Posons

$$P(x) = A(x) - \pi x,$$

$$\Phi(\gamma) = \frac{1}{3\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U^2(n)}{n^{3/2}} \cos(2\pi\sqrt{n}\,\gamma) \qquad (\gamma \text{ réel}),$$

$U(n)$ étant le nombre des points à coordonnées entières situés *sur* la circonférence $u^2 + v^2 = n$. On doit à M. M. Hardy, Cramér et Landau[1]) des résultats fort intéressants concernant la valeur asymptotique de l'intègrale $\int_0^y P^2(x)\,dx$ pour grandes valeurs de y. Le résultat le plus précis, dans cet ordre d'idées, est dû à M. Landau:

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\int_0^y P^2(x)\,dx = \Phi(0)\,y^{3/2} + O(y^{1+\varepsilon}).$$

En suivant la voie indiquée par M. Landau, on peut démontrer le théorème un peu plus général suivant:

Pour chaque $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$ *et pour chaque* $\varepsilon > 0$, *on a*

$$(1) \qquad \int_0^y P((\sqrt{x}+\alpha)^2)\,P((\sqrt{x}+\beta)^2)\,dx = \Phi(\alpha-\beta)\,y^{3/2} + O(y^{1+\varepsilon}).$$

La méthode de la démonstration est la même que celle de M. Landau, mais elle exige quelques calculs complémentaires; on en trouve une exposition détaillée dans le § 1 de mon Mémoire original.[2])

---

[1]) Hardy, The average ordre of the arithmetical functions $P(x)$ and $\Delta(x)$, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 15 (1916), p. 192—213; Cramér, Über zwei Sätze des Herrn G. H. Hardy, Mathem. Zeitschrift 15 (1922), p. 201—210; Landau, Über die Gitterpunkte in einem Kreise IV, Göttinger Nachr. 1924, p. 58—65.

[2]) Několik poznámek o mřížových bodech v kruhu, Rozpravy Č. Ak., t. 34., (1925), no 27.

Posons $Q(x) = \frac{P(x^2)}{x^{1/2}}$; on tire facilement de (1) l'équation

$$\int_1^y Q(x+\alpha)\, Q(x+\beta)\, dx = \tfrac{3}{2}\, \Phi(\alpha-\beta)\, y + O(y^{\varepsilon});$$

il s'ensuit immédiatement que

$$(2) \qquad \int_1^y (Q(x) \pm Q(x+\alpha))^2\, dx = 3\,(\Phi(0) \pm \Phi(\alpha))\, y + O(y^{\varepsilon}).$$

On doit à M. Landau[3]) le théorème suivant:

Il existe deux nombres $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ *tels que, pour tout* $\tau > 1$, *chacune des deux inégalités* $Q(x) > K_1$, $Q(x) < -K_1$ *peut être satisfaite par une certaine valeur de* x, *située dans l'intervalle* $\tau < x < \tau + K_2$; alors: On peut trouver dans chaque intervalle $\tau < x < \tau + K_2$ $(\tau > 1)$ deux nombres x_1, x_2 tels que

$$(3) \qquad Q(x_1) - Q(x_2) > 2\,K_1.$$

On peut tirer de l'équation (2) quelques conséquences presque immédiates qui nous fournissent un pendant de la formule (3).

Théorème 1er: *La relation*

$$\int_1^y (Q(x) - Q(x-\alpha))^2\, dx = o(y)$$

n'est satisfaite pour aucun $\alpha > 0$.

La démonstration est immédiate: elle est fournie par ce fait presque évident que l'on a $\Phi(\alpha) < \Phi(0)$ pour tout $\alpha > 0$.

Corollaire (conséquence immédiate du théorème 1er): *La relation* $Q(x) - Q(x+\alpha) = o(1)$ *n'est satisfaite pour aucun* $\alpha > 0$.

Théorème 2e: *A tout nombre* $\delta > 0$ *on peut faire correspondre un nombre* $l = l(\delta) > 0$ *jouissant de la propriété suivante: soit* a *un nombre positif quelconque; on peut trouver un nombre* α *avec* $a < \alpha < a + l(\delta)$ *tel que*

$$\int_1^y (Q(x) - Q(x+\alpha))^2\, dx < \delta\, y$$

pour tout $y > y(\alpha, \delta)$.

Démonstration: $\Phi(\gamma)$ étant défini par une série des fonctions périodiques absolument et uniformément convergente, on voit d'après un théorème de M. H. Bohr[4]) que la fonction $\Phi(\gamma)$ est une fonction quasi-

---

[3]) Über die Gitterpunkte in einem Kreise V, Göttinger Nachrichten 1924, p. 135—136. M. Landau a énoncé ce théorème sous une forme un peu différente, mais complètement équivalente à celle donnée par nous.

[4]) Zur Theorie der fast periodischen Funktionen I, Acta mathematica 45, p. 30—127; comparez surtout le corollaire à la page 41. On pourrait démontrer le théorème 2e aussi sans avoir recours à la théorie des fonctions quasipériodiques, à l'aide d'un théorème bien connu de Kronecker.

périodique („fast periodisch") de γ; alors, à chaque $\delta > 0$ on peut trouver un nombre $l = l(\delta) > 0$ tel que, a étant un nombre positif quelconque, il existe un nombre α avec

$$a < \alpha < a + l(\delta), \qquad |\Phi(0) - \Phi(\alpha)| < \frac{\delta}{6};$$

d'où, d'après (2),

$$\int_1^y (Q(x) - Q(x+\alpha))^2 \, dx < \frac{\delta}{2} y + O(y^\varepsilon) < \delta y$$

pour $y > y(\alpha, \delta)$; q. e. d.

Corollaire. *Pour la valeur choisie de* α *et pour* $y > y(\alpha, \delta)$ *on a pour* $1 \leqq x \leqq y$: $|Q(x) - Q(x+\alpha)| < \delta^{1/3}$, *excepté peut-être un ensemble des valeurs* x, *dont la mesure ne surpasse pas* $\delta^{1/3} y$.

Démonstration: Autrement, on aurait

$$\int_1^y (Q(x) - Q(x+\alpha))^2 \, dx > \delta y,$$

ce qui implique une contradiction.

Théorème 3e: *La relation*

$$\int_1^y (Q(x) + Q(x+\alpha))^2 \, dx < \frac{2}{\pi^2} y + o(y) \tag{4}$$

n'est satisfaite pour aucune valeur de $\alpha \geqq 0$.[5])

Démonstration: De (4), on déduirait (en conséquence de (2))

$$\frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U^2(n)}{n^{3/2}} (1 + \cos(2\pi\sqrt{n}\,\alpha)) = 3(\Phi(0) + \Phi(\alpha)) \leqq \frac{2}{\pi^2};$$

la série à gauche étant à termes non négatifs, on aurait a fortiori

$$\frac{U^2(1)}{1^{3/2}} (1 + \cos 2\pi\alpha) \leqq 2,$$

$$\frac{U^2(4)}{4^{3/2}} (1 + \cos 4\pi\alpha) \leqq 2,$$

c'est-à dire

$$\cos 2\pi\alpha \leqq -\tfrac{7}{8} \tag{5}$$

$$\cos 4\pi\alpha \leqq 0; \tag{6}$$

de (5), on déduirait

$$\cos 4\pi\alpha = 2\cos^2 2\pi\alpha - 1 \geqq 2(\tfrac{7}{8})^2 - 1 > 0,$$

ce qui contredit à (6).

---

[5]) On pourrait remplacer, dans (4), le nombre $\frac{2}{\pi^2}$ par un nombre plus grand; mais cela est sans intérêt pour nous.

Les changements cytologiques postmortaux.

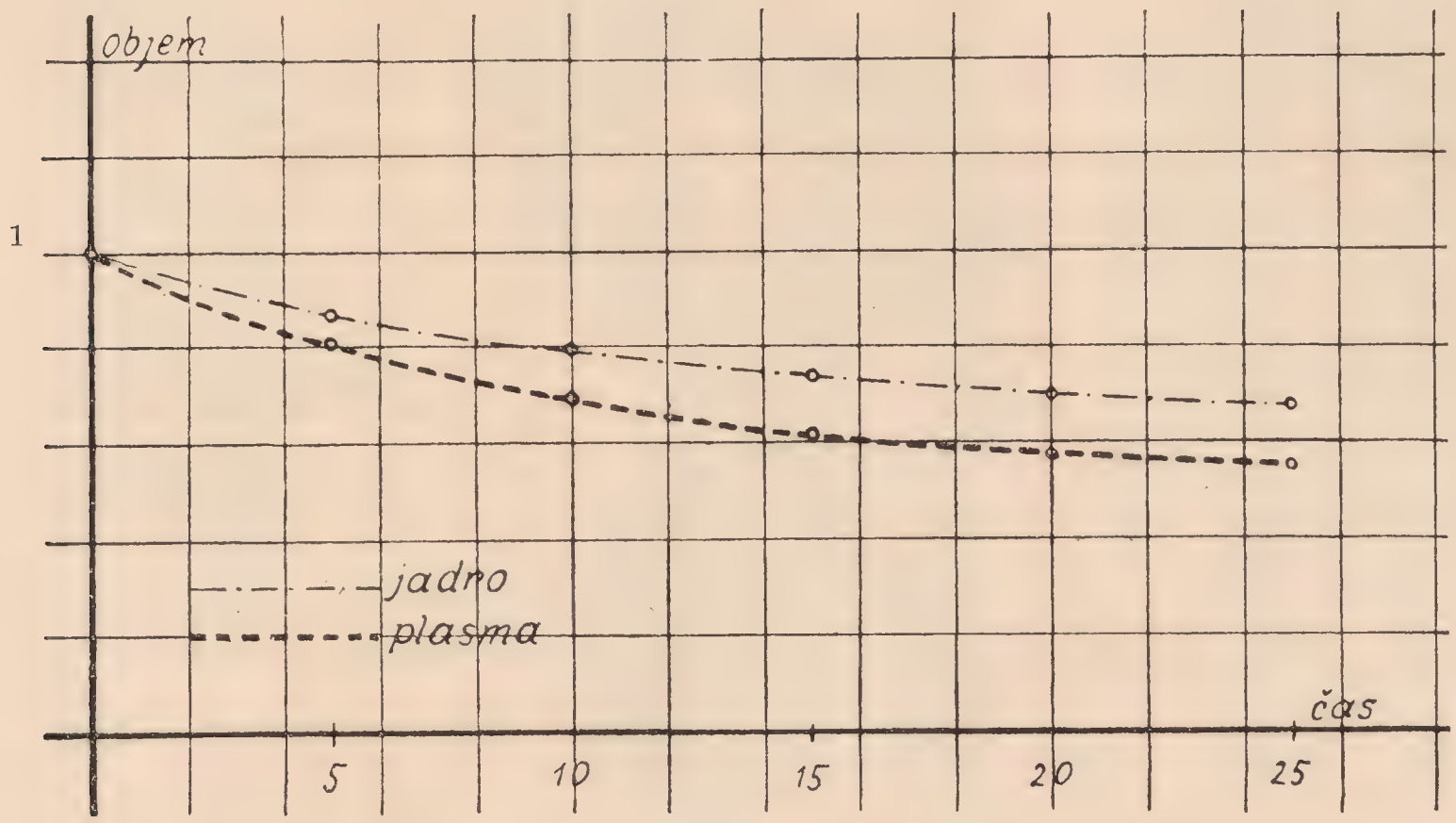
Par
A. J. Chura.

Présenté dans la séance du 6 Octobre 1925.

Pour constater les changements postmortaux dans différents organes, j'ai sacrifié une série des souris blanches mâles et fixé en des stades successifs d'une heure l'estomac, l'intestin grêle, le côlon le foie, le pancréas et la glande surrénale jusqu'à 25 heures post mortem. J'ai fixé les organes par les méthodes de Altmann et de Kolster et coloré d'après Benda, Altmann et par l'hématoxyline de fer.

Il est bien caractéristique que les détails de la structure protoplasmatique apparaissent au premier temps p. m. plus clairement, mais le nombre des chondriocontes diminue. Dans l'estomac on observe les premiers changements dans l'épithélium. Ici les granules se dissolvent et le protoplasma prend une coloration diffuse. Dans d'autres cellules les granules ne se dissolvent pas, mais ils se fusionnent en forme de grumeaux, ou bien ils se transforment en des formations plus ou moins grandes, rondes, grouppées autour du noyau. Dans les cellules des fovéoles ces changements ne font leur apparition qu'un peu plus tard. Dans les cellules adélomorphes les granules se dissolvent. Tandisque dans les cellules adélomorphes les changements les plus profonds apparaissent dans le col et les plus faibles au corps de la glande, les cellules délomorphes se comportent tout à fait au contraire. Dans ces dernières on peut observer aussi des vacuoles. Les cellules s'isolent, les adélomorphes peuvent aussi se fusionner. Les noyaux prennent une coloration plus forte et 4 heures p. m. déjà il se développe une structure typique, où les grumeaux chromatiques se rangent au dessous de la membrane („Radspeichenstruktur" des auteurs allemands). L'épithélium superficiel se détache de la base 7 h. p. m., à ce temps le col des glandes peut être déjà invisible. Les cellules délomorphes desquamées conservent leurs granules assez bien. L'épithélium de la portion cardiaque ne se désagrège que 16 h. p. m. Les noyaux restent plus longtemps visibles que le plasma. — Dans les cellules adélomorphes des vacuoles deviennent plus nombreuses, ou bien des grains très grands se trouvent dans tout le corps cellulaire. Dans les cellules délomorphes les granules diminuent en nombre ou bien ils se dissolvent et disparaissent complètement, ou bien ils perdent leur colorabilité et se transforment en des vacuoles. — Toutes les cellules diminuent

de volume après la mort. Cette diminution fait chez les cellules délomorphes au cours de 10 h. 0·315, après 25 h. 0·445 (pris la surface d'une cellule en coupe fixée a l'état frais comme *1.*) Chez le noyau cette diminution de volume n'est pas si exagérée (0·215. 0.23 resp.) de sorte que sans mésurations précises on pourrait penser que le noyau s'aggrandit après la mort. Naturellement il faut respecter aussi l'influence du liquide fixateur. —



Dans l'intestin grêle les chondriosomes du groupe basal des cellules épithéliales se fusionnent 1 h. p. m. déjà, la cuticule devient très distinctement striée et semble plus haute. Plus tard ce groupe basal entier s'approche du noyau, la cuticule se désagrège en des fibrilles, à sa base on voit une bande très bien visible. Après 3—4 h. on distingue dans la cuticule des cils, au lieu de la bande basale on peut distinguer des corpuscules basaux très nets (P r e n a n t). Les cils sont assez longs, au milieu de leur longueur un peu enroulées, comme le décrit C h a m p y chez les grenouilles pendant la résorption, ou K o e l l i k e r et H e i d e n h a i n sous l'influence d'une solution anisotonique de NaCl. — Les éléments épithéliaux aux vilosités intestinales s'isolent et chaque cellule isolée porte une moitié de la bandelette obturante correspondante. Les chondriosomes s'accolent et s'approchent de la cuticule. Plus haut sur la vilosité les chondriocontes se dèragrégent ou se dissolvent. Dans quelques cellules au sommet de la vilosité des vacuoles apparaissent, leur nombre s'accroît vite, elles remplissent toute la partie surnucléaire de la cellule, en ne laissant qu'une assise étroite au dessous de la cuticule sans formations vacuolaires. Leur production ne dépend pas de la fixation employée. En d'autres cas il n'y a pas des vacuoles, mais le protoplasma se précipite en des grumeaux, dans lesquels on peut trouver encore des granules agglomérés ou leurs restes. Dans les elles cellules des cryptes les vacuoles font défaut, sauf les cellules de Paneth où disloquent les grands grains dont la colorabilité reste longtemps conservée. Mais, même ici, les vacuoles ne sont pas un phénomène fréquent, les granu-

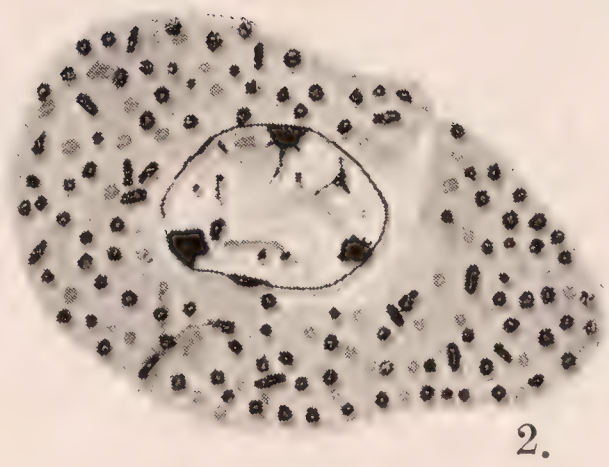
les se colorent de plus en plus légèrement, jusqu'à ce qu'ils disparaissent et il ne reste qu'un réseau protoplasmique à grandes mailles. — Les cellules à mucus peuvent ou bien se gonfler, ou bien se rattattiner, ce qui semble dépendre de la nature physico-chimique du mucus, i. e. s'il peut absorber de l'eau ou non. — Les changements sont le mieux marqués aux endroits de la plus forte résorption, d'où ils descendent plus bas. Après 11—13 h. on ne trouve plus de granules, le plasma se transforme en une masse granuleuse ou amorphe, quoiqu'on peut trouver çà et là des cellules épitheliales encore en contact avec la base 25 h. p. m., quand même bien plus petites que de norme. Les noyaux deviennent ca. 10 h. p. m. déjà tout à fait homogènes, pycnotiques.

Les changements de l'épithélium du gros intestin sont bien semblables, quoiqu'ils apparaissent un peu plus tard. Ici on peut poursuivre bien les changements des chondriosomes. Les granules deviennent plus claires dans leur centre, ils augmentent de volume; la décoloration procède jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une bande mince colorée à la surface du granule. Enfin cette bandelette disparaît aussi, le protoplasma prend un aspect vacuolisé. C'est un processus qu'on pourrait comparer avec les images de C h a m p y pendant la résorption bien avancée. — Les noyaux transforment leur structure, les „Radspeichenstrukturen" apparaissent ici aussi, ils se désagrègent et disparaissent, mais plus tard que le plasma. — Quelque fois surtout là où les cellules épithéliales sont au contact direct avec le contenu de l'intestin, la décoloration des granules ne commence pas au centre, mais elle se fait tout d'un coup dans le granule entier. Le plasma devient homogène, on n'y voit ni des vacuoles, ni la structure alvéolaire. — Les cellules caliciformes se vident de leur mucus; là où il est encore contenu dans les cellules, il devient grumeleux on granuleux. —

Dans le foie l'image du lobule décrite par Noël apparaît, 1 h. p. m., plus clairement. La disposition des chondriosomes reste la même, mais leur forme s'altère très vite. Il se forme des figures différentes. Après la coloration par hématoxyline à fer on voit les limites cellulaires comme une ligne mince. Deux telles lignes des cellules voisines parcourent parallêment et se présentent comme des parois d'un canalicule. La tramule de Oppel (Gitterfasern) est mieux visible. Plus tard des régions différentes de la coupe se colorent différemment: l'une se colore très bien, l'autre pas du tout. Mais dans les premières on voit à la périphérie des chondriosomes minces avec des contours bien nets, comme après l'influence d'une solution hypertonique de NaCl (A n i t s c h k o w), au centre des formes plus rondes et plus grandes comme sous l'influence d'une solution hypotonique. Les chondriosomes se groupent en des amas, entre lesquels le plasma forme un réseau irrégulier. La désagrégation se commence ca. 7 h. p. m.; mais on peut observer des chondriosomes bien conservés encore plus tard; leur dissolution ne s'effectue que 14—16 h. p. m. Des cellules binucléées augmentent en nombre, dans d'autres cellules le noyau s'agrandit, de même

A. J. CHURA: Les changements cytologiques postmortaux.

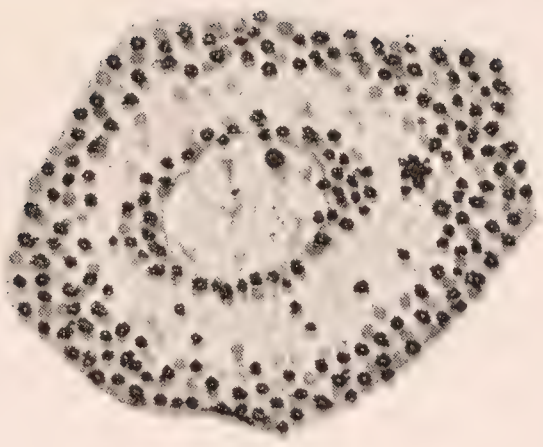
1.



2.

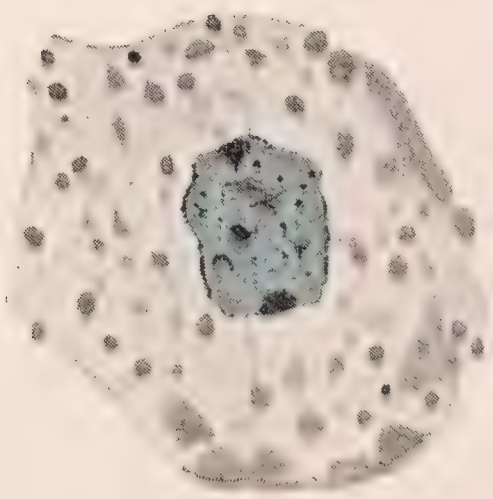
3.

4.



5.

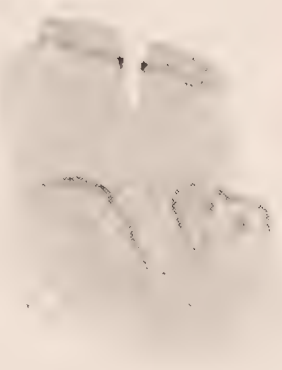
6.



7.

8.

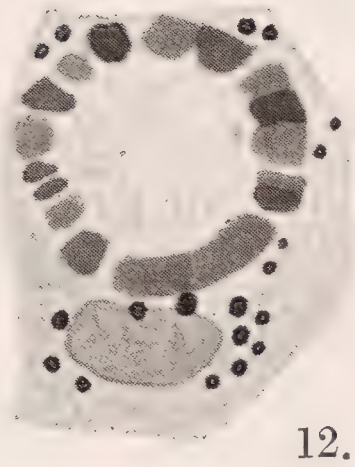
9.



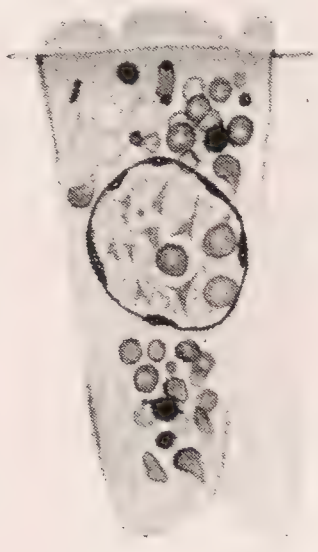
10.

A. J. CHURA: Les changements cytologiques postmortaux.

11.



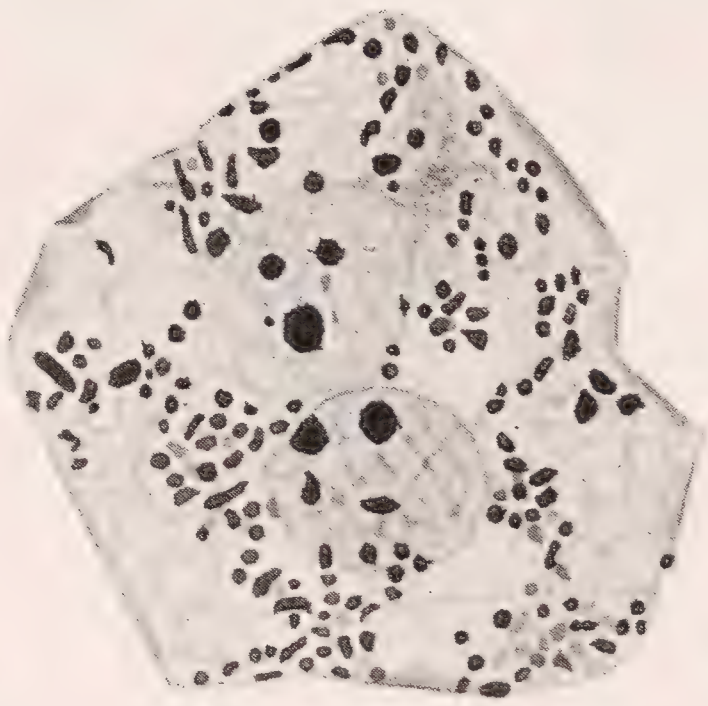
12.



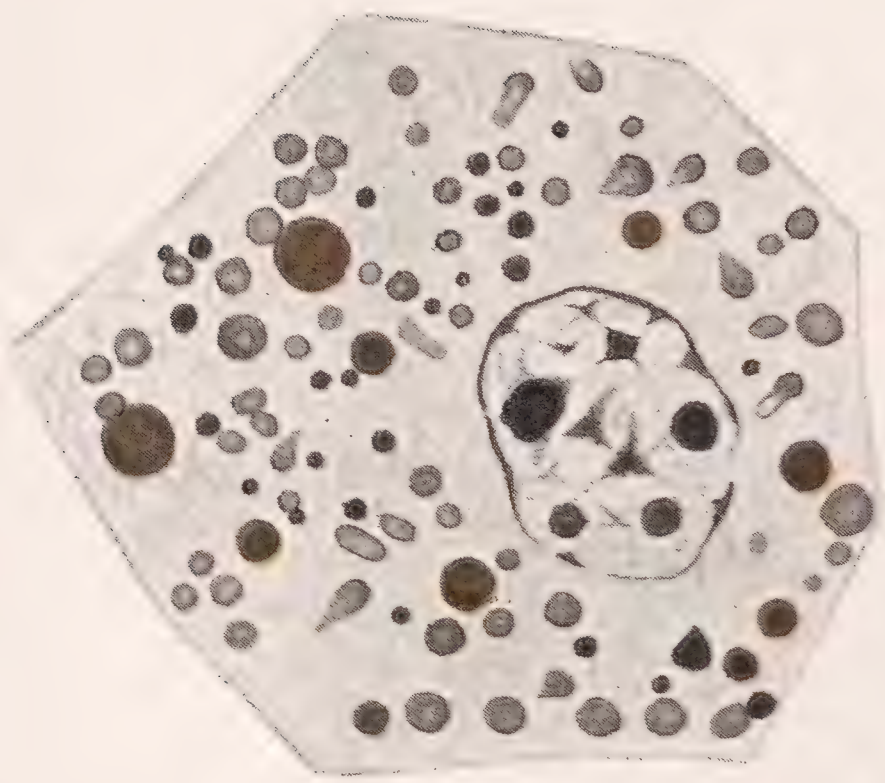
13.

14.

15.

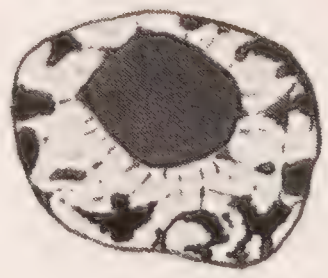


17.



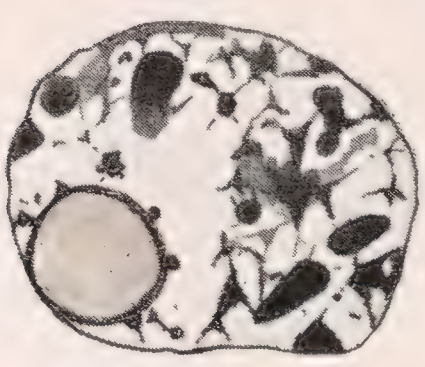
16.

18.



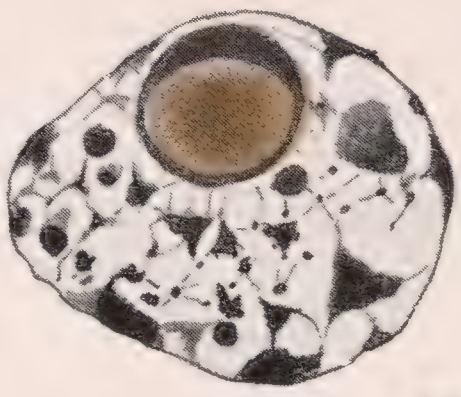
19.

A. J. CHURA: Les changements cytologiques postmortaux.



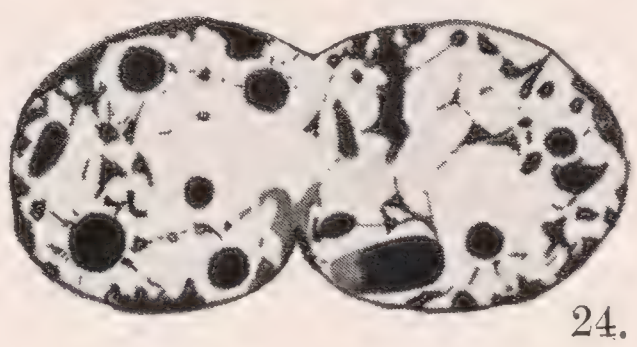
20.

21.



22.

23.



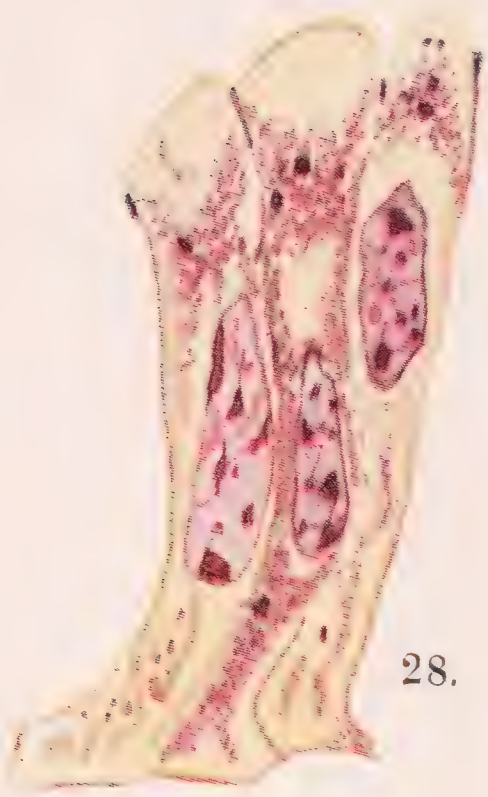
24.

25.

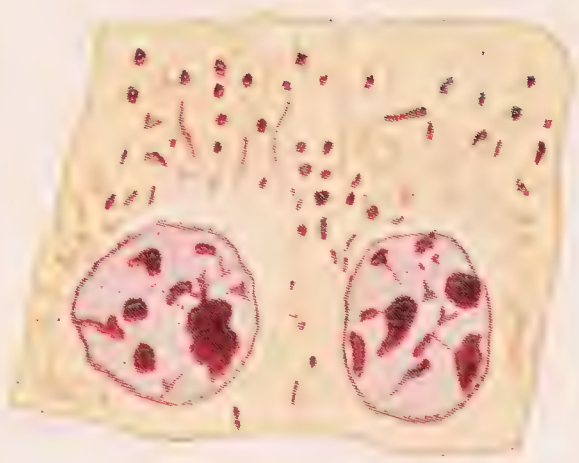
26.

27.

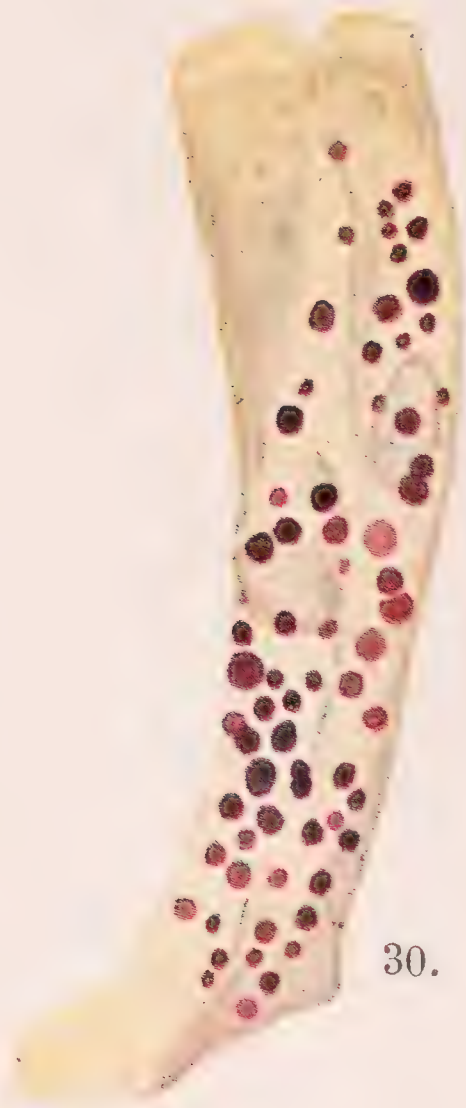
PAR A. J. CHURA: Les changements cytologiques postmortaux.



28.



29.



30.

31.

32.

33.

son nucléole augmente de volume et, plus tard, il réduit l'osmium (22 h. p. m.). A ce temps là on voit aussi souvent des formes nucléaires étranglées, comme des stades d'amitose (?).

La colorabilité des chondriosomes des cellules pancréatiques se diminue notablement 1 h. p. m. déjà. Les granules zymogènes s'approchent l'un de l'autre, ils forment des groupes ; en même temps la cellule entière devient plus petite — peut-être à cause d'une perte de l'eau. Alors on ne peut plus distinguer bien des limites cellulaires. Les chondriosomes en formes de bâtonnets ne se dissolvent pas le dans plasma, mais ils prennent d'abord des formes différentes, fusiformes, en massue, ovales etc.,et se transforment enfin en des formation globulaires. Leur coloration se diminue. Çà et là on voit aussi des vacuoles dans le plasma. 7 h. p. m. les chondriosomes longs ont presque disparu. Les noyaux se conservent longtemps, ils se colorent très bien même 10 h. p. m. Des formes rondes des chondriosomes et des chondriocontes rares, encore conservés, se dissolvent ensuite dans le cytoplasma. Ce dernier ne se désagrège pas en une masse amorphe même 25 h. p. m. — Les bâtonnets dans les cellules des îles de Langerhans s'altèreut très lentement ; on trouve même 22 h. p. m. quelques chondriocontes intacts. Les autres chondriosomes deviennent ronds, leur partie centrale s'éclaircit mais la colorabilité des noyaux reste bonne.

Dans la glande surrénale enfin les gouttelettes de lipoïdes dans les cellules de l'écorce réduisent l'osmium plus fortement. Dans d'autres cellules cette réduction se fait dans le cytoplasma même qui sépare les gouttelettes, tandisque ces dernières apparaissent comme des vacuoles sans propriétés réductrices. Ces vacuoles ne conservent pas leur forme ronde, mais elles deviennent polygonales, leurs contours ne sont pas très nets ; mais les contours des cellules apparaissent plus distincts. Ca. 4 h p. m. les limites intercellulaires commencent a disparaître, 7 h. p. m. la majorité des cellules sont déjà confluées entre elles. La colorabilité diminue fortement, 10 h. p. m. on ne voit que peu de grumeaux faiblement colorés, dans telles cellules le noyau est hyperchromatique ; dans d'autres il ne se colore pas. Tous les éléments sont fortement rattattinés. — Dans la substance médullaire, là où l'agent fixateur contenant de l'osmium avait pénétré, tout se colore en vert ou gris ; seulement des plus grands granules prennent la coloration typique. Le tissu conjonctif ne s'altère pas et se colore bien. Le plasma des cellules est finement granuleux ou réticulé. Les chondriosomes des cellules médullaires sont bien conservés 7 h. p. m. encore, mais les formes à bâtonnets font défaut. Ils se dissolvent dans le plasma qui acquiert de plus en plus une structure grumeleuse ; il apparaît comme précipité, peut être à cause d'une imbibition de l'eau.

(Institut d'histologie et d'embryologie de l'université Komenský, Bratislava.)

De la stratigraphie et paléontologie du pléistocène près de Varna.

Par

JAR. PETRBOK.

(Avec trois figures dans le texte.)

Présenté le 6 novembre 1925.

T o u l a fait déjà mention du pléistocène près *du lac de Devna* (= Devnensko jezero), mais il considère quelques-unes des couches de cette localité comme de provenance marine, ne remarquant pas qu'on y trouve des débris préhistoriques (parfois même de l'époque romaine) en même temps que le *Mytilus edulis* et toute une faune de mollusques terrestres y vivant jusqu' à nos jours, témoignant qu'il s'agit là de couches préhistoriques ou de fonds de cabannes. Nous trouvons des éléments analogues non seulement près du lac mentionné mais aussi tout le long de la côte bulgare de la *Mer Noire,* où je les ai trouvés dans ces couches préhistoriques (et dans les fonds de cabannes), à *Varna* même et sur la côte la plus proche, sur la péninsule de *Galata,* près de l'embouchure de la rivière de *Tiča* (= Kamčije) et près les villes de *Mesemvrie* et de *Bourgas.* De même il a confondu les coquilles tertiaires (marines), disloquées secondairment dans ces couches, avec celles du pléistocène et cette détermination fausse l'a porté à croire qu'il avait devant lui des couches pléistocènes marines, parce que ces coquilles sont associées aux coquilles terrestres aussi dans les couches inférieures des profils*) suivants.

La faune pléistocène — *plus ancienne* — de la côte de la *Mer Noire* est complètement identique avec celle de l'*Europe Centrale.* Nous trouvons dans ces loess cette association typique:

---

*) En 1924 et 1925, on a découvert, au sud *de Varna* et à l'ouest *de Galata* après avoir déplacé l'argile: quelques profils dont les couches les plus inférieures contiennent une faune marine identique avec celle d'aujourd'hui. Il s'agit donc d'un véritable pléistocène marin ou du pliocène le plus jeune. Je résoudrai cette question pendant mon prochain séjour *en Bulgarie.*

Xerophila striata Müll.
Pupilla muscorum Müll.
Lucena oblonga Drap., var. alongata A. Br.

cette faune dans le pléistocène vetérieme cède le pas à des formes plus *xérophiles.*

Une localisation stratigraphique et chronologique plus précise de ces faunes n'est pas possible jusqu'à présent, en l'absence d'autres observations et documents (terrasses de rivières, trouvailles ostéologiques etc.).

Pour les mêmes raisons, il est encore impossible de fixer le premier horizon du pléistocène, dans lequel on a trouvé la faune pléistocène suivante, dont les races diffèrent selon localités:

1. *Xerophila* sp.
2. *Buliminus detritus* Müll., var.
3. *Buliminus microtragus* (Parr.) Rossm.
4. *Buliminus seductilis* (Ziegl.) Rossm.
5. *Clausilia varnensis* Pfr. var. *socialis* Pfr.
6. *Cyclostoma costulata* (Ziegl.) Rossm.

et l'on ne peut établir les relations entre cette faune et la faune récente; ni celles qui existent entre les mollusques pléistocènes aquatiques (voir plus bas) et les mollusques récents des mêmes localités et des localités étrangères.

Les profils:

I. *Varna:* les bains (Morska gradina).

cca 20 *m* audessus de la *Mer Noire*

1. *terre végétale*
2. *la „tchernosiom" holocène:* $^1/_2$ — 1 *m ou argile brune*

} souvent presque impossible à distinguer. *Débris préhistoriques. Mollusques,* aussi de la faune locale récente (= Xérophytes).

pléistocène:
3. *„loess" jaune* : 2 *m. Coquilles* (faune 1.).
4. *argile blanchâtre:* 2 — 4 *m. Coquilles pléistocènes* (faune$_2$) et coquilles tertiaires secondairement déplacées
5. cailloutis de quartz: $^1/_4$ *m,* mais seulement par places.

Calcaires tertiaires.

Ce profil est un des plus importants dans les environs *de Varna,* parce que l'on y trouve *le loess* (3.) *pléistocène* avec l'association typique mentionnée plus haut:

faune 1.: 1. *Xerophila striata* Müll.
2. *Pupilla muscorum* Müll.
3. *Lucena oblonga* Drap. var. *elongata* A. Br.

Dans *l'argile* (pléistocène) *blanchâtre,* cette faune se présente 1. comme une association complète (faune 2.), mais modifiée dans ce sens que *Succinea oblonga* Drap *var. elongata* A. Br. l'emporte sur les autres et devient aussi plus grande. Il s'agit probablement de deux races; j'ai été empêché de

compléter mon enquête seulement par la côte qui est trop raide dans ces endroits. La découverte d'une quatrième éspèce: *Limnophysa truncatula* ne change rien à la caractéristique de cette faune. Mais dans les couches inférieures de ces argiles blanchâtres on trouve beaucoup de *coquilles tertiaires marines* qui témoignent que cette argile est d'origine aérohydate et qu'elle provient vraisemblablement de l'interglaciaire si le loess situé au-dessus est effectivement glaciaire. Je ne peux pour le moment déterminer de façon définitive l'âge de cette assise dans le système pléistocène, par suite du manque de découvertes importantes soit de mollusques caractéristiques pour le degré, soit de restes ostéologiques.

Varna: la côte de la Mer Noire audessus du jardin „Morska gradina" (profil I.).

Ce profile I. est un peu éclairé dans les détails par le *profile II.* pris non loin de là, dans le lit du ruisseau, sous le cimetière (direction de *Trakata*):

pléistocène
1. *terre végétale:* $\frac{1}{2}$ *m;*
2. *la „tchernosiom" holocène:* 1 — 1$\frac{1}{2}$ *m.*
3. *loess jaune:* 1 *m:* coquilles (= faune 1. dans le profil I.
4. *argile blanchâtre:* $\frac{1}{2}$ — 1 *m.*
5. *argile sableuse:* $\frac{1}{4}$—$\frac{3}{4}$ *m.*
6. *cailloutis.*

La faune est la suivante:

1. *Helix* sp. frgm. cf. *pomatia* aut *lucorum.*
2. *Buliminus seductilis* (Ziegl.) Rossm.
3. *Buliminus microtragus* (Parr.) Rossm.
4. *Buliminus detritus* Müll.

Nous trouvons des conditions analogues dans la baie de *Varna*, sur la péninsule de *Galata*.

Le profil III. sous le village *Galata*, audessus du phare:

terre végétale
argile rousse: 2—4 *m. Coquilles récentes.*
pléistocène: argiles du loess: 4—8—x *m. Coquilles.*
tertiaire

Le *profil IV.:* audessus de la quarantaine:

argile rousse: 1 *m; coquilles* récentes.
pléistocène: argiles du loess: 1—4 *m. Coquilles.*
tertiaire.

Peinadžik: le profil de la côte au sud du lac *de Varna* (profil VI)

Le *profil V.:* sur la route de *Galata:*

terre végétale } 1—1½ *m*
tschérnosiom holocéne }
éboulement de graviers
„loess" pléistocène: coquilles
graviers (éboulement?)
argile (tertiaire?)
calcaire tertiaire

Dans ces argiles du loess nous trouvons la faune suivante:

1. *Vallonia costata* Müll.
2. *Vallonia pulchella* Müll. var. *costulata* A. Br.

3. *Buliminus microtragus* (Parr.) Rossm.
4. *Succinea oblonga* Drap.
5. *Cyclostoma costulata* (Ziegl.) Rossm.

A ajouter quelques *Xérophiles*, que je citerai dans une publication prochaine.

Les conditions stratigraphiques aussi bien que fauniques sont tout sount peu plus compliquées près de *Peinadžik*, audessus du lac de *Varna*

La côte au sud du lac *de Varna* (profil VIII.).

Le *profil VI.*: sur la côte méridionale du lac, non loin du hangar:

terre végétale: coquilles de la faune locale récente.

tschérnosiom holocéne: coquilles de la faune locale récente.

pléistocène: *loess*$_1$. 1 *m. Coquilles da mollusques terrestres.*

tschérnosiom pléistocène: $\frac{1}{2}$ *m* — $1\frac{1}{2}$ *m: Cyclostoma costulata.*

loess$_2$ / *argiles aérohydatiques:* 3 — 4 *m. Coquilles* < terrestres / terrestres et d'eau douce.

La faune du loess supérieur:

1. *Helix corcyrensis* Partsch var. *girva* Friv.
2. *Helix striata* Müll.
3. *Helix* sp. cf.
4. *Buliminus* sp.
5. *Buliminus microtragus* (Parr.) Rossm.

6. *Buliminus seductilis* (Ziegl.) Rossm.
7. *Clausilia* sp. frgm.
8. *Pupa* sp.
9. *Succinea oblonga* Drap. var.
10. *Cyclostoma elegans Müll.*

La faune du loess inférieur (2.) et de l'argile aérohydatique:

1. *Helix* sp.
2. *Helix striata* Müll.
3. *Helix vindobonensis* Fér.
4. *Buliminus detritus* Müll. une race menue.
5. *Buliminus detritus* Müll. typ.
6. *Buliminus microtragus* (Parr.) Rossm.
7. *Buliminus seductilis* (Ziegl.) Rossm.
8. *Clausilia varnensis* Pfr. var. *socialis* Pfr.
9. *Cyclostoma costulata* (Ziegl.) Rossm.
10. *Succinea oblonga* Drap.
11. *Theodoxis fluviatilis* L.

Ce *loess 1. et 2.* d'un caractère essentiellement de vallée, contient la faune originale du loess *(Helix striata, Succinea oblonga)*, mais elle est déjà surpassée par une faune, il est vrai, contemporaine, mais plus riche en espèces et en exemplaires.

La faune 1. et 2., à l'exception peut être de *Succinea oblonga* (dans ces couches), correspond complètement à la faune actuelle (complétée encore d'autres espèces).

Dans ce profil nous rencontrons pour la première fois la faune complète des mollusques pléistocènes du bord de la *Mer Noire* et nous y trouvons representées à l'exception des quelques types récents comme p. ex.: *Buliminus varnensis*, les grands *Helix* du subg. *Helicogena*, toutes les espèces de l'association y vivant à présent, est qui-comme elle-y existait dans ces mêmes proportions aussi pendant l'ère de la *tchèrnosiom holocène.*

En ce qui concerne les espèces aquatiques, on n'a pas trouvé jusqu'à prèsent la *Dreissenssia polymorpha*, qu'on connait déjà du pléistocène *du Danube* (P e t e r s près du lac *Jalpuk* 1867, P e t r b o k: *Galac* 1923, *Reni* 1924; en une certaine forme de la terrasse pléistocène de la rivière *Lom* près de *Kula* en *Bulgarie* 1914).

Le *loess* 1. (de ce profil) est situé le plus bas et contient *une faune exclusivement xérophile*, comme *le loess* 2. (pour la tschérnosiom du pléistocène un seul document-médiocre).

Le profil VII. (près de *Peinadžik* tout près du hangar) contient une fanue riche en mollusques aquatiques:

argile rousse: ½ *m*
pléistocène: *argile jaune* (aérohydatique): 2 *m. Coquilles.*

La faune de ce profil est:

1. *Xerophila* sp.
2. *Xerophila* sp.
3. *Planorbis* (Gyrorbis) sp.

Dans *le profil* suivant, *VIII.* (derrière le hangar) apparaît *la terre blanche,* également pleistocène, avec une *faune aquatique* extrêmement riche en individus.

Le profil VIII.:

terre végétale: 2—3 *dm.*
tschérnosiom holocène: 3—7 *dm. Débris préhistoriques. Coquilles terrestres.*
pléistocène: argile blanche: 1½ *m. Coquilles aqualiques.*

La faune pléistocène:

1. *Xerophila striata* Müll. grande, sans bandeaux.
2. *Tachea vindobonensis* Fér.
3. *Limnaeus palustris* Müll. var.
4. *Valvata pulchella* Müll.

La plus intéressante espèce de la faune pléistocène du profil VII. est le *Planorbis* (Gyrorbis) sp. du groupe *spirorbis,* dont j'ai l'intention de définir plus tard l'importance faunistique; il en est de même du *Limnaeus palustris Müll. var.* du profil VIII.

En collectionnant moi mème très soigneusement (1914, 1922) je n'ai trouvé ni l'une ni l'autre espèce dans le lac de *Varna,* soit vivante soit holocène. Hesse[4]) mentionnée à cet endroit: *Limnaeus palustris Müll. var. corvus Gmel,* Wohlberedt: *Limnaeus palustris* Müll. var. *corvus* Gmel *f. varnensis* Gall. (d'autre part de *Bulgarie,* sans désigner de plus près la localité: *Limnaeus palustris* var. *vulnerata* Küst. chez *Westerlund;* de *Philippopel Limnaeus palustris Müll.* du Hesse).

Limnaeus palustris var. corvus et *f. varnensis* Gall se trouvent aujourd'hui seulement dans la tschérnosiom holocène parce que par un canal artificiel l'eau de ce lac (du *Varna*) était devenue saumâtre. (J'ai ramassé ici en 1914 les derniers *Bassommatophores* vivants: *Limnaeus stagnalis* et *Planorbis corneus*).

LITERATURE.

1. Toula Fr.: *Geolog. Untersuchungen im östl. Balkan u. i. d. angrenzenden Gebieten.* (Denkschr. d. k. k. Akad. d. Wissensch. Wien LVII 1890, str. 390.)

2. Petrbok Jar.: *Černomořský almanach*" (revue. Moře 1923).

3. Peters K.: *Grundlinien zur Geographie u. Geologie der Dobrudscha.* (Denksch. d. k. k. Akad. d. Wissensch. Wien 1867.)

4. Hesse: *a*) *Mollusken von Varna u. Umgebung.* (Nachrichtsbl. d. Deutsch. Malacozool. Ges. 1916.) *b*) *Zur Kenntnis der Molluskenfauna von Ostrumelien* (ibid.: 1912, 1913, 1914, 1916).

5. Wohlberedt O.: *Zur Molluskenfauna von Bulgarien.* (Abh. d. Naturforsch. Gesellsch. i. Görlitz 1911.)

6. Petrbok Jar.: *K problému marinního plistocaenu u Varny* (Věstník stát. geol. Úst. Č. S. R. II. 1926.

EXPLORATION DE LA TABLE:

1. *Buliminus detritus* Müll. typ recent. Ses Seomes.
2. *Buliminus detritus radiatus* recent. Varna.
3. *Buliminus detritus* Müll. var. plistocaen Peinadžik.
4. *Limnophysa palustris* Müll. var. Clessiniana plistocaen Taubach.
5. *Limnophysa palustris* Müll. plistocaen Taubach.
6. *Limnophysa palustris* Müll. var. plistocaen Peinadžik.
7. *Limnophysa palustris* Müll. var. *corvus* Gmel holocaen Varna.
8. *Limnophysa palustris* Müll. var. *corvus* Gmel f. *varnensis* Gall. recent. Karaač (Provadije).

Sur les axes axonométriques dans la projection clinogonale, le rapport de leurs longueurs étant donné.

Par

J. SOBOTKA.

Avec 3 figures.

Présenté le 3 avril 1925.

1. La projection clinogonale est déterminée par sa direction et par le plan de projection P. Nous nous posons le problème d'exprimer axonométriquement la projection Σ d'une figure (Σ) de l'espace en rapportant cette figure à trois axes orthogonaux $(O)\,(X)$, $(O)\,(Y)$, $(O)\,(Z)$; on peut supposer, sans aucune restriction de généralité, que le point (O) se trouve dans le plan de projection. Si l'on choisit les points (X), (Y), (Z) sur ces axes de manière que les longueurs des vecteurs $O\,(X)$, $O\,(Y)$, $O\,(Z)$ soient égales, il s'agit d'exprimer la projection Σ axonométriquement, c. à d. à l'aide des coordonnées de ses points par rapport au système orthogonal $O\,[(X), (Y), (Z)]$.

On peut déterminer ce système de sorte qu'il satisfasse à certaines conditions. Il s'agira, tout d'abord, de le déterminer de sorte que les longueurs des vecteurs $O\,X$, $O\,Y$, $O\,Z$ aient des rapports donnés. Donc, il s'agit de construire les vecteurs $O\,X$, $O\,Y$, $O\,Z$, ayant les rapports donnés, de sorte qu'ils soient les projections des vecteurs $O\,(X)$, $O\,(Y)$, $O\,(Z)$ de longueur donnée d.

Pour ce but, fixons, sur la perpendiculaire en O sur le plan P, le segment $O\,(E) = d$, de sorte que la droite $(E)\,E$ détermine la direction de projection. Par-là est donnée, en même temps, l'ellipse k au centre O, ayant un foyer au point E et d pour demi-axe latéral. Cette ellipse est le contour de la projection de la sphère ayant les rayons $O\,(X)$, $O\,(Y)$, $O\,(Z)$. Soit A un de ses sommets principaux, B un sommet latéral et posons $O\,E = e$.

2. Considérons, d'abord, le cas où la projection axonométrique est une projection *isométrique*, c. à d. où $O\,X = O\,Y = O\,Z$. Soit a la longueur de ces segments. On la construit d'après la relation $3a^2 = \overline{A\,B}^2$;

traçons, dans P, le cercle l au centre O et au rayon a, et le cercle m au rayon égal à $\frac{a^2}{e}$.

A l'équation vectorielle

$$O\,X^2 + O\,Y^2 + O\,Z^2 = O\,E^2 \text{ [1]}$$

satisfait tout quadrilatère fermé $O\,M\,N\,E$ dont les côtés $O\,M$, $M\,N$, $N\,E$ ont la longueur $\frac{a^2}{e}$, c. à d., dans lequel les sommets O et E sont fixes, le sommet M est situé sur le cercle m. Soit (Fig. 1.) N_1 le pied de la perpendiculaire abaissée du point N sur la droite $E\,M$ et M_1 son intersection avec la droite $O\,M$. Si le quadrilatère $O\,M\,N\,E$ change de position, le point N_1 parcourt le cercle m_1 dont le centre S est le centre du segment $O\,E$ et dont le rayon est égal à la moitié du rayon du cercle m; la droite $N\,N_1$ enveloppe la conique u ayant les foyers O, E et pour laquelle m_1 est le cercle circonscrit aux sommets. Le point M_1 est le point de contact de la droite $N\,N_1$ comme tangente de u. La tangente de cette conique, symétrique à $N\,N_1$ par rapport au centre S, coupe m en deux points P, Q de sorte que les vecteurs $O\,P$, $O\,Q$ soient égaux, respectivement, aux vecteurs $M\,N$ et $N\,E$. La droite $M\,E$ coupe la tangente $P\,Q$ au point N_2 sur m_1.

On aboutit, de la sorte, à la construction suivante pour les axes isométriques: On construit les cercles m et m_1; en partant d'un point arbitraire M de m, déterminons, des points d'intersection de $M\,E$ avec m_1, celui qui est séparé de M par le point E, et coupons m par la perpendiculaire sur $M\,E$ en N_2; on obtient ainsi les points P, Q; alors, les vecteurs $O\,X$, $O\,Y$, $O\,Z$ sont les bissecteurs des angles $E\,O\,M$, $E\,O\,P$, $E\,O\,Q$ et leurs extrémités se trouvent sur le cercle l.

Puisque l'ordre des vecteurs $O\,M$, $O\,P$, $O\,Q$ est, dans l'addition, arbitraire, on en conclut que le triangle $M\,P\,Q$ est circonscrit à la conique u et inscrit au cercle m. Si l'on fait changer le point M sur m, on reconnaît qu'on peut construire un nombre illimité de triangles circonscrits à u et inscrits à m; pour tous ces triangles le foyer E est le point d'intersection des hauteurs et les axes isométriques sont bissecteurs des angles que font les vecteurs joignant le centre O du cercle m aux sommets du triangle avec le vecteur $O\,E$, pour toute position de ce triangle. Il s'ensuit que ces axes forment une involution cubique.

Si, par contre, une conique centrale arbitraire u, ayant les foyers O et E, est donnée, et si l'on construit un cercle m, ayant pour centre un de ces foyers, p. ex. O, et dont le rayon égale la longueur de l'axe principal de u, et que l'on mène, par le point O, trois vecteurs, dont l'un aboutit à un point arbitraire M_1 de u, les deux autres aux points d'intersection du cercle m avec la tangente de la conique u au point diamétral à M_1 —

---

[1]) Cf. Bulletin international de l'Académie Tchèque des sciences XXVeannée p. 85

on peut toujours considérer les droites bissectrices des angles, que font ces vecteurs avec $O\,E$, comme des axes axonométriques et isométriques, de sorte que, X, Y, Z étant les points respectifs de ces droites sur le cercle au centre O et dont le rayon est égal à la moyenne géométrique de $O\,E$ et du rayon du cercle m; $O\,X$, $O\,Y$, $O\,Z$ soient les projections parallèles des longueurs $O\,(X)$, $O\,(Y)$, $O\,(Z)$, égales et orthogonales.

On en conclut qu'on peut, à l'aide d'une conique centrale u quelconque, exprimer toutes les projections isométriques et axonométriques pour une projection parallèle déterminée sur le plan de cette conique. En effet, considérons le cercle m mentionné plus haut, ayant pour centre un des foyers O, E — c'est, dans le cas actuel, O; — tout triangle inscrit à m

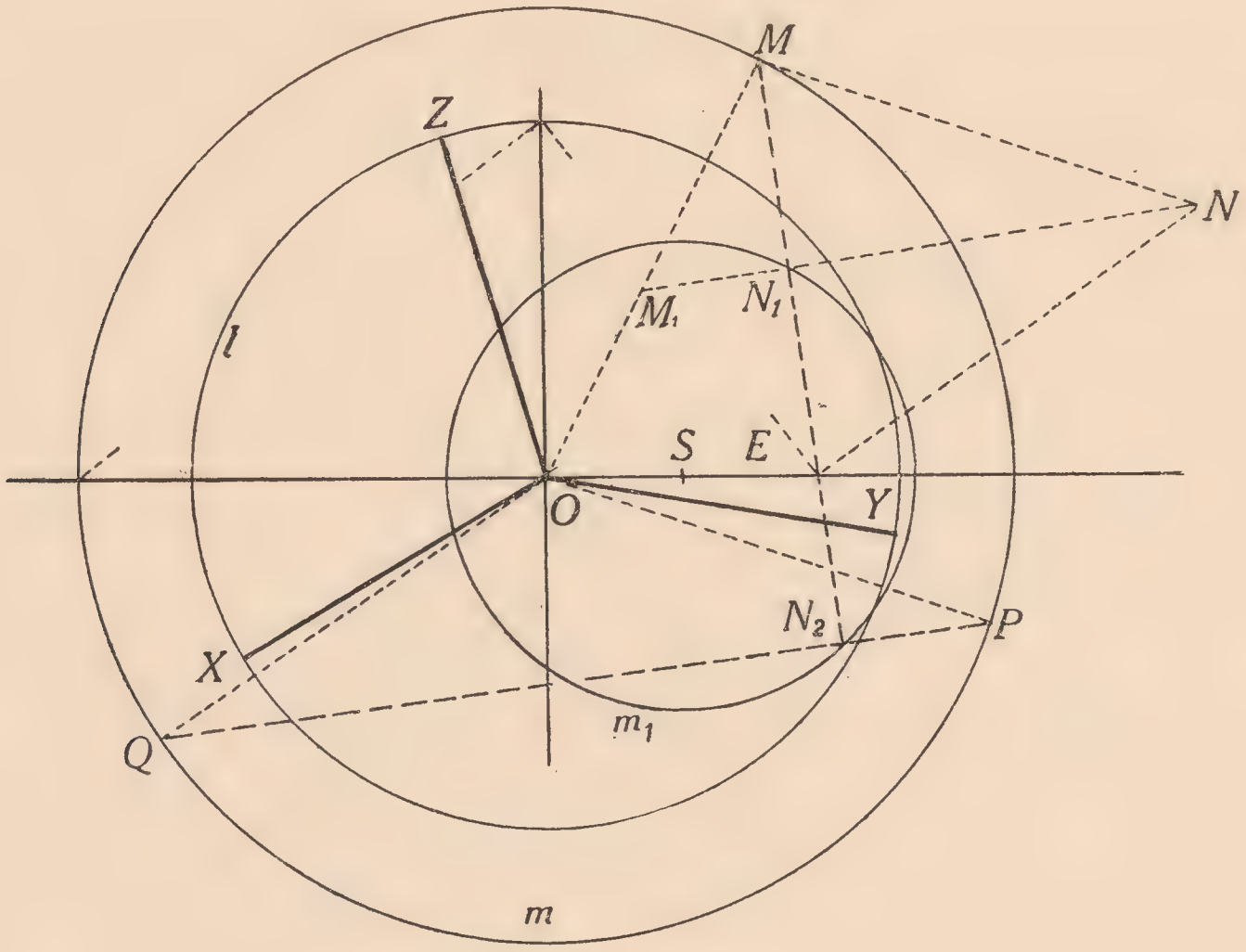


Fig. 1.

et circonscrit à u conduit, de la manière exposée plus haut, aux trois droites $O\,X$, $O\,Y$, $O\,Z$ et aux points X, Y, Z de ces droites, auxquels correspondent, dans l'espace, les points (X), (Y), (Z). Car si le contour k de la projection de la sphère, dont trois rayons orthogonaux se projettent suivant $O\,X$, $O\,Y$, $O\,Z$, possède le grand demi-axe $O\,A$ et le petit demi-axe $O\,B$, et que l'on exprime par a la longueur commune des vecteurs $O\,X$, $O\,Y$, $O\,Z$, les relations doivent avoir lieu — en posant encore $O\,E = e$,

$$\overline{O\,A}^2 + \overline{O\,B}^2 = 3\,a^2, \quad O\,A^2 - O\,B^2 = e^2,$$

de sorte que

$$2\,\overline{O\,B}^2 = 3\,a^2 - e^2.$$

Si l'on désigne par a_1 la longueur du demi-axe principal et par e_1 l'excentricité linéaire de la conique u, il suit de la relation

$$\frac{a^2}{e} = 2\,a_1$$

que

$$a = 2\sqrt{a_1 e_1}\,,\ O\,B = \sqrt{2\,e_1\ (3\,a_1 - e_1)}\,,\qquad t\,g\,\varphi = \sqrt{\frac{3\,a_1 - e_1}{2\,e_1}}$$

où φ désigne l'angle que font, avec le plan de projection, les droites projetantes. Par-là sont déterminés, aussi bien la projection parallèle, que les axes $O\,(X)$, $O\,(Y)$, $O\,(Z)$, mais, bien entendu, pas d'une manière univoque, comme il résulte du théorème de Pohlke.

Si $a_1 = e_1$, la conique u dégénère en deux faisceaux de droites O et E, la direction des droites projetantes faisant avec P l'angle égal à $\frac{\pi}{4}$; l'un des trois segments $O\,X$, $O\,Y$, $O\,Z$ coïncide avec $O\,E$, les deux autres sont perpendiculaires; on, peut, par suite, choisir l'un des trois segments $O\,(X)$, $O\,(Y)$, $O\,(Z)$ ou perpendiculaire au plan de projection, les deux autres étant alors situés dans ce plan, ou en $O\,E$, les deux autres étant alors situés dans le plan perpendicullaire à $O\,E$, tandisque, dans le cas général, tous les triples $O\,(X)$, $O\,(Y)$, $O\,(Z)$ remplissent — pour l'une ou l'autre direction de projection — un cône quadratique qui projette, du point O, la courbe d'intersection du cylindre projetant le cercle l et de la sphère au centre O et au rayon $O\,(X)$.

3. Pour l'expression axonométrique et *dimétrique*, on a, en posant $\overline{O\,X} = a$, $\overline{O\,Y} = \overline{O\,Z} = b$, la relation

$$a^2 + 2\,b^2 = \overline{A\,B}^2;$$

on peut choisir, par suite, a arbitrairement dans les limites 0 et $O\,A$, ce qui suffit à déterminer b. Si est donnée, de plus, la valeur λ du rapport $\frac{b}{a}$, on a

$$a^2 = \frac{\overline{A\,B}^2}{1 + 2\,\lambda^2} \qquad b^2 = \frac{\lambda^2\,\overline{A\,B}^2}{1 + 2\,\lambda^2}$$

ce qui détermine les longueurs a et b.

Dans le plan de projection construisons (Fig. 2) les cercles m et n au centre O et dont les rayons sont, respectivement $\frac{a^2}{e}, \frac{b^2}{e}$. Choisissons, de plus, sur m un point M et construisons, prenant pour base le segment $E\,M$, le triangle équilatère $E\,M\,N$, où $M\,N = N\,E = \frac{b^2}{e}$; alors, le quadrilatère $O\,M\,N\,E$ satisfait à l'équation (1). Soit N_1 le pied de la perpendiculaire abaissée de N sur $E\,M$ et T son point d'intersection avec $O\,M$. Si M parcourt m, le point T parcourt la conique u, enveloppée, en même temps, par les tangentes $N\,N_1$, ayant les foyers O et E, et dont le cercle circonsrit aux sommets m_1 est homothétique à m par rapport au centre E, le rapport de similitude étant 1 : 2. Si l'on construit les vecteurs $O\,P$, $O\,Q$ de sorte que $O\,P = M\,N$, $O\,Q = N\,E$, les points P et Q sont situés sur le cercle n,

la droite $P\,Q$ est la tangente à u parallèle à $N\,N_1$ et coupe, par suite, la droite $E\,M$ au point N_2 sur m_1.

Ainsi sont exprimés, dans la projection parallèle et pour des valeurs données de a et b, tous les axes axonométriques respectifs, qui sont dimétriques, à l'aide de la conique u. Marquons, en effet, sur m un point arbitraire M ; le rayon vecteur $O\,M$ coupe u au point T et la tangente à la conique u, parallèle à la tangente en T, coupe n aux points P et Q. Par-là on aboutit aux vecteurs $O\,M$, $O\,P$, $O\,Q$ qui satisfont à l'équation (1). Par suite, les segments $O\,X$, $O\,Y$, $O\,Z$, situés sur les bissectrices des angles $E\,O\,M$, $E\,O\,P$, $E\,O\,Q$, dont le premier à la longueur a, les deux autres la longueur b, donnent une expression de ce genre.

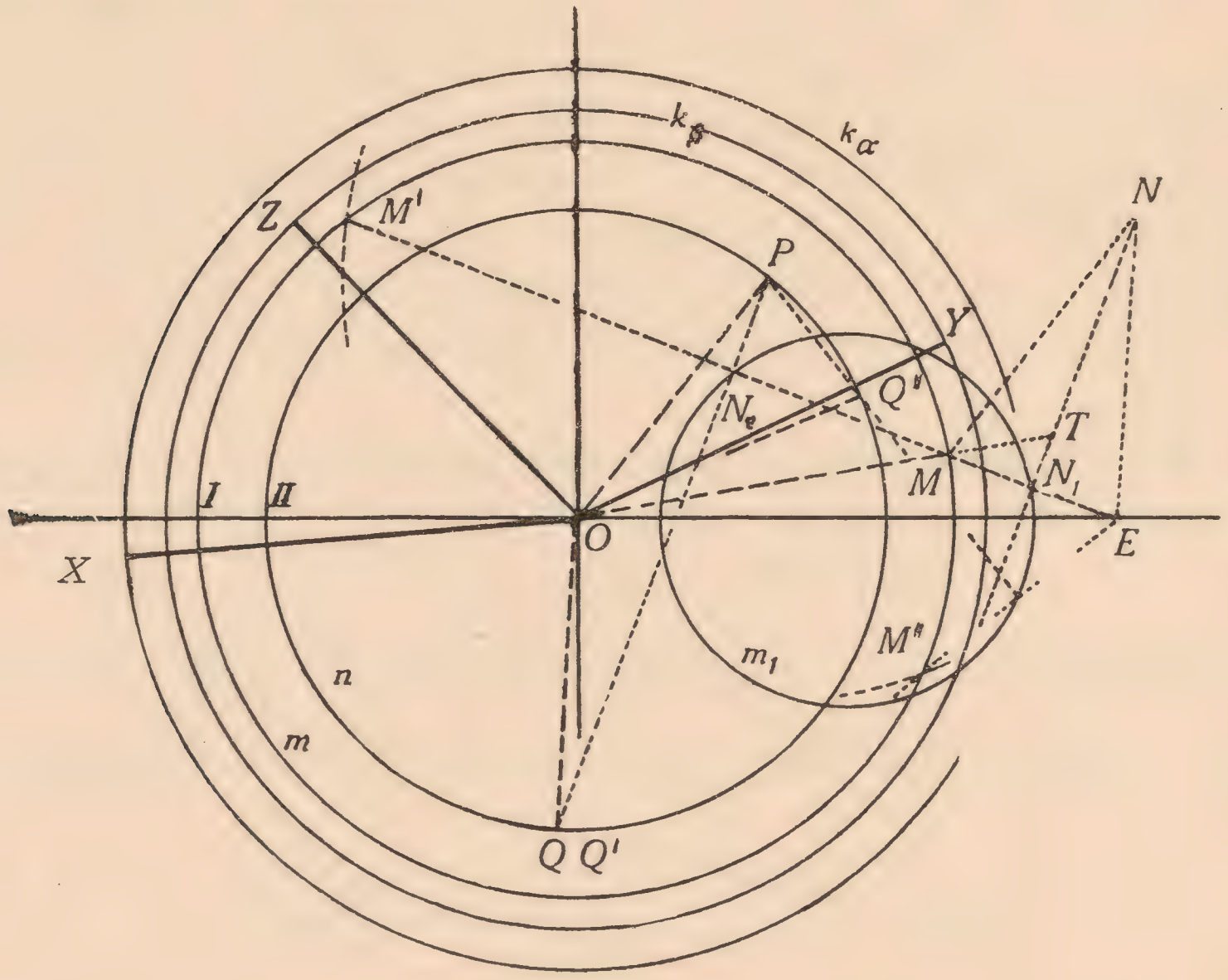


Fig. 2.

Pour éxécuter la construction d'une manière simple, construisons encore les cercles k_α, k_β au centre O et ayant, respectivement, les rayons a, b, et marquons, sur m et n, les points I et II situés sur la droite $O\,E$ et séparés du point E par le point O. Les cercles m, m_1 sont inverses pour E comme centre d'inversion ; dans cette inversion se correspondent les points de ces cercles, situés sur les droites par E, qui ne sont pas homologiques ; par suite, au point M correspond le point N_2 et au point N_1 correspond le deuxième point d'intersection M' de la droite $O\,M$ avec le cercle m. On arrive ainsi à la construction suivante.

On prend, sur m, un point arbitraire M ; au point, qui lui est inverse sur m, on construit la perpendiculaire à $E\,M$; soit P, Q ses points d'intersection avec n, alors la parallèle menée par le point O à $I\,M$ est l'axe $O\,X$

et le point X se trouve sur k_α, la parallèle menée par le point O à $II\ P$ est l'axe $O\ Y$ et celle menée parallèlement à $II\ Q$ est l'axe $O\ Z$, les points Y, Z se trouvant sur k_β.

Donc, si l'on choisit X sur k_α, le point M est déterminé d'une manière univoque, et de même, la droite $P\ Q$ est déterminée d'une manière univoque ; par-là le couple de droites $O\ Y$, $O\ Z$ est déterminé univoquement, de sorte que l'on peut choisir l'une d'elles pour l'axe $O\ Y$, l'autre pour l'axe $O\ Z$. Mais, si l'on choisit Y ou Z sur k_β, par ex. Y, le point P est déterminé, sur n, d'une manière univoque, tandis que le point Q peut être l'un ou l'autre des deux points Q', Q'', où les tangentes menées du point P à u coupent encore le cercle n. Le cercle au centre P, passant par le point E, coupe m en deux points M', M'' ; la tangente $P\ Q'$ est perpendiculaire à $E\ M'$, la tangente $P\ Q''$ est perpendiculaire à $E\ M''$. Par conséquent, l'axe $O\ Z$ est parallèle ou à la droite $II\ Q'$, ou à la droite $II\ Q''$.

Considérons le cas où la conique u dégénère en un couple de points O, E ; les cercles m, m_1 se touchent au point E, $a = e$ de plus les cercles m, k_α coincident, $b = O\ B$, si l'on désigne, par $O\ B$, le petit demi-axe de k. Il faut distinguer deux cas.

Dans le premier le point M coïncide toujours avec le point E et le point N_2 respectif peut être un point quelconque sur m_1 par suite, P, Q sont les extrémités d'un diamètre arbitraire de n. En ce cas, encore, X coïncide avec E et les axes $O\ Y$, $O\ Z$ sont orthogonaux. La projection axonométrique est la projection clinogonale sur le plan P. On peut, inversement, considérer toute projection axonométrique et dimétrique, pour laquelle ceux des trois segments $O\ X$, $O\ Y$, $O\ Z$ qui sont de longueur égale, sont orthogonaux, comme une projection clinogonale sur le plan P, ce qui, d'ailleurs, est une conséquence immédiate du théorème de Pohlke. Car, si, p. ex. $O\ X = O\ Y$, le contour k de la sphère, ayant les rayons orthogonaux $O\ (X)$, $O\ (Y)$, $O\ (Z)$, touche le cercle k_1 au centre O et au rayon $O\ X$, le contact ayant lieu aux points B, B_1 où les tangentes sont parallèles à $O\ Z$. Comme, en ce cas, $B\ B_1 \perp O\ Z$ et les droites $O\ B$, $O\ Z$ sont des diamètres conjugués de k, $B\ B_1$ est un axe de la conique k ; et comme la longueur du rayon de k_1 sur $O\ Z$ égale $O\ X$, on a, pour la longueur du rayon $O\ A$ de la courbe k sur $O\ Z$, la relation $\overline{O\ A}^2 = \overline{O\ Z}^2 + \overline{O\ X}^2$, de sorte que Z est un foyer de l'ellipse k. Si l'on choisit, pour la sphère, $O\ (Z) \perp$ P, $O\ (X) = O\ X$, $O\ (Y) = O\ Y$, il est évident que k est son contour. Mais on peut considérer, aussi en ce cas, $O\ X$, $O\ Y$, $O\ Z$ comme des projections des segments $O\ (\overline{X}) \perp O\ (\overline{Y}) \perp O\ (\overline{Z})$ symétriques à $O\ X$, $O\ Y$, $O\ (Z)$ par rapport au plan posé par le point O perpendiculairement aux droites projetantes.

Si, cependant, on choisit, dans le cas considéré, où la conique u se compose des points O, E, le point M arbitrairement sur m, le point N_2 coïncide toujours avec le point E, et, par suite, les points P, Q sont les points d'intersection du cercle n avec la droite joignant le point E au point sur m diamétralment posé à M.

Si l'on veut qu'en axonométrie clinogonale les segments parallèles à deux axes de coordonnées, par ex. à $O\,(X)$, $O\,(Y)$, se projettent en leur vraie longueur, c. à d. $O\,X = O\,Y = O\,(X) = O\,(Y) = O\,B$, il faut que $O\,Z = e$, ce qui est une conséquence directe de la relation

$$O\,X^2 + O\,Y^2 + O\,Z^2 = O\,A^2 + O\,B^2.$$

Or, si l'on désigne, tout court, par B la longueur $O\,B$, par φ l'angle aigu des droites $O\,X$, $O\,Y$ et par ψ l'angle que fait $O\,Z$ avec sa bissectrice, on peut exprimer la relation entre les longueurs B et e et ces angles. Soient, encore, $\overline{a}$, $\overline{b}$ les demi-axes, e_0 l'excentricité linéaire de l'ellipse dont $O\,X$, $O\,Y$ sont des diamètres conjugués. Il suit, des équations connues

$$\overline{a}^2 + \overline{b}^2 = 2\,B^2, \quad \overline{a\,b} = B^2 \sin\,\varphi$$

l'équation

$$(\overline{a} \pm \overline{b})^2 = 2\,B^2\,(1 \pm \sin\,\varphi)$$

d'où il résulte

$$e_0^2 = 2\,B^2\,\cos\,\varphi\,.$$

Si E_0 est un foyer réel de cette ellipse, et si l'on désigne par a_0, b_0 les demi-axes de l'ellipse ayant les demi-diamètres conjugués $O\,E_0$ et $O\,Z$, on obtient, en partant des équations

$$e_0^2 + e^2 = a_0^2 + b_0^2, \quad e_0\,e\,\sin\,\psi = a_0\,b_0,$$

comme ci-dessus, la relation

$$e_0^2 + e^2 \pm 2\,e_0\,e\,\sin\,\psi = (a_0 \pm b_0)^2,$$

d'où il suit:

$$e^4 = (e_0 + e^2)^2 - 4\,e_0\,e^2\,\sin^2\,\psi\,, \quad e_0^2 = -\,2\,e^2\,\cos\,2\,\psi\,.$$

Si l'on y remplace e_0 par l'expression trouvée plus haut, on obtient

$$\cos\,2\,\psi = -\,\frac{B^2}{e^2}\,\cos\,\varphi\,.$$

L'une des axes $O\,(X)$, $O\,(Y)$, p. ex. $O\,(X)$ est dans le plan de projection l'autre alors dans un plan normal à lui. Soient q la droite bissectrice de l'angle φ et ψ' l'angle fermé par l'axe principal de la courbe k et la droite q; alors les angles aigus $(q,\ O\,X)$, $(q,\ O\,Z)$ sont de même sens et $\psi + \psi' = \frac{\pi}{2}$.

Cette considération est valable avec la restriction que $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$; car pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ on aurait $e_0 = 0$, $\psi = 0$, ce qui est le cas considéré plus haut.

4. Considérons maintenant le cas général de l'axonométrie *trimétrique*. Posons $O\,X = a$, $O\,Y = b$, $O\,Z = c$. Ces longueurs sont liées par la relation $a^2 + b^2 + c^2 = \overline{A\,B}^2$, dans la notation employée ci-dessus. Supposons que le rapport $a : b : c$ soit exprimé par le rapport de segments $a_1 : b_1 : c_1$. Traçons le segment $O_1\,A_1 = a_1$, au point A_1 élevons la perpendiculaire,

sur laquelle on portera le segment $A_1 B_1 = b_1$, élevons, de plus, au point B_1 la perpendiculaire sur $O_1 B_1$ et portons sur elle le segment $B_1 C_1 = c_1$, et portons, enfin, sur $O_1 C_1$ le segment $O_1 C_2 = \overline{A B}$. Si B_2 est le pied de la perpendiculaire abaissée de C_2 sur $O_1 B_1$ et A_2 le pied de la perpendiculaire abaissée de B_2 sur $O_1 A_1$, on a, évidemment, $O_1 A_2 = a$, $O_1 B_2 = b$, $O_1 C_2 = c$. On a porté ces longueurs sur $O B$ à partir du point O; on obtient ainsi les points α, β, γ. Les droites, perpendiculaires, respectivement, à $E\alpha$, $E\beta$, $E\gamma$ coupent $O A$ en trois points, que nous désignons par α'. β', γ'. Par ces points menons des cercles m, n, p au centre O; leurs rayons sont, respectivement: $\frac{a^2}{e}$, $\frac{b^2}{e}$, $\frac{c^2}{e}$.

Si l'on construit (Fig. 3) le triangle $M N_0 E$ dont le sommet M est situé sur la circonférence m et dans lequel

$$M N_0 = \frac{b^2}{e} = O\beta', \qquad N_0 E = \frac{c^2}{e} = O\gamma',$$

le quadrilatère vectoriel $O M N_0 E$ satisfait à l'équation (1). A cette équation satisfait, de même, le quadrilatère $O M N_0' E$, où le vecteur $M N_0' = N_0 E$ et le vecteur $N_0' E = M N_0$.

Soit g_1 la perpendiculaire abaissée du point N_0 sur le rayon vecteur $O M$. Si M parcourt la circonférence m, la droite g_1 enveloppe une conique w_1. Car si l'on choisit le système de coordonnées orthogonales dont l'axe des x est la droite $O A$, l'axe des y la droite $O B$, et si x_0, y_0 sont les coordonnées du point M, la droite g_1 est l'axe radical des cercles

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0^2) - \frac{b^4}{e^2} = 0, \quad (x - e)^2 + y^2 - \frac{c^4}{e^2} = 0.$$

En retranchant ces deux équations, on obtient l'équation de g_1 dans la forme:

$$2(x_0 - e)x + 2y_0 y + \frac{-a^4 + b^4 - c^4 + a^4}{e^2} = 0.$$

Posons $a^4 - b^4 + c^4 - e^4 = \delta$. Les coordonnées de cette droite sont

$$u = \frac{2(x_0 - e)e^2}{-\delta}, \quad v = \frac{2y_0 e^2}{-\delta},$$

et, par suite

$$x_0 = -\frac{u\delta}{2e^2} + e, \quad y_0 = -\frac{v\delta}{2e^2}.$$

Si l'on remplace x_0, y_0 par ces expressions dans l'équation du cercle m, on obtient l'équation de la conique w_1 dans la forme

$$\delta^2(u^2 + v^2) - 4e^2(e\delta u + a^4 - e^4) = 0.$$

On peut l'écrire, dans la forme homogène:

$$\delta^2(u_1^2 + u^2) - 4e^2 u_3[e\delta u_1 + (a^4 - e^4)u_3] = 0.$$

Cette conique appartient à la série de coniques, déterminée par les points cycliques à l'infini

$$u_1^2 + u_2^2 = 0$$

et par le couple de points

$$u_3 = 0\,,\ e\,\delta\,u_1 + (a^4 - e^4)\,u_3 = 0\,.$$

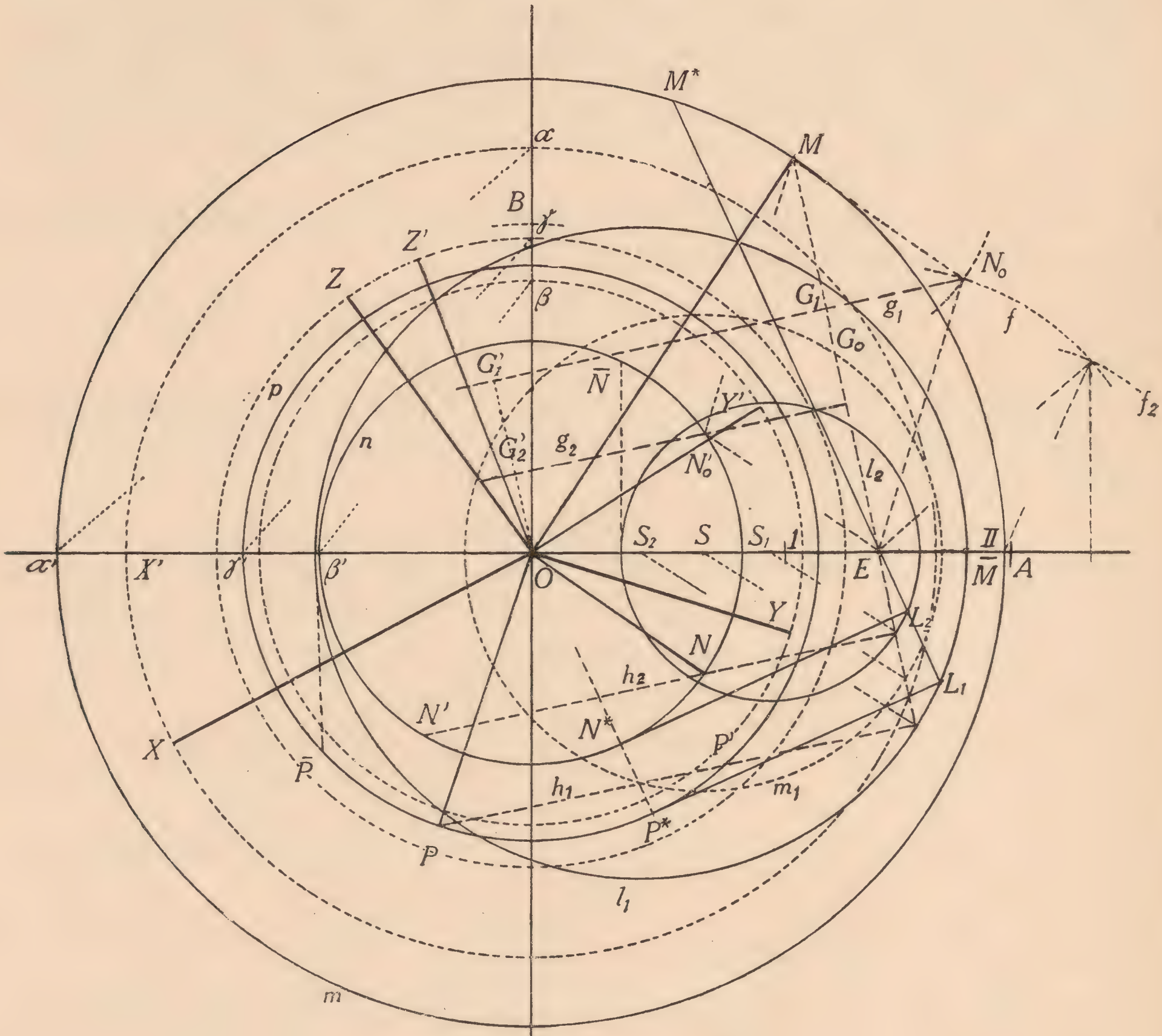


Fig. 3.

Ce couple de points sont, par suite, les foyers réels de la courbe w_1; ce sont le point O et le point de l'axe des x pour lequel

$$x = \frac{e\,\delta}{a^4 - e^4}\,.$$

L'équation ponctuelle de la conique w_1 est alors

$$4\,e^2\,a^4\,(x^2 + y^2) - (2\,e^3\,x + \delta)^2 = 0\,.$$

La perpendiculaire g_2 abaissée du point N_0' sur la droite $E\,M$ enveloppe, le point M se déplaçant sur m, la conique w_2; on obtient son

équation en échangeant, dans les équations de w_1, b et c. Donc, si l'on pose $\delta_1 = a^4 + b^4 - c^4 - e^4$, ces équations sont:

$$\delta_1^2 (u^2 + v^2) - 4 e^2 (e \delta_1 u + a^4 - e^4) = 0 ,$$

$$4 e^2 a^4 (x^2 + y^2) - (2 e^3 x + \delta_1)^2 = 0 .$$

Par suite, les coniques w_1 et w_2 sont homothétiques, le point O étant le centre d'homothétie et $\delta : \delta_1$ le rapport de similitude.

On arrive au même résultat aussi de la manière suivante.

La droite g_0, bissectrice de la distance des droites g_1, g_2 enveloppe une conique w, lorsque M se déplace sur m. Les foyers de cette conique sont les points O et E; le cercle circonscrit aux sommets m a le rayon $\frac{a^2}{2e}$. Désignons par G_1, G_0 les points d'intersection des droites g_1, g_0 avec EM, et par G_1', G_0' les points d'intersection avec la perpendiculaire abaissée sur elles du point O, et posons $\sphericalangle M E N_0 = \varepsilon$, $\sphericalangle E M N_0 = \mu$. On obtient alors,

$$E G_1^2 = \frac{c^4}{e^2} \cos^2 \varepsilon , \qquad G_1 M^2 = \frac{b^4}{e^2} \cos^2 \mu ;$$

en retranchant ces deux équations on obtient la relation

$$2 E M . G_0 G_1 = \frac{1}{e^2} (e^4 \cos^2 \varepsilon - b^4 \cos^2 \mu) ;$$

et comme

$$G_1 N_0 = \frac{c^2}{e} \sin \varepsilon = \frac{b^2}{e} \sin \mu ,$$

et, par suite,

$$c^4 \sin^2 \varepsilon - b^4 \sin^2 \mu = 0 ,$$

on a aussi

$$4 E G_0 . G_0 G_1 = \frac{1}{e^2} (c^4 - b^4).$$

La longueur du grand demi-axe de w est $\frac{a^2}{2e}$, son excentricité linéaire $\frac{e}{2}$; par suite, la longueur du petit demi-axe est $\frac{a^4 - e^4}{4 e^2}$; elle équivaut aussi au produit $E G_0 . O G_0'$, d'où l'on obtient le rapport

$$\frac{G_0' G_1'}{O G_0'} = \frac{c^4 - b^4}{a^4 - e^4}$$

et, par suite

$$\frac{O G_1'}{O G_0'} = \frac{a^4 - b^4 + c^4 - e^4}{a^4 - e^4} = \frac{\delta}{a^4 - e^4} .$$

Par conséquent, le point G_1' décrit le cercle k_1 dont le rayon est égal à $\frac{a^2}{2e} \cdot \frac{\delta}{a^4 - e^4}$, et, d'une manière analogue, le point G_2', en lequel g_2 coupe

la droite $O\,G_0'$, décrit le cercle k_2 dont le rayon est égal à $\frac{a^2}{2\,e} \cdot \frac{\delta_1}{a^4 - e^4}$; les droites g_1, g_2 enveloppent, par suite, les coniques w_1, w_2 ayant le foyer O et auxqelles k_1, k_2 sont circonscrits aux sommets.

Soient, de plus, les vecteurs $O\,N = M\,N_0$, $O\,P = N_0\,E$; menons, par le point N la parallèle h_2 à g_2, par le point P la parallèle h_1 à g_1; on voit que les droites g_1, h_1 d'une part, les droites g_2, h_2 d'autre part sont symétriques par rapport au centre S du segment $O\,E$; désignons par h la droite symétrique, par rapport au même centre, à g. Si l'on fait changer les triangles $M\,N_0\,E$, $M\,N_0'\,E$ de la manière précitée, la droite h_1 enveloppe la conique v_1 symétrique à w_1, la droite h_2 la conique v_2 symétrique à w_2 par rapport au point S et la droite h enveloppe, encore, la conique w. Par conséquent, les coniques v_1, v_2, w sont semblables et ont le même axe $O\,A$ et le même foyer E, par rapport auquel elles sont homothétiques; par suites, les cercles l_1, l_2, m_1 circonscrits, respectivement, à ces coniques en leurs sommets, ont le point E comme un centre de similitude commun et leurs rayons ont les rapports $\delta : \delta_1 : (a^4 - e^4)$.

On déduit, de ces considérations, la construction suivante de ces cercles.

1. Le cercle m_1 a le centre S et son rayon équivaut à la moitié du rayon du cercle m.

2. Choisissons, comme point M, l'une ou l'autre des extrémités $I \equiv \alpha'$, II du diamètre $O\,A$ du cercle m et prenons ce point pour centre d'un cercle f_1 ou f_2, congruent au cercle n, et le point E comme centre d'un cercle f egal à p; alors, les triangles respectifs $M\,N_0\,E$ font voir que l'axe radical des cercles f, f_1 coupe $O\,A$ en un sommet de la courbe w_1 et l'axe radical des cercles f, f_2 au second sommet. Les points symétriques à ces sommets par rapport au point S sont, par suite, les extrémités du diamètre du cercle l_1 situé sur la droite $O\,A$.

3. Si l'on remplaçait les cercles f, f_1, f_2 par des cercles concentriques f', f_1', f_2', de sorte, que le premier soit congruent à n, les deux autres congruents à p, on arriverait, de la même manière, au diamètre du cercle l_2. Mais on obtient le cercle l_2 aussi en tenant compte de ce que le rayon du cercle m_1 est la moyenne arithmétique des rayons des cercles l_1 et l_2. Donc, le point S est le milieu du segment $S_1\,S_2$ qui est limité par les centres de ces cercles.

Comme la somme de deux vecteurs, ayant même origine, est située à l'intérieur de leur angle, les vecteurs $O\,N$, $O\,P$ sont situés, en tous les cas, de côtés différents de la perpendiculaire abaissée de O sur h_1 ou h_2; et si les vecteurs $O\,M$, $O\,N$, $O\,P$ satisfont à l'équation (1), il en est de même pour des vecteurs $O\,M$, $O\,N'$, $O\,P'$, où N' est le second point d'intersection de la droite h_2, passant par le point N, avec n, et P' le second point d'intersection de la droite h_1, passant par le point P, avec le cercle p.

Ainsi, toutes les possibilités, concernant les triples $O\,X$, $O\,Y$, $O\,Z$ d'axes axonométriques, les rapports des segments $O\,X$, $O\,Y$, $O\,Z$ étant donnés, peuvent être exprimées de la manière suivante:

„On construit, d'abord, les longueurs $O\,\alpha$, $O\,\beta$, $O\,\gamma$, de plus les longueurs $O\,\alpha'$, $O\,\beta'$, $O\,\gamma'$, ainsi que les cercles m, n, p, et ensuite les cercles l_1, l_2. On choisit le point M sur m et on détermine sur la droite $M\,E$ ceux des points d'intersection L_1, L_2 avec l_1, l_2 qui sont séparés, par le point E, du point M. On élève, aux points L_1, L_2 des perpendiculaires h_1, h_2 à $M\,E$ et on coupe, ensuite, le cercle n par la droite h_2, au point N et le cercle p par la droite h_1 au point P, de sorte, cependant, que ces points ce trouvent de côtés différents de la perpendiculaire abaissée du point O sur les droites h_1, h_2. Enfin on mène les droites $O\,X$, $O\,Y$, $O\,Z$, parallèles, respectivement, à $\alpha'\,M$, $\beta'\,N$, $\gamma'\,P$, ce qui nous fournit un triple d'axes axonométriques. On a, en même temps, $O\,X = O\,\alpha$, $O\,Y = O\,\beta$, $O\,Z = O\,\gamma$."

Il peut arriver, comme cas particulier, que la tangente h_1 à v_1 touche le cercle p; alors la tangente respective h_2 à v_2 touche le cercle n. On a $N = N' = N^*$, $P = P' = P^*$ et le point respectif $M = M^*$ sur m se trouve encore sur la perpendiculaire abaissée de E sur ces tangentes, étant séparé d'elles par le point E. Puisque les droites $O\,N^*$, $O\,P^*$ coïncident, le point respectif N_0 est situé sur la droite $E\,M^*$ et $E\,M^* = \dfrac{b^2 + c^2}{e}$; la droite $O\,X$ est parallèle à $M^*\,\alpha'$ et l'extrémité X^* du segment $O\,X$ est située sur l'ellipse k de contour. Les droites $O\,Y$, $O\,Z$ coïncident avec le diamètre de k conjugué à $O\,X$, et si l'on désigne par Y^* et Z^* les extrémités des segments fondamentaux sur ces droites, la longueur $O\,v$ du demi-diamètre de k sur $O\,Y = O\,Z$ est donnée par la relation $O\,v^2 = b^2 + c^2$, ou bien $O\,v^2 = e\,.\,E\,M^*$.

Pour que ce cas se présente, il faut donc que

$$a^2 + e^2 > b^2 + c^2 > a^2 - e^2\,,$$

ou, parce que

$$a^2 + b^2 + c^2 = O\,A^2 + O\,B^2\,,$$

$$O\,A > a > O\,B\,.$$

En ce cas, la construction des cercles l_1, l_2 est particulièrement simple; en effet, le point M^* est le point d'intersection du cercle m avec le cercle au centre E et au rayon égal à $\dfrac{b^2 + c^2}{e}$; les points d'intersection des tangentes à n et à p, perpendiculaires à $E\,M^*$, appartiennent, respectivement, aux cercles l_1, l_2; puisqu'on connaît m, ces cercles, étant homothétiques à m, sont déterminés. Si l'on choisit la droite $O\,X$ sur $O\,A$, $O\,Y$, $O\,Z$ sont des demi-diamètres conjugués de la conique dont l'un demi-axe est situé dans $O\,B$, l'autre $O\,1$, situé sur $O\,A$, est donné par la relation $O\,1^2 = O\,A^2 - O\,\alpha^2$. Désignons par $O\,X'$, $O\,Y'$, $O\,Z'$ les segments $O\,X$, $O\,Y$, $O\,Z$ dans cette position. Le vecteur respectif $O\,M$ est situé sur $O\,A$ et les extrémités

N, P des vecteurs $O\,N$, $O\,P$ sont situées dans les tangentes aux sommets des coniques v_1, v_2, étant séparées, d'ailleurs, par la droite $O\,B$. Nous désignons cette position de M, N, P par $\overline{M}$, $\overline{N}$, $\overline{P}$.

Pour déterminer les cercles l_1, l_2, on peut prendre pour point de départ aussi la relation suivante, qui mène toujours au but. Aprés avoir construit la longueur $O\,1$, on coupe l'ellipse ayant les demi-axes $O\,B$, $O\,1$ par un cercle concentrique au rayon $O\,\beta$; on prend l'un des points d'intersection pour le point Y' et l'on construit $O\,Z'$ comme le demi-diamètre conjugué à $O\,Y'$ dans cette ellipse, après quoi on construit les points respectifs $\overline{N}$ et $\overline{P}$, en faisant usage des relations

$$\sphericalangle\, A\,O\,\overline{N} = 2 \sphericalangle\, A\,O\,Y',\ \sphericalangle\, A\,O\,\overline{P} = 2 \sphericalangle\, A\,O\,Z'.$$

Les pieds des perpendiculaires abaissées de $\overline{N}$ et $\overline{P}$ sur $O\,A$ appartiennent aux cercles l_1, l_2, qu'on peut construire, ensuite, étant donnée leurs position par rapport à m_1.

Il s'agit, en ce cas, de construire, tout simplement, les demidiamètres conjugués aux longueurs connues dans une ellipse dont les axes sont données.

On a p. ex.

$$\operatorname{tg}\,(O\,B,\ O\,Y') = \frac{O\,1}{O\,B}\sqrt{\frac{O\,B^2 - b^2}{b^2 - O\,1^2}}\,.$$

L' influence des rayons α sur le sang des lapins

par

le DR. PIRCHAN,

assistant à la Clinique de M. le prof. Pelnář.

Presenté le 20 Novembre 1925.

En examinant l'influence de l'ionium et de ses rayons α sur le sang et les organes hématopoétiques des lapins, j'ai fait des injections intraveineuses de chlorure d'ionium et de thorium en solution physiologique. La préparation, constituée par M. l'ingénieur Koblic de Jáchymov, consistait de chlorure d'ionium mélangé en proportion de 3, 7. Par l'injection du chlorure d'ionium on introduisit en même temps 7mg de chlorure d'ionium, c'est-à-dire 10 mg de chlorure. De même en injectant 1·2 mg de chlorure d'ionium on a fait entrer dans l'organisme 2 8 mg de thorium. J'ai employé deux doses d'ionium, une dose de 3 mg occasionnant la mort des lapins huit jours après l'injection et une dose de 1·2 mg après laquelle les lapins périrent dans les 40 à 80 jours.

1. L'effet immédiat de l'ionium, c'est-à-dire celui des rayons α qui se manifeste dans les 24 heures, est différent au point de vue de l'intensité et et au point de vue de la force de la dose injectée. Après une dose forte la diminution de la quantité des globules rouges est terminée et en même temps le taux de l'hémoglobine diminue. Après une dose faible il n'y a pas de diminution du nombre des globules rouges, c'est seulement l'hémoglobine quib aisse ¡uelquefois. Après la dose forte ainsi qu'après la dose faible il y a une leucocytose temporaire, relevée quelque temps après par une leucopénie et puis les leucocytes commencent à s'augmenter d'intensité variable. La première leucocytose, au commencement, après la dose forte, est conditionnée par une lymphocytose absolue et relative. Les granulocytes diminuent. La dose faible a pour conséquence la leucocytose temporaire, conditionnée par la lymphocytose ainsi que par la granulocytose. À l'état de leucopénie il y a une diminution des lymphocytes ainsi que des granulocytes. L'autre leucocytose dans les deux doses est conditionnée par la granulocytose — les lymphocytes sont en diminution. Les thrombocytes s'augmentent après la dose forte, après la dose faible ils restent inaltérés.

2. Effet définitif. La dose forte ainsi que la petite provoquent des altérations chroniques dans le sang comme anémie progressive, leucopénie et diminution et même disparition complète des thrombocytes. Ces altérations se manifestent à mesure que la dose devient plus forte. Les premiers jours après l'injection il y avait une granulocytose avec lymphopénie absolue, pendant la progression de la leucopénie il y a diminution des granulocytes avec augmentation relative des lymphocytes, leur taux absolu restant bas. Les thrombocytes disparaissent complètement après s'être augmentés.

Les rayons α rendent sensibles les organes hématopoétiques à l'adrénaline et à l'insuline. L'adrénaline n'augmente pas l'influence des rayons α sur les organes hématopoétiques, mais la première phase de la lymphocytose absolue et relative est prolongée et l'organisme devient plus sensible à l'adrénaline se trouvant sous l'influence des rayons α. L'influence de l'insuline est relevée par les rayons α et par conséquent ceux-ci ont l'effet contraire à l'effet de l'insuline, quoique cet effet n'ait lieu que dans la première phase.

Le chlorure de thorium en dose forte de 10 mg ne provoque la diminution ni des globules rouges ni de l'hémoglobine. Il y a une leucocytose avec une lymphocytose absolue et relative de courte durée, puis la proportion indiquée en pourcent reste inaltérée. La leucocytose revient en peu de jours à la normale et le sang est tel qu'il était avant l'expérience. En admettant que le thorium soit l'ionium sans rayons α, nous voyons que les altérations après l'ionium ne peuvent être provoquées que par sa radioactivité et non par l'effet de celui-ci comme sel.

Method of Determining Motion of Body Water.

By

FR. VANÝSEK M. D. and A. PIRCHAN M. D.

assistant physicians of II med. Clinic, Prague.

Submitted 3. April 1925.

Urea administered per os to a normal person diffuses evenly throughout blood and tissue water so that by its concentration in blood we can determine the volume of water in the body.

The following is an example:

Status after encephalitis:	
U in blood, patient starving	0·33‰
U in blood 4 hours after administration of 15 grams of urea	0·62‰
Weight after experiment	44·00 kgms
Secreted in urine within 4 hours	5·98 grams of urea.

As after 4 hours 1 liter of body liquids contains 0·29 grams of urea more, and considering the body has retained 9·02 grams of urea out of the administered amount of (15 — 5·96), the total volume of body liquids is $= \frac{9{\cdot}02}{0{\cdot}29} = 31$ liters.

The patient weighs 44 kgms; if we take 0·7 liter per 1 kgms as normal water contents in the body it would correspond to 30·8 liters. The two results arrived at differ but slightly.

With a normal volume of body liquids, one liter of water after 4 hours contains 0·29 grams of unsecreted urea.

One liter of blood ought to contain 0·33 + 0·29 =	0·62 grams of urea.
It has been found to hold	0·62 grams of urea.

Results: The patient shows a normal water level.

At first we required to determine the volume of body water and, indeed, our method has proved reliable in normal persons. The described

example is only one of many others. We allow a deviation of 10% within which results may fluctuate.

It has, however, been found that on the contrary urea does not diffuse evenly throughout body water if the patient has previously (even a number of days ago) received injections of novasurol, or doses of thyreoidin; also in M. Basedowi urea does not diffuse evenly. Likewise in orthostatic albuminuria urea does not diffuse evenly in a standing posture owing to labile circulation; in grave cases even in prostrate attitude urea does not diffuse evenly throughout body water. In diabetes insipidus urea diffuses throughout the total of body water if the patient is thirsting; if the patient drinks when suffering from enormous diuresis and unsubdued tissual hydruria, urea is constantly washed down into blood by the salt stream, and can diffuse only in half the volume of body water, e. g.:

U in blood, patient starving after thirsting 5 hours	$0{\cdot}3^0/_{00}$
U in blood 1 hour after administration of 15 grams of urea	$0{\cdot}6^0/_{00}$
Weight after experiment	62·2 kgms
Micturated within 1 hour	2·48 grams of urea.

As, after 1 hour, 1 liter of body liquids contains 0·3 grams of urea more and considering the body has retained 12·52 grams of urea out of the administered amount, the total volume of body liquids is 41·4 liters. The patient weighs 62·2 kgms; the normal water contents ought to be 43·5 liters. The difference is but very slight and urea is diffused through the total of body water.

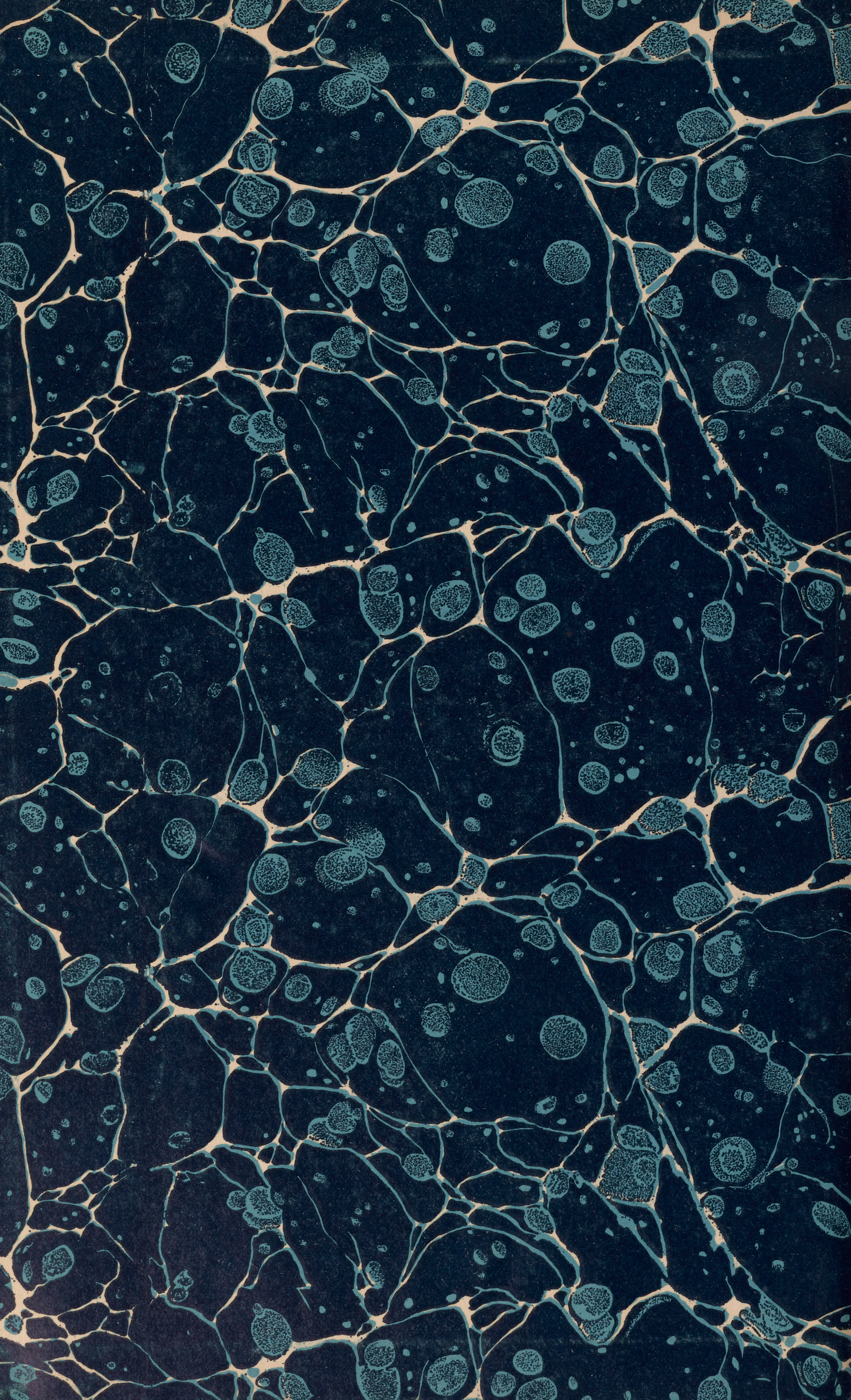
Same experiment, patient drinking:

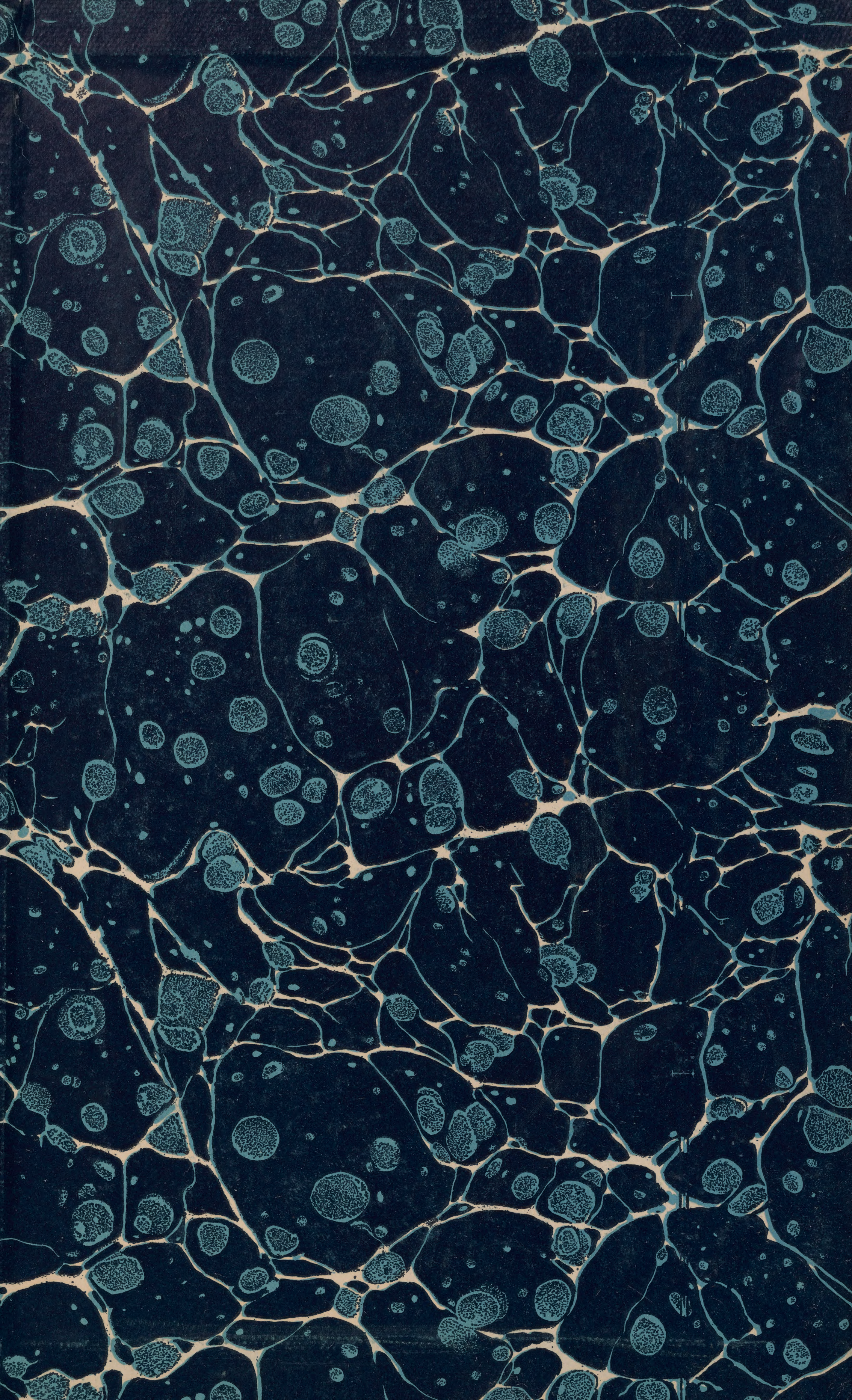
Urea in blood, patient starving	$0{\cdot}4^0/_{00}$
Urea in blood 1 hour after administration of 15 grams of urea	$0{\cdot}91^0/_{00}$
Weight after experiment	62·0 kgms
Micturated within 1 hour	5·68 grams of urea.

As, after 1 hour, 1 liter of blood liquids contains 0·51 grams of urea more, and considering the body has retained 9·32 grams of urea out of the administered amount, urea is diffused only in 18 liters instead of in 43 liters of body water (total volume).

This method enables us to determine the motion of water in the body with greater accuracy.

ALOIS WIESNER, PRAGUE





SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01298 3805